УДК 517.9 (575.2) (04)

МОДЕЛЬ САМУЭЛЬСОНА В ПРИМЕРАХ

С.К. Кыдыралиев – канд. физ.-мат. наук, доцент,
А.Б. Урдалетова – канд. физ.-мат. наук, доцент

The changing of GDP is described by linear difference equation. The Samuelson's model is illustrated by means several examples.

Измерения величин многих экономических переменных количеств (типа дохода, потребления и сбережения) обычно производятся в установленные интервалы времени (например, каждый день, каждую неделю или каждый год). Эти величины тогда датируются в соответствии с периодом, к которому они относятся, и поведение этих экономических переменных изучается в дискретные моменты времени.

Уравнения, которые связывают значения экономических переменных в различные моменты времени, называются разностными уравнениями. Например, такое уравнение могло бы связывать величину национального дохода в одном периоде со значениями национального дохода в одном или нескольких предыдущих периодах [1].

В данной работе новый метод решения линейных разностных уравнений второго порядка применяется к анализу модели акселератора-мультипликатора или, как его часто называют, модели Самуэльсона. На конкретных примерах показано, что согласно этой модели, экономический рост имеет место в тех случаях, когда величина инвестиций превосходит прирост потребления.

1. Линейным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами a и $b_к$ называется уравнение

$$x_n - ax_{n-1} = b_n\,, \qquad (1)$$

где $x_к$ – значение исследуемой величины в k-тый период.

Если $b_n = g + hc^{n-1}$ решение уравнения (1) определяется формулой (см. [2]):

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a - 1} + h\frac{a^n - c^n}{a - c}\,. \qquad (2)$$

Формула (2) не имеет места в случаях, когда $a = 1$ или $a = c$.

В то же время несложно увидеть, что при $a = 1$ имеет место формула

$$x_n = x_0 a^n + ng + h\frac{1 - c^n}{1 - c}\,, \qquad (2.1)$$

а при $a = c$ формула

$$x_n = x_0 a^n + g\frac{a^n - 1}{a - 1} + nha^{n-1}\,. \qquad (2.c)$$

ТЕОРЕМА 1 (см. [2])

Решение уравнения второго порядка

$$y_m + py_{m-1} + qy_{m-2} = f(m) \qquad (3)$$

можно получить, решив цепочку разностных уравнений первого порядка:

$$z_m - k_1 z_{m-1} = f(m), \qquad (4)$$

$$y_m - k_2 y_{m-1} = z_m\,. \qquad (5)$$

Здесь p и q – постоянные коэффициенты, f – заданная функция; k_1 и k_2 – корни квадратного алгебраического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

2. Модель акселератора-мультипликатора

Пусть Y_t обозначает национальный доход, C_t – общее потребление и I_t – общие инвестиции в стране во время t.

Предположим, что для $t = 0, 1, ...,$

$$Y_t = C_t + I_t\,, \tag{6}$$
$$C_{t+1} = aY_t + b, \tag{7}$$
$$I_{t+1} = c(C_{t+1} - C_t), \tag{8}$$
где a, b и c – постоянные.

Уравнение (6) показывает, что национальный доход разделен между потреблением и инвестициями.

Уравнение (7) является предположением, о том, что потребление в периоде $t + 1$ является линейной функцией национального дохода в предыдущем периоде.

Это "мультипликативная" часть модели.

Наконец, уравнение (8) заявляет, что инвестиции в периоде $t + 1$ пропорциональны изменению в потреблении по сравнению с предыдущим периодом.

Это "акселераторная" часть модели.

Объединенная модель "акселератора-мультипликатора" изучалась несколькими экономистами, особенно П.А. Самуэльсоном [1]. Предположим, что объем потребления C_0 и объем инвестиции I_0 известны для начального периода $t = 0$.

Тогда из (6) следует, что $Y_0 = C_0 + I_0$, а из (7) следует, что $C_1 = aY_0 + b$. Из (8), мы получаем, что $I_1 = c(C_1 - C_0)$, и затем, снова воспользовавшись (6), имеем $Y_1 = C_1 + I_1$. Следовательно, если известны C_0 и I_0, то и Y_1, C_1 и I_1 известны.

Обращаясь снова к (7), мы находим C_2, затем (8) дает нам величину I_2, (6) в свою очередь позволяет вычислить Y_2. Очевидно, таким образом мы можем получить выражения для C_t, Y_t и I_t для всех t в терминах C_0, Y_0 и постоянных a, b и c. Однако следует отметить, что получаемые выражения все более и более усложняются.

Другой метод изучения системы обычно привносит большую ясность. Он состоит в сведении системы к одному уравнению, зависящему от одной неизвестной функции. Здесь мы используем этот метод для того, чтобы прийти к разностному уравнению относительно Y_t.

С этой целью воспользуемся тем, что уравнения (6) – (8) справедливы для всех t = 0,1 ..., и заменим t на $t+1$ в (7) и (8) и t на $t+2$ в (6), для того чтобы получить

$$C_{t+2} = aY_{t+1} + b, \tag{9}$$
$$I_{t+2} = c(C_{t+2} - C_{t+1}), \tag{10}$$
$$Y_{t+2} = C_{t+2} + I_{t+2}. \tag{11}$$

Подставляя (9) и (7) в (10) получаем, что $I_{t+2} = ac(Y_{t+1} - Y_t)$. Подставив этот результат и (9) в (11), получим:

$$Y_{t+2} = aY_{t+1} + b + ac(Y_{t+1} - Y_t).$$

Приведя подобные члены, приходим к уравнению:

$$Y_{t+2} - a(1 + c)Y_{t+1} + acY_t = b \ (t = 0, l,...) \tag{12}$$

Это разностное уравнение второго порядка с Y_t в качестве неизвестной функции.

3. Далее будет говориться о том, как получить решение уравнения (12) при различных значениях коэффициентов a, b, c.

Пример 1.

Предположим, что коэффициент a, выражающий предельную склонность к потреблению, равен 0,9, а величина инвестиций в каждый момент времени превышает прирост потребления в два раза – то есть $c = 2$.

Также предположим, что величина автономного потребления b равна 10, величина внутреннего валового продукта (ВВП) в исходный момент времени (Y_0) равна 100, в следующем периоде (Y_1) есть 101.

Тогда, согласно уравнению (12), изменение ВВП описывается уравнением:

$$Y_{t+2} – 2,7Y_{t+1} + 1,8Y_t = 10 \ (t = 0, l,...) \tag{13}$$

при начальных условиях:

$$Y_0 = 100,\ Y_1 = 101. \tag{14}$$

Соответствующее характеристическое уравнение $m^2 – m + 1 = 0$ имеет корни $m_1 = 1,5$ и $m_2 = 1,2$.

Следовательно, по теореме 1, уравнение (13) эквивалентно цепочке уравнений:

$$z_{t+1} – 1,2\, z_t = 10, \tag{15}$$
$$Y_{t+1} – 1,5Y_t = z_t\,. \tag{16}$$

При этом из (16) и (14) следует, что $z_0 = 101 – 150 = -49$.

Тогда решение уравнения (15), согласно формуле (2), выражается функцией:

$$z_t = (1,2)^t(-49) + 10\,\frac{(1,2)^t - 1}{0,2} = (1,2)^t - 50. \tag{17}$$

Подставив (17) в уравнение (16) и еще раз воспользовавшись формулой (2), получим:

$$Y_t = (1,5)^t(100) + \frac{(1,2)^t - (1,5)^t}{1,2 - 1,5} -$$
$$- 50\,\frac{(1,5)^t - 1}{0,5} = 100 + \frac{(1,5)^t - (1,2)^t}{0,3}. \tag{18}$$

Функция (18) является растущей. К примеру, $Y_2 = 102,7$, $Y_{10} = 271,58$.

Несложно понять, что определяющим моментом является значение коэффициента $c = 2$.

Тот же результат, с качественной точки зрения, получим в следующем примере. Он интересен тем, что имеет место кратность корней характеристического уравнения.

Пример 2.

Предположим, что коэффициент a равен 0,96, а величина инвестиций в каждый момент времени превышает прирост потребления в полтора раза – то есть $c = 1,5$. Также предположим, что величина автономного потребления b равна 4, величина ВВП в исходный момент времени (Y_0) равна 100, в следующем периоде (Y_1) есть 101.

Тогда, согласно уравнению (12), изменение ВВП описывается уравнением:

$$Y_{t+2} - 2,4Y_{t+1} + 1,44Y_t = 4 \ (t = 0, 1, ...). \qquad (19)$$

Так как характеристическое уравнение имеет корни $m_1 = m_2 = 1,2$, уравнение (19) эквивалентно цепочке уравнений

$$z_{t+1} - 1,2\, z_t = 4, \qquad (20)$$

$$Y_{t+1} - 1,2Y_t = z_t \qquad (21)$$

с $z_0 = 101 - 120 = -19$.

Решение уравнения (20) есть функция:

$$z_t = (1,2)^t(-19) + 4\, \frac{(1,2)^t - 1}{0,2} = (1,2)^t - 20. \qquad (22)$$

Подставив (22) в уравнение (21), получим:

$$Y_{t+1} - 1,2Y_t = (1,2)^t - 20.$$

Теперь воспользуемся формулой (2с):

$$Y_t = (1,2)^t(100) + t(1,2)^{t-1} - 20\, \frac{(1,2)^t - 1}{0,2} =$$

$$= 100 + t(1,2)^{t-1}.$$

Прежде чем перейти к анализу модели Самуэльсона, рассмотрим промежуточный пример. Он показывает, что в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни, процесс решения уравнения путем разложения в цепочку не требует никаких изменений. С методической точки зрения особая ценность примера в том, что он показывает, как использование таких абстрактных инструментов, как комплексные числа, приводит к весьма реальным результатам.

Пример 3.

Последовательность задана первыми двумя членами $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ и уравнением $a_{k+2} = a_{k+1} / a_k$ $(k = 0,1,2, \ldots)$. Найти a_{2008}.

Решение.

Прологарифмируем уравнение: $\ln a_{k+2} = \ln a_{k+1} - \ln a_k$, и обозначим $\ln a_k$ через y_k. В результате имеем линейное разностное уравнение второго порядка:

$$y_{k+2} - y_{k+1} + y_k = 0. \qquad (23)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - m + 1 = 0$ имеет корни

$$m_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ и } m_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме 1, уравнение (23) можно представить в виде цепочки уравнений:

$$y_{k+1} = m_1 y_k + z_k, \qquad (24)$$

$$z_{k+1} = m_2\, z_k. \qquad (25)$$

Из формулы (2) решение уравнения (25): $z_k = (m_2)^k z_0$.

Подставим найденное значение z_k в уравнение (24), и еще раз воспользовавшись формулой (2), получим:

$$y_k = (m_1)^k y_0 + z_0\, \frac{(m_2)^k - (m_1)^k}{m_2 - m_1}.$$

Разность корней $m_2 - m_1 = i\sqrt{3}$, а для того чтобы вычислить разность степеней, сначала воспользуемся тригонометрической формой записи комплексного числа:

$m_2 = \cos\pi/3 + i \sin \pi/3$ и $m_1 = \cos\pi/3 - i \sin \pi/3$,

и формулой Муавра:

$$(m_2)^{2008} = (\cos\pi/3 + i \sin \pi/3)^{2008} =$$

$$= \cos(2008\pi/3) + i \sin(2008\pi/3) =$$

$$= \cos(4\pi/3) + i \sin(4\pi/3) = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

$$(m_1)^{2008} = (\cos\pi/3 - i \sin \pi/3)^{2008} =$$

$$= \cos(2008\pi/3) - i \sin(2008\pi/3) =$$

$$= \cos(4\pi/3) - i \sin(4\pi/3) = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь вычтем и получим, что

$$(m_2)^{2008} - (m_1)^{2008} = -i\sqrt{3}.$$

Следовательно, $y_{2008} = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} y_0 + z_0(-1)$.

Из начальных условий следует, что

$y_0 = \ln 2$,

z_0 = *(из уравнения (24))* $= y_1 - m_1 y_0 =$

$= \ln 3 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \ln 2.$

Поэтому,

$$y_{2008} = -\ \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\ ln\ 2 +$$

$$+\ (ln\ 3 - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\ ln\ 2)(-1) = -\ ln\ 3 = ln\frac{1}{3}\ .$$

Отсюда следует, что $a_{2008} = 1/3$.

Повторяем, что ценность данного примера не в результате, а в методе, который использовался для его получения, правильность полученного результата можно проверить исходя из следующих выкладок.

Вычислим несколько элементов последовательности a_k :

$a_2 = a_1 / a_0 = 3/2;$

$a_3 = a_2 / a_1 = (3/2) / 3 = 1/2;$

$a_4 = a_3 / a_2 = (1/2) / (3/2) = 1/3;$

$a_5 = a_4 / a_3 = (1/3) / (1/2) = 2/3;$

$a_6 = a_5 / a_4 = (2/3)/ (1/3) = 2;$

$a_7 = a_6 / a_5 = 3/ (3/2) = 3.$

Можно продолжать, но как говорят, “главное – вовремя остановиться”. Нужно заметить, что $a_6 = a_0$; $a_7 = a_1$. Это означает, что элементы последовательности a_k повторяются через 6 номеров.

Следовательно, $a_{2004} = a_0 = 2;\ a_{2005} =$

$= a_1 = 3;\ a_{2006} = a_2 = 3/2$;

$a_{2007} = a_3 = 1/2$; $a_{2008} = a_4 = 1/3$.

Пример 4.

Возвращаемся к модели Самуэльсона. Предположим, что коэффициент a равен 0,4608, а величина инвестиций в каждый момент времени меньше прироста потребления: $c = 0,5625$. Пусть величина автономного потребления b равна $13,48$, величина ВВП в исходный момент времени (Y_0) равна 125, в следующем периоде (Y_1) есть 120.

Тогда, согласно уравнению (12), изменение ВВП описывается уравнением:

$$Y_{t+2} - 0,72Y_{t+1} + 0,2592Y_t =$$
$$= 13,48\ (t = 0, l,...). \qquad (26)$$

Характеристическое уравнение $m^2 - 0,72m + 0,2592 = 0$ имеет корни

$$m_1 = 0,36 + \sqrt{0,1296 - 0,2592} =$$

$$= 0,36 + \sqrt{-0,1296} = 0,36 + i\ 0,36$$

и

$$m_2 = 0,36 - \sqrt{0,1296 - 0,2592} =$$

$$= 0,36 - \sqrt{-0,1296} = 0,36 - i\ 0,36.$$

Поэтому уравнение (26) можно представить в виде цепочки уравнений

$$z_{t+1} - m_1 z_t = 13,48, \qquad (27)$$
$$Y_{t+1} - m_2 Y_t = z_t\ . \qquad (28)$$

с начальными условиями

$Y_0 = 125$ и $z_0 = 120 - m_2\,125 = 75 + 45i$.

Тогда решение уравнения (27):

$$z_t = (m_1)^t (75 + 45i) + 13,48\ \frac{1-(m_1)^t}{1-m_1} =$$

$$= 16 + 9i + (59 + 36i)\ (m_1)^t\ .$$

Подставив найденное значение z_t в уравнение (28) и еще раз использовав формулу (2), получим:

$$Y_t = (m_2)^t 125 + (16 + 9i)\frac{1-(m_2)^t}{1-m_2} +$$

$$+\ (59 + 36i)\ \frac{(m_1)^t-(m_2)^t}{m_1-m_2} =$$

$$= (m_2)^t 125 + (1 - (m_2)^t)25 +$$

$$+\ \frac{59+36i}{0,72i}\,[(m_1)^t - (m_2)^t] =$$

$$= 25 + 100(m_2)^t + \frac{59+36i}{0,72i}\,[(m_1)^t - (m_2)^t].$$

Воспользуемся тригонометрической формой записи комплексного числа:

$$m_1 = 0,36\sqrt{2}\ (\cos\pi/4 + i\ \sin\ \pi/4)$$

и

$$m_2 = 0,36\sqrt{2}\ (\cos\pi/4 - i\ \sin\ \pi/4),$$

и формулой Муавра:

$$(m_2)^t = [0,36\sqrt{2}\ (\cos\pi/4 + i\ \sin\ \pi/4)]^t =$$
$$= [0,36\sqrt{2}\ ]^t\ (\cos\pi t/4 + i\ \sin\ \pi t/4),$$
$$(m_1)^t = [0,36\sqrt{2}\ (\cos\pi/4 - i\ \sin\ \pi/4)]^t =$$
$$= [0,36\sqrt{2}\ ]^t\ (\cos\pi t/4 - i\ \sin\ \pi t/4).$$

Тогда

$$Y_t = 25 + [0,36\sqrt{2}\ ]^t\ (100\cos\pi t/4 +$$
$$+\ \frac{59}{0,36}\ \sin\ \pi t/4).$$

Для того чтобы убедиться в правильности проведенных выкладок, полезно подсчитать значения функции Y_t при $t = 0,\ 1$ и убедиться в том, что они совпадают с начальными данными.

Кроме того, несложно видеть, что с ростом t значения функции Y_t убывают. Этот факт имеет вполне прозрачный экономический смысл: если прирост потребления превышает величину инвестиций, то ВВП будет уменьшаться.

Литература

1. *Sydsaeter K., Hammond P.J.* Mathematics for economic analysis. USA, Prentice Hall, 1995. – 1000 p.
2. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Моделирование экономических явлений при помощи дифференциальных и разностных уравнений // Вестник КРСУ. – 2007. – Т. 7. – №11. – С. 53–59.