УДК 517.948 DOI:10.35803/1694-5298.2021.4.670-676

АБЛАБЕКОВ Б.С., МУКАНБЕТОВА А.Т.
[1]Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек,
Кыргызская Республика

ABLABEKOV B.S., MUKANBETOVA A.T.
[1]Kyrgyz National University n.a. J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic
ablabekov_63@mail.ru ajzat.mukanbetova.85@mail.ru

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ON SOLVABILITY OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR THE HEAT CONDUCTIVITY EQUATION

Стационардуу эмес жылуулук процесстерин изилдөө менен байланышкан колдонмо маселелерде, керектүү физикалык чоңдукту түздөн-түз өлчөө мүмкүн болбой калса, анын мүнөздөгүчтөрүн кыйыр өлчөө натыйжаларына ылайык калыбына келтирилиши мүмкүн. Бул учурда, талап кылынган баалоолордуу табуунун бирден-бир жолу чек учтарында гана белгилүү болгон берилиштер менен жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси үчүн чектик тескери маселелерди чечүү менен байланыштуу. Мындай маселелер жылуулук процесстерин изилдөөдө гана эмес, ошондой эле диффузиялык процесстерди изилдөөдө, ошондой эле жылуулук мүнөздөгүчтөргө байланыштуу материалдардын касиеттерин изилдөөдө пайда болот. Макала жылуулук өткөргүчтүн теңдемесин үчүн чектик тескери маселени чечүүгөарналган.
***Өзөк сөздөр**: чектик тескери маселелер, корректү эмес коюлган маселелер, жылуулук өткөргүчтүн теңдемеси, Абель интегралдык теңдемеси.*

В прикладных задачах, связанных с исследованием нестационарных тепловых процессов, довольно часто возникает ситуация, когда невозможно осуществить прямые измерения требуемой физической величины и ее характеристики восстанавливаются по результатам косвенных измерений. При этом единственный путь отыскания требуемых значений связан с решением обратной задачи теплопроводности с исходными данными, известными только на части границы. Подобного рода задачи возникают не только при исследовании тепловых процессов, но и при исследовании процессов диффузии, изучении свойств материалов, связанных с тепловыми характеристиками. Статья посвящена к решению граничной обратной задачи для решения уравнения теплопроводности.
***Ключевые слова:** граничные обратные задачи, некорректно поставленные задачи, уравнение теплопроводности, интегральные уравнения Абеля.*

In applied problems related to the study of non-stationary thermal processes, quite often a situation arises when it is impossible to carry out direct measurements of the required physical quantity and its characteristics are restored from the results of indirect measurements. In this case, the only way to find the required values is related to the solution of the inverse problem of heat conduction with the initial data known only on a part of the boundary. Problems of this kind arise not only in the study of thermal processes, but also in the study of diffusion processes, the study of the properties of materials associated with thermal characteristics. The article is devoted to solving the boundary inverse problem for solving the heat equation.
***Key words:** boundary inverse problems, ill-posed problems, heat equation, Abel integral equations.*

Введение. Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по некоторой дополнительной информации (переопределении) о решении прямой задачи [1,2]. Среди обратных задач для дифференциальных уравнений важное прикладное значение имеет граничные обратные задачи теплопроводности. Задача (1) -(3) возникает во многих процессах в области металлургии, метрологии, а также при изучении свойств материалов, связанных с тепловыми характеристиками.

Граничные обратные задачи теплопроводности относятся к классу некорректных задач математической физики. Для ее устойчивого решения используются различные подходы (см. [2-5]. Близкие постановки граничных обратных задач для параболических уравнений изучались в работах[6-8].

В настоящей работе рассматривается одномерная граничная обратная задачи теплопроводности со смешанными граничными условиями и точечным условием переопределение.

Известно, что универсальным способом решения соответствующей прямой задачи является метод Фурье. Попутно, применяя метод Фурье получено явное решение соответствующей прямой задачи. Далее, граничная обратная задача сводится к интегральному уравнению типа Абеля первого рода.

Постановка задачи. Формулировка результатов.

В области $\Omega_T \quad \{(x,t):x\in(0,\pi),t\in(0,T]\}$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу: найти пару функцию $u(x,t)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0\le t<T, \quad 0<x<\pi, \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le\pi, \tag{2}$$

краевым условиям

$$u(0,t)=\varphi(t), u_x(\pi,t)=f(t), \quad 0\le t\le T. \tag{3}$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть в начально-краевой задаче (1) -(3), функции $u_0(x), \varphi(t)$ заданы, а $f(t)$ неизвестна. Требуется определить функцию $f(t)$ такую, что

$$u(x_0,t)=h(t), 0\le t\le T, \ . \tag{4}$$

где $h(t)-$ заданное функция, а $x_0 -$заданное число, $x_0\in(0,\pi)$.

Определение 1. Пара функций $\{u(x,t), f(t)\}$ называется решением задачи (1)-(4), если $u(x,t)\in C^{(2,1)}(\Omega_T)$, $f(t)\in C^1[0,T]$, $f(0)= f'(0) \quad 0$ и удовлетворяют равенствам (1)-(4) в классическом смысле.

Приведем результаты по прямой задаче (1) -(3).Имеет место

Теорема 1. Пусть функции $u_0(x), \varphi(t), f(t)$ удовлетворяют следующим условиям: $u_0(x)\in C^2[0,l]$, $\varphi(t)$, $f(t)\in C^2[0,T]$, $\varphi(0)=u_0(0)=0$, $\varphi'(0)=0$, $u_0'(\pi)=f(0)=0$, $f'(0)=0$. Тогда существует и единственное решение $u(x,t)\in C^{(2,1)}\left(\overline{\Omega}_T\right)\cap C^{(1,0)}\left(\Omega_T\right)$ задачи (1) -(3). Это решение имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\left\{\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)-(-1)^n f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{2n-1}{2}x.$$

Доказательство. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad X(0)=0\quad X'(\pi)=0$$

соответсвующую задаче (1)-(3). Собственные значения и собственные функции этой задачи имеют вид

$$\lambda_n=\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,\quad X_n(x)=\sin\frac{2n-1}{2}x,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение задачи (1) -(3) будем искать в виде ряда

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right), \tag{5}$$

где

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x,t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx. \tag{6}$$

Интегрируя два раза по частям выражение (6), получим

$$T_n(t)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1}\varphi(t)-\frac{4(-1)^n}{(2n-1)^2}f(t)\right]-\frac{2}{\pi}\frac{4}{(2n-1)^2}\int_0^{\pi}u_{xx}(x,t)\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)dx.$$

С другой стороны, учитывая уравнение (1), условие (2) относительно функции $T_n(t)$, получим задачу

$$\begin{cases} T_n'(t)+\dfrac{(2n-1)^2}{4}T_n(t)=\dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{2n-1}{2}\varphi(t)-(-1)^n f(t)\right], \\ T_n(0)=u_{0n}, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$u_{0n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin\frac{2n-1}{2}xdx.$$

Решением задачи (7) является

$$\begin{gathered} T_n(t)=u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)+ \\ +\frac{2}{\pi}\int_0^t\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)-(-1)^n f(\tau)\right]d\tau. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставив выражения (8) в (5), получим формальное решение задачи (1) -(3):

$$\begin{gathered} u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{0n}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\frac{2n-1}{2}x+ \\ +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)\left\{\left[\frac{2n-1}{2}\varphi(\tau)+(-1)^{n+1}f(\tau)\right]d\tau\right\}\sin\frac{2n-1}{2}x. \end{gathered}, \tag{9}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Перейдем к обоснованию решения (9). Из условий, наложенных на функции $u_0(x)$ следует, что

$$|u_{0n}| \le \frac{const}{(2n-1)^2}. \tag{10}$$

Так как $0 < \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right) \le 1$ при всех $t \ge 0$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{0n} \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right) \sin\frac{2n-1}{2}x$$

сходится равномерно и абсолютно в области Ω_T. А также ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 u_{0n} \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right) \sin\frac{2n-1}{2}x, \tag{11}$$

Ряды полученные дифференцированием один раз по t, либо дважды по x, также абсолютно и равномерно сходятся в области Ω_T.Это утверждение вытекает из неравенства $0 < \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right) < 1$.

Далее докажем сходимость второго слагаемого ряда (9).

Так как $\varphi(t) \in C^2[0,T]$, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, то после интегрирования по частям, получим

$$\frac{2n-1}{2}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau = \frac{2}{2n-1}\varphi(t) -$$

$$-\frac{2}{2n-1}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\varphi'(\tau)d\tau.$$

Учитывая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0,\ x = \pi, \end{cases}$$

имеем

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2}\left[\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\varphi(\tau)d\tau\right]\sin\frac{2n-1}{2}x \quad \frac{\varphi(t)}{2} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2n-1}\right)^2 \left[\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right)\varphi''(\tau)d\tau\right]\sin\frac{2n-1}{2}x. \tag{12}$$

Поступая аналогичным образом, получаем

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau\sin\frac{2n-1}{2}x=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[f(t)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\sin\frac{2n-1}{2}x\right]- \qquad (13)$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2\int_0^t \exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(t-\tau)\right)f'(\tau)d\tau\sin\frac{2n-1}{2}x.$$

По признаку Вейерштрасса из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ и формул (12), (13) следует сходимость второго слагаемого ряда (9) в области $\overline{\Omega}_T$.

Аналогичным образом можно показать сходимость соответствующих производных $u_t(x,t),\ u_{xx}(x,t)$. Теорема 1 доказана.

Перейдем теперь к исследованию обратной задачи(1) -(4).

Сведение задачи к интегральному уравнению первого рода

Предположим, что функция $f(t)\in C[0,T]$ является решением обратной задачи (1) -(4). Для сведения обратной задачи к интегральному уравнению используем найденное решение начально-краевой задачи (1) -(3).
Введем функцию Грина

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)x\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\xi,$$

и найденное решение перепишем в виде

$$u(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t\{\varphi(\tau)H_1(x,t-\tau)+f(\tau)H_2(x,t-\tau)\}d\tau, \qquad (14)$$

где

$$H_1(x,t)=\left[\frac{\partial G(x,\xi,t)}{\partial\xi}\right]_{\xi=0},\quad H_2(x,\pi,t)=G(x,\pi,t).$$

Используя метод отражения, функцию Грина $G(x,\xi,t)$ можно переписать в другом виде [9,с.59]:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]-\exp\left[-\frac{(x+\xi+2n\pi)^2}{4t}\right]\right\}=$$

$$=K(x-\xi,t)+\sum_{n=1}^{\infty}\{K(x-\xi+2n\pi,t)+K(x+\xi+2n\pi,t)\},$$

где

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$K(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

Для удобства (14) перепишем в виде

$$u\left(x,t\right)=\vartheta(x,t)-\int_0^t f(\tau)H_2(x,t-\tau)d\tau, \qquad (15)$$

где

$$\vartheta(x,t)=\int_0^1 G(x,\xi,t)u_0(\xi)d\xi+\int_0^t \varphi(\tau)H_1(x,t-\tau)d\tau.$$

Положив $x=x_0$ в (15) и используя условие (4), получим

$$\int_0^t H_2(x_0,t-\tau)f(\tau)d\tau=F(t), \qquad (16)$$

где

$$F(t)=h\left(t\right)-\vartheta(x_0,t).$$

Относительно функции $h(t)$ предположим, что выполнены следующие условия: $h(t)\in C^1[0,T],\, h(0)=u_0(x_0)$.

В силу условий наложенных на функции $h(t), \varphi(t), u_0(x)$ функция $h_1(t)$ является непрерывной функцией. Функцию $H_2(x_0,t-\tau)$ можно представить в виде

$$H_2(x_0,t-\tau)=(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}G_0(x_0,t-\tau),$$

где $G_0(x_0,t-\tau)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x_0^2}{4(t-\tau)}\right)$ - достаточно гладкая функция.

Интегральное уравнение (16) является уравнением типа Абеля первого рода относительно искомой функции $f(t)$, которое имеет точное единственное решение.

Список литературы

1. Аблабеков Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений [Текст] / Б.С.Аблабеков. – Бишкек: Илим, 2001. – 183 с.

2. Аблабеков Б.С. О одной граничной обратной задаче для уравнения теплопроводности [Текст] / Б.С.Аблабеков, А.Т. Муканбетова // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции. 26 – 29 сентября 2019 г. –Орел: ОГУ им. И.С. Тургенева, 2019. – 562 с.

3. Вабищевич П.Н. Разностные методы решения граничной обратной задачи теплопроводности [Текст] / П.Н.Вабищевич //Дифференц.уравнения. - 1991, том 27, № 7, С.1114–1123.

4. Бойков И. В. Об одном методе восстановления граничного условия д линейных уравнений параболического типа [Текст] / И.В.Бойков, В.А.Рязанцев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 4 (56). – С. 42–56. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-4-4.

5. Костин А.Б.О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения [Текст] / А.Б.Костин, А.И.Прилепко II //Дифференц, уравнения. - 1996, том 32, номер 11, 1519-1528.

6. Солодуша С.В. Применение численных методов для уравнений Вольтерра I рода, возникающих в обратной граничной задаче теплопроводности [Текст] / С.В.Солодуша // Известия Иркутского государственного университета. – Иркутск: 2015. Т. 11. Серия «Математика». С. 96-105.

7. Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной обратной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода [Текст] / С.В.Солодуша, Н.М.Япарова //Сиб.журн. вычисл. математики // РАН.Сиб.отд-ние. –Новосибирск: 2015. – Т.18, №3. – С.327-335.

8. Щеглов А. Ю. Метод приближенного решения одной обратной задачи для уравнения теплопроводности [Текст] / А.Ю.Щеглов // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. - 1992. - том 32. - номер 6. - 904–916.

9. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики [Текст] / А.Д.Полянин. - М.: физматлит, 2001. -576с.