УДК 515.12

ЛИСЕЕВ М. Ю.
МГУ им. М.В.Ломоносова;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики МГУ,
ЛИСЕЕВ М.Ю.
М.В.Ломоносов атындагы Москва Мамлекеттик Университети (ММУ),
Москвадагы ММУнун фундаменталдуу жана колдонмо математика борбору,
LISEEV. M.Y.
Lomonosov Moscow State University,
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics MSU.

О ПОНЯТИИ СОВЕРШЕННОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ

Чагылдыруунун жетик нормалдуулугу түшүнүгү жөнүндө

On the concept of perfect normality of a mapping

Аннотация. *В статье рассматриваются вопросы аксиоматики отделимости отображений. Вводятся определения F_σ-подотображения, σ-(пред)нормального, $co(coim)$-совершенно нормального и $co(coim)$-σ-совершенно нормального отображений. Строятся примеры, характерные для этих классов отображений. Основными результатами являются утверждения о наследовании F_σ-подотображениями свойства σ-нормальности отображения, co-наследственной нормальности co-σ-совершенно нормального отображения и наследственности для F_σ-подотображений свойства отображения быть co-σ-совершенно нормальным.*

Аннотация. *Макалада чагыдыруулардын ажыратуу аксиомалары изилденет. F_σ-камтылган чагылдыруунун, σ- (пред) нормалдуу, co (coim) -жетик нормалдуу жана co (coim) -σ-жетик нормалдуу чагылдырууларынын аныктамалары киргизилет. Бул класстарды мүнөздөөчү мисалдар тургузулат. Бул макаланын негизги жыйынтыктары болуп камтылган F_σ - чагылдырууларынын σ-нормалдуулук касиетинин сакталышы камтылган co- нормалдуу чагылдырууларынын co- σ-жетик нормалдуу касиетинин сакталышы жана камтылган F_σ- чагылдырууларынын co- σ-жетик нормалдуу чагылдыруу болушу эсептелинет.*

Abstract. *This paper considers the separability axiomatics of mappings. Definitions of F_σ-submapping, σ-(pre)normal, $co(coim)$-perfectly normal, and $co(coim)$-σ-perfectly normal mappings are introduced. Several examples typical for these classes of mappings are constructed. The main results are statements about the heredity of the σ-normality of a mapping property by the its F_σ-submaps, the co-hereditarily normality of a co-σ-perfectly normal mapping, and heredity for F_σ-submaps of the property of a mapping to be co-σ-perfectly normal.*

Ключевые слова: *послойная топология; нормальное отображение; наследственно нормальное отображение; F_σ-подотображение; совершенно нормальное отображение.*

Урунттуу сөздөр*: катмарлуу топология; нормалдуу чагылдыруу; камтылуу боюнча сакталган нормалдуу чагылдыруу; F_σ-камтылган чагылдыруу; жетик нормалдуу чагылдыруу.*

Keywords: *fiberwise topology; normal mapping; hereditarily normal mapping; F_σ-submapping; perfectly normal mapping.*

§ 1 Введение

В статье рассматриваются вопросы послойной общей топологии (топологии непрерывных отображений), состоящие в распространении на отображения понятия совершенной нормальности и связанных с ним утверждений. Для этого, сформулировано определение F_σ-подотображения, которое можно рассматривать как послойный вариант понятия F_σ-подмножества. Приведен пример F_σ-подотображения не F_σ-подмножества.

Введенное в 1984 году Б. А. Пасынковым [1] определение нормального отображения дает естественное определение совершенно нормального отображения как нормального отображения, всякое открытое подотображение которого является F_σ-подотображением. Примеры совершенно нормальных отображений не являющихся наследственно нормальными приводят к усилению свойства нормальности отображения и рассмотрению σ-нормальных отображений. Мотивацией введения определения σ-нормального отображения можно считать то, что всякое σ-нормальное отображение нормально, и для постоянного отображения утверждения о нормальности тотального пространства, нормальности и σ-нормальности отображения этого пространства эквивалентны. Оказывается, что σ-нормальность отображения наследуется F_σ-подотображениями (вопрос о возможности подобного утверждения для нормального отображения остается открытым). Таким образом, возникает понятие усиленной совершенной нормальности отображения, как σ-нормального отображения, всякое открытое подотображение которого имеет тип F_σ. Определенная таким образом совершенная нормальность отображения влечет его наследственную нормальность, и является наследственным по F_σ-подотображениям свойством.

Под пространством понимается топологическое пространство, а под отображением — непрерывное отображение пространств. Для пространства X его топология обозначается τ_X. В статье используются терминология и обозначения из [2] и [3].

Определение 1 [1, с. 73]. Подмножества A, B пространства X называются *отделимыми окрестностями в подпространстве X' пространства X*, если множества $A \cap X'$ и $B \cap X'$ имеют в X' дизъюнктные окрестности.

Определение 2 [1, с. 73]. Для отображения $f: X \to Y$ множества $A, B \subset X$ называются *f-отделимыми окрестностями,* если любая точка $y \in Y$ обладает окрестностью Oy, в прообразе $f^{-1}Oy$ которой множества A и B отделимы окрестностями.

Определение 3 [1, с. 73]. *Отображение $f: X \to Y$ преднормально,* если любые два дизъюнктных замкнутых подмножества A и B пространства X будут f-отделимы окрестностями.

Отображение $f: X \to Y$ нормально [4, стр. 52], если для любого $O \in \tau_Y$ отображение $f: f^{-1}O \to O$ преднормально.

В [1] подотображение определяется как сужение отображения на подмножество тотального пространства (далее для удобства будем обозначать его $f|_{X_0}$, где $X_0 \subset X$). Рассматривая сужение на подмножества прообраза и образа, имеем следующее определение подотображения.

Определение 4 [5, стр. 113]. *Сужение отображения $f: X \to Y$ на подпространства $X_0 \subset X$ и $f(X_0) \subset Y$* будем называть подотображением отображения f в смысле ограничения на образ и прообраз и обозначать $f||_{X_0}$.

Подотображение называется *открытым (замкнутым) подотображением* [1], если оно является сужением на открытое (замкнутое) подмножество прообраза.

Определение 5. Отображение $f: X \to Y$ называется *со-наследственно нормальным* [6, определение 10] (*coim-наследственно нормальным* [5, определение 7]), если каждое его подотображение, в смысле сужения на прообраз (прообраз и образ), нормально.

§ 2 F_σ- подотображение, -(пред)нормальность отображения

Определение 6. *Подотображение $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ имеет тип F_σ* (или является *F_σ-подотображением*), если для любой точки $y \in Y$ найдется такая окрестность $Oy \subset Y$, что $(f|_{X_0})^{-1}Oy$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}Oy$.

Подотображение $f||_{X_0}: X_0 \to f(X_0)$ имеет тип F_σ (или является F_σ-

подотображением), если для любой точки $y \in f(X_0)$ найдется такая окрестность $Oy \subset f(X_0)$, что $(f||_{X_0})^{-1}Oy$, является F_σ-подмножеством $f^{-1}Oy$.

Предложение 1. ($\boldsymbol{a}$) *Если для отображения $f: X \to Y$ и подмножества $X_0 \subset X$ множество $Y_0 \subset Y$ таково, что множество $X_0 \cap f^{-1}Y_0$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}Y_0$, то для любого множества $T \subset Y_0$ множество $X_0 \cap f^{-1}T$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}T$.*

($\boldsymbol{a'}$) *Если для отображения $f: X \to Y$ и подмножества $X_0 \subset X$ окрестность Oy точки $y \in Y$ (соответственно $Oy \subset f(X_0)$ точки $y \in f(X_0)$) удовлетворяет определению 6, то любая окрестность $Uy \subset Oy$ точки y также удовлетворяет определению 6.*

($\boldsymbol{b}$) *Если подотображение $f|_{X_0}$ отображения $f: X \to Y$ имеет тип F_σ, то и $f||_{X_0}$ также имеет тип F_σ.*

($\boldsymbol{c}$) *Если X_0 — F_σ-подмножество X, то для любого отображения $f: X \to Y$ подотображение $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ.*

($\boldsymbol{d}$) *Подотображение $f|_{X_0}$ постоянного отображения $f: X \to Y$, $f(X) = y$, имеет тип F_σ тогда и только тогда, когда X_0 является F_σ-подмножеством X.*

($\boldsymbol{e}$) *Любое подотображение $id||_{X_0}$ тождественного отображения $id: X \to X$ имеет тип F_σ.*

Доказательство. (a) Пусть $X_0 \cap f^{-1}Y_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где множества F_i замкнуты в $f^{-1}Y_0$ для всех $i = \overline{1,\infty}$. Тогда $X_0 \cap f^{-1}T = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap f^{-1}T)$, где множества $F_i \cap f^{-1}T$ замкнуты в $f^{-1}T$ для всех $i = \overline{1,\infty}$. Значит справедливо (a).

(a′) является частным случаем (a).

(b) Пусть подотображение $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ. Зафиксируем произвольную точку $y \in f(X_0)$. Тогда, найдется такая окрестность Oy точки y, что $(f|_{X_0})^{-1}Oy = X_0 \cap f^{-1}Oy = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где подмножества F_i замкнуты в $f^{-1}Oy$, для всех $i = \overline{1,\infty}$. Для подотображения $f||_{X_0}: X_0 \to f(X_0)$ имеем $(f||_{X_0})^{-1}(Oy \cap f(X_0)) = X_0 \cap f^{-1}Oy \cap f^{-1}f(X_0) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap f^{-1}f(X_0))$. Множество F_i замкнуто в $f^{-1}(Oy)$, значит множество $F_i \cap f^{-1}f(X_0)$ замкнуто в $f^{-1}(Oy) \cap f^{-1}f(X_0) = f^{-1}(Oy \cap f(X_0))$, $i = \overline{1,\infty}$. Значит для $O'y = Oy \cap f(X_0)$ множество $(f||_{X_0})^{-1}(O'y)$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}(O'y)$. Следовательно, справедливо (b).

(c) Для F_σ-подмножества $X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ пространства X, отображения $f: X \to Y$ и произвольной точки $y \in Y$ рассмотрим окрестность $Oy = Y$. Тогда $(f|_{X_0})^{-1}Y = X_0 \cap X = X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ и выполнено (c).

(d) Рассмотрим постоянное отображение $f(X) = y \in Y$. Пусть его подотображение $f|_{X_0}: X_0 \to y$ имеет тип F_σ. Тогда для любого открытого в Y подмножества O имеем $(f|_{X_0})^{-1}O = X_0 \cap f^{-1}y = X_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где подмножества F_i замкнуты в $f^{-1}O = X$ для всех $i = \overline{1,\infty}$, если $y \in O$. Случай $y \not\in O$ очевиден. Значит X_0 является F_σ-подмножеством X. Обратная импликация следует из (c).

(e) Для подотображения $id||_{X_0}: X_0 \to X_0$ рассмотрим произвольную точку $y \in X_0$. Для ее окрестности X_0 имеем $(id||_{X_0})^{-1}(X_0) = X_0 = id^{-1}(X_0)$. Следовательно, справедливо (e). □

Следующее предложение является распространением на случай отображений утверждения о том, что если подпространство $M \subset X$ является F_σ-подмножеством в X, то множество $A \subset M$ есть F_σ-подмножество M тогда и только тогда, когда оно является F_σ-подмножеством X [3, Упражнение 2.1.B (a)].

Предложение 2. *Пусть $f: X \to Y$, $M \subset X$. Если $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ-подотображением f, то тогда $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ-подотображением $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$) для любого X_0, $M \subset X_0 \subset X$.*

Если $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ-подотображением $f|_{X_0}$

(соответственно $f||_{X_0}$), $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$) является F_σ-подотображением отображения f, то тогда $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ-подотображением f.

Доказательство. Пусть $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ-подотображением f. Для произвольной точки $y \in Y$ (соответственно $y \in f(M)$) существует такая ее окрестность $\mathcal{O}y$ (соответственно $\mathcal{O}y \subset f(M)$), что $(f|_M)^{-1}\mathcal{O}y$ (соответственно $(f||_M)^{-1}\mathcal{O}y$) является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$. Так как для любого X_0, $M \subset X_0 \subset X$, имеем $f|_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y \subset f^{-1}\mathcal{O}y$ (соответственно $f||_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y \subset f^{-1}\mathcal{O}y$), и $(f|_M)^{-1}\mathcal{O}y \subset f|_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y$ (соответственно $(f||_M)^{-1}\mathcal{O}y \subset f||_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y$), то $f|_M^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством $f|_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y$ (соответственно $(f||_M)^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством в $f||_{X_0}^{-1}\mathcal{O}y$). Значит $f|_M$ (соответственно $f||_M$) является F_σ- подотображением $f|_{X_0}$ (соответственно $f||_{X_0}$).

Доказательство второго утверждения для $f|_M$. Фиксируем произвольную точку $y \in Y$. Так как $f|_M$ является F_σ-подотображением $f|_{X_0}$, то найдется такая ее окрестность $\mathcal{O}^1y$, что $(f|_M)^{-1}\mathcal{O}^1y$ является F_σ-подмножеством $(f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}^1y$. Так как $f|_{X_0}$ является F_σ-подотображением отображения f, то найдется такая ее окрестность $\mathcal{O}^2y$, что $(f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}^2y$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}^2y$. Тогда из предложения 1 (a′) следует, что для окрестности $\mathcal{O}y = \mathcal{O}^1y \cap \mathcal{O}^2y$ точки y множество $X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$, и множество $M \cap (f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством $(f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$. Следовательно, из [3, упражнение 2.1.B (a)] заключаем, что $M \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$. Значит $f|_M$ является F_σ-подотображением f.

Доказательство второго утверждения для $f||_M$. Фиксируем произвольную точку $y \in f(M)$. Так как $f||_M$ является F_σ-подотображением $f||_{X_0}$, то найдется такая ее окрестность $\mathcal{O}^1y \subset f(M)$, что $(f||_M)^{-1}\mathcal{O}^1y$ является F_σ-подмножеством $(f||_{X_0})^{-1}\mathcal{O}^1y$. Так как $f||_{X_0}$ является F_σ-подотображением отображения f, то найдется такая ее окрестность $\mathcal{O}^2y \subset f(X_0)$, что $(f||_{X_0})^{-1}\mathcal{O}^2y$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}^2y$. Положим $\mathcal{O}y = \mathcal{O}^1y \cap \mathcal{O}^2y$. Тогда из предложения 1 (a′) следует, что $M \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ — F_σ-подмножество $X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$. Далее, так как $X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}^2y$ — F_σ-подмножество $f^{-1}\mathcal{O}^2y$, то из предложения 1 (a) следует, что $X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ — F_σ-подмножество $f^{-1}\mathcal{O}y$. Следовательно, из [3, упражнение 2.1.B (a)] заключаем, что $M \cap f^{-1}\mathcal{O}y$ — F_σ-подмножество $f^{-1}\mathcal{O}y$. Значит $f||_M$ является F_σ-подотображением f. □

Пример 1 (F_σ-подотображения не F_σ-подмножеств). A. Рассмотрим пространство счетных ординалов W_0 и его тождественное отображение $id: W_0 \to W_0$. Пространство W_0 не совершенно нормально. Открытое подмножество V непредельных ординалов не является F_σ-подмножеством W_0 [3, пример 3.1.27]. Отображение $id|_V: V \to W_0$ является F_y- подотображением. Действительно, любая точка $y \in W_0$ имеет метризуемую окрестность $\mathcal{O}y$, и открытое в $\mathcal{O}y$ множество $V \cap \mathcal{O}y$ является F_σ-подмножеством $\mathcal{O}y$.

B. Рассмотрим двойную окружность Александрова $\mathcal{A} = A_1 \cup A_2$, где $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 2\}$, p — отображение проектирования окружности A_1 на окружность A_2 из точки (0,0). Топология на $\mathcal{A}$ определяется системами окрестностей точек $\mathcal{B}(a) = \{U_i(a)\}_{i=1}^{\infty}$ при $a \in A_1$ и $\mathcal{B}(a) = \{\{a\}\}$ при $a \in A_2$, где $U_i(a) = V_i \cup p(V_i \backslash \{a\})$, V_i — дуга окружности A_1 длины $1/i$ с центром в точке a. Подмножество A_2 не является F_σ-подмножеством $\mathcal{A}$ [3, пример 3.1.26].

Для отображения $f: \mathcal{A} \to S$ двойной окружности Александрова на связное двоеточие $S = \{s_1, s_2\}$ (двухточечное пространство с топологией $\{\varnothing, s_2, S\}$) такое, что $f(A_1) = s_1$, $f(A_2) = s_2$ подотображение $f||_{A_2}: A_2 \to s_2$ имеет тип F_σ, поскольку $(f||_{A_2})^{-1}s_2 = A_2 = f^{-1}s_2$. Отображение $f|_{A_2}: A_2 \to S$ не имеет тип F_σ, поскольку для единственной окрестности S точки s_1 имеем $(f|_{A_2})^{-1}S = A_2$, $f^{-1}S = \mathcal{A}$ и A_2 не является F_σ-подмножеством $\mathcal{A}$.

Предложение 3. *Если любое открытое подотображение $f|_O$ отображения $f: X \to Y$ имеет тип F_σ, то и любое открытое подотображение произвольного подотображения $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ.*

Доказательство. Рассмотрим открытое подотображение $f|_G: G \to Y$ произвольного подотображения $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ и произвольную точку $y \in Y$. Множество G открыто в X_0, поэтому существует открытое в X множество O такое, что $G = X_0 \cap O$.

Поскольку подотображение $f|_O$ имеет тип F_σ, для точки $y \in Y$ существует ее окрестность $\mathcal{O}y \subset Y$ такая, что

$(f|_O)^{-1}\mathcal{O}y = f^{-1}\mathcal{O}y \cap O = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, (1)

где F_i — замкнутые в $f^{-1}\mathcal{O}y$ подмножества. Тогда, множества $\Phi_i = (f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y \cap F_i$ замкнуты в $(f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y$, $i = \overline{1,\infty}$. Из (1) получаем, что $G \cap (f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y = X_0 \cap O \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}y = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \cap (f|_{X_0})^{-1}\mathcal{O}y) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$. Значит произвольное открытое подотображение $f|_G$ отображения $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ. □

Определение 7. Отображение $f: X \to Y$ *σ-преднормально,* если для любых F_σ-множества $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ и замкнутого в X подмножества F таких, что $T \cap F = \varnothing$ и любой точки $y \in Y$ существуют её окрестность $\mathcal{O}y$ и семейство открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\{\mathcal{O}_i: \mathcal{O}_i \supset F_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} cl_{f^{-1}\mathcal{O}y}(\mathcal{O}_i) \cap F = \varnothing$.

Отображение f *σ-нормально*, если отображение $f: f^{-1}O \to O$ — σ-преднормально для всех $O \in \tau_Y$.

Следующая характеризация -(пред)нормальности отображения является переформулировкой определения 7.

Предложение 4. *Отображение $f: X \to Y$ σ-преднормально тогда и только тогда, когда*

($\star$) *для любых дизъюнктных F_σ-множества $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ и замкнутого в X подмножества F и любой точки $y \in Y$ существуют её окрестность $\mathcal{O}y$, семейство открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\{\mathcal{O}_i: \mathcal{O}_i \supset F_i \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}_{i=1}^{\infty}$ и семейство открытых $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\{\mathcal{O}_iF: \mathcal{O}_iF \supset F \cap f^{-1}\mathcal{O}y\}$ такие, что $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_iF = \varnothing$, $i \in \mathbb{N}$.*

Отображение $f: X \to Y$ σ-нормально тогда и только тогда, когда для любой окрестности $O \in \tau_Y$, подотображение $f: f^{-1}O \to O$ удовлетворяет условию ($\star$).□

Следующее предложение очевидно следует из [2, Глава 1, § 5, лемма 1-3].

Предложение 5. *Любое отображение нормального пространства σ-преднормально.*

Любое отображение наследственно нормального пространства σ-нормально.

Для отображения в P-пространство (топологическое пространство, в котором счетное пересечение открытых множеств открыто), его σ-(пред)нормальность и (пред)нормальность эквивалентны. □

Замечание 1. *Для постоянного отображения $f: X \to Y$ условия σ-преднормальности, σ-нормальности эквивалентны и эквивалентны нормальности пространства X.*

Любое σ-(пред)нормальное отображение (пред)нормально.

Если $f: X \to Y$ σ-(пред)нормально, то $f||_X$ — σ-(пред)нормально. □

Вопрос 1. Привести примеры σ-преднормального, но не σ-нормального, и нормального, но не σ-преднормального отображений.

Теорема 6. *Пусть отображение $f: X \to Y$ σ-нормально, подотображение $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ имеет тип F_σ. Тогда подотображение $f|_{X_0}$ σ-нормально.*

В частности, если отображение $f: X \to Y$ σ-преднормально, X_0 — F_σ-подмножество X, то отображение $f|_{X_0}$ σ-преднормально.

Доказательство. Зафиксируем произвольное открытое множество $O \in \tau_Y$. Рассмотрим два дизъюнктных в $X_0 \cap f^{-1}O$ подмножества F и T, где F — замкнуто в $X_0 \cap f^{-1}O$, T — F_σ-подмножество $X_0 \cap f^{-1}O$.

Так как подотображение $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ, то для произвольной точки $y \in \mathcal{O}$ существует её окрестность $\mathcal{O}y$, прообраз которой при отображении $f|_{X_0}$ является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}y$. Не теряя общности рассуждений, будем далее считать, что $\mathcal{O}y = \mathcal{O}$. Тогда множество T является F_σ-подмножеством $f^{-1}\mathcal{O}$ (как F_σ подмножество F_σ множества), не пересекающееся с замыканием clF множества F в $f^{-1}\mathcal{O}$.

Так как отображение f σ-нормально, то существуют окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ точки y и семейство открытых в $f^{-1}\mathcal{O}$ подмножеств, удовлетворяющих условию определения 7. Окрестность $\mathcal{O}y$ и пересечение полученного семейство открытых подмножеств с $X_0 \cap f^{-1}\mathcal{O}$ является искомым для установления σ-нормальности подотображения $f|_{X_0}$. □

Теорема 6 является распространением на случай отображений известного факта о том, что в случае пространств, нормальность наследуется F_σ-подмножествами. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть отображение пространства в одноточечное пространство (постоянное отображение).

Следующая лемма представляет вариант распространения “нормализующей леммы” на случай отображений и необходима для дальнейшего изложения.

Лемма 7. *Пусть $f: X \to Y$ — отображение пространств, в X даны множества M^1 и M^2 такие, что для всякого $y \in Y$ существуют её окрестность $\mathcal{O}y$ и счетные системы $\omega_{i,f^{-1}\mathcal{O}y} = \{\mathcal{O}_j^{i,f^{-1}\mathcal{O}y}\}_{j=1}^{\infty}$ открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств, для которых выполнено*

$M^i \cap f^{-1}\mathcal{O}y \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j^{i,f^{-1}\mathcal{O}y}$, *где $i = 1,2$ и*

$M^1 \cap cl_{f^{-1}\mathcal{O}y}\left(\mathcal{O}_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y}\right) = \varnothing$, и $M^2 \cap cl_{f^{-1}\mathcal{O}y}\left(\mathcal{O}_j^{1,f^{-1}\mathcal{O}y}\right) = \varnothing$, для $\forall j = \overline{1,\infty}$. *(2)*

Тогда, множества M^1 и M^2 f-отделимы.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $y \in Y$, по условию теоремы существуют её окрестность $\mathcal{O}y$ и системы открытых в $f^{-1}\mathcal{O}y$ множеств $\omega_{1,f^{-1}\mathcal{O}y}$ и $\omega_{2,f^{-1}\mathcal{O}y}$ для которых выполнено (2). Положим

$V_1^1 = \mathcal{O}_1^{1,f^{-1}\mathcal{O}y}$, $V_k^1 = \mathcal{O}_k^{1,f^{-1}\mathcal{O}y} \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} cl_{f^{-1}\mathcal{O}y}\mathcal{O}_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y}$, где $k = \overline{2,\infty}$

$V_k^2 = \mathcal{O}_k^{2,f^{-1}\mathcal{O}y} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} cl_{f^{-1}\mathcal{O}y}\mathcal{O}_j^{1,f^{-1}\mathcal{O}y}$, где $k = \overline{1,\infty}$.

Очевидно, что множества V_k^1 и V_k^2 открыты в $f^{-1}\mathcal{O}y$ значит, множества $V^j = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k^j$, $j = 1,2$ также открыты в $f^{-1}\mathcal{O}y$. Тогда, из условий (2) следуют включения $M^1 \subset V^1$ и $M^2 \subset V^2$.

По построению, при $j \geq k$ имеем

$V_k^1 \cap V_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y} \subset \mathcal{O}_k^{1,f^{-1}\mathcal{O}y} \cap (\mathcal{O}_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y} \setminus \mathcal{O}_k^{1,f^{-1}\mathcal{O}y}) = \varnothing$,

а при $j < k$

$V_k^1 \cap V_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y} \subset (\mathcal{O}_k^{1,f^{-1}\mathcal{O}y} \setminus \mathcal{O}_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y}) \cap \mathcal{O}_j^{2,f^{-1}\mathcal{O}y} = \varnothing$.

Таким образом, для любых k и j имеем $V_k^1 \cap V_j^2 = \varnothing$. Следовательно, $V^1 \cap V^2 = \varnothing$. □

Напомним, что подмножества A и B пространства X называются *отделенными*, если $clA \cap B = A \cap clB = \varnothing$.

Предложение 8. *Пусть F_σ-подотображения $f|_A: A \to Y$ и $f|_B: B \to Y$ σ-нормального отображения $f: X \to Y$ таковы, что множества A и B отделенные. Тогда, множества A и B f-отделимы.*

В частности, если отображение $f: X \to Y$ σ-преднормально, и A и B отделенные F_σ-подмножества X, то они f-отделимы.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $y \in Y$, найдется такая её окрестность $\mathcal{O}_1$, что $(f|_A)^{-1}\mathcal{O}_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$, где F_j замкнутые в $f^{-1}\mathcal{O}_1$ множества для $j = \overline{1,\infty}$. Поскольку множества A и B отделенные, то $A \cap cl_X B = \varnothing$, следовательно,

$F_j \cap cl_X B \cap f^{-1}\mathcal{O}_1 = \varnothing$, для всех $j = \overline{1,\infty}$. Из σ-преднормальности отображения f следует, что существуют её окрестность $\mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O}_1$ и счетная система $\{\mathcal{O}_j^1\}_{j=1}^{\infty}$ открытых в $f^{-1}\mathcal{O}^1$ множеств такие, что $F_j \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 \subset \mathcal{O}_j^1$ и $cl_{f^{-1}\mathcal{O}^1}(\mathcal{O}_j^1) \cap cl_X B = \varnothing$ для всех $j = \overline{1,\infty}$. Очевидно, что $A \cap f^{-1}\mathcal{O}^1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j^1$.

Аналогичным образом находится окрестность $\mathcal{O}^2$ точки y и счетная система $\{\mathcal{O}_j^2\}_{j=1}^{\infty}$ открытых в $f^{-1}\mathcal{O}^2$ множеств такие, что $B \cap f^{-1}\mathcal{O}^2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_j^2$ и $cl_{f^{-1}\mathcal{O}^2}(\mathcal{O}_j^2) \cap cl_X A = \varnothing$ для всех $j = \overline{1,\infty}$. Из леммы 7 следует, что для множеств A и B найдутся такие открытые в $f^{-1}(\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2)$ множества V_1 и V_2, что $A \cap f^{-1}(\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2) \subset V_1$, $B \cap f^{-1}(\mathcal{O}^1 \cap \mathcal{O}^2) \subset V_2$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. □

§ 3 Совершенная нормальность отображения

Определение 8. Нормальное отображение $f: X \to Y$ назовем *co-совершенно нормальным* (соответственно *$coim$-совершенно нормальным*) если любое его открытое подотображение $f|_{\mathcal{O}}$ (соответственно $f||_{\mathcal{O}}$), $\mathcal{O} \in \tau_X$, имеет тип F_σ.

Следующий пример показывает различие между послойным случаем (рассматриваются прообразы точек) и случаем, когда рассматриваются “трубки” (прообразы окрестностей точек).

Пример 2. Рассмотрим квадрат прямой Зоргенфрея $K \times K$ и отображение проектирования $p: K \times K \to K$. Тотальное пространство $K \times K$ не нормально [3, пример 2.3.12] и, следовательно, не совершенно нормально. Отображение p послойно совершенно нормально, поскольку, для любой точки $y \in K$ слой $p^{-1}y = K$ совершенно нормален. Само отображение p не преднормально, поскольку, для замкнутых множеств $F = \{(q, -q): q \in \mathbb{Q}\}$ *и* $T = \{(r, -r): r \in \mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$ и для любой окрестности $\mathcal{O}y \subset K$ точки $y \in K$, трубка $p^{-1}\mathcal{O}y$ будет содержать открыто-замкнутое подмножество $[z, z') \times [-z', -z)$ для $z, z' \in \mathcal{O}y$, $z < z'$, гомеоморфное $K \times K$, в котором замкнутые множества $F \cap ([z, z') \times [-z', -z))$ и $T \cap ([z, z') \times [-z', -z))$ не отделимы окрестностями. Значит p не преднормально. Таким образом отображение p послойно совершенно нормально, но не $co(coim)$-совершенно нормально.

Из предложения 1 (b) имеем.

Предложение 9. *Любое co-совершенно нормальное отображение $coim$-совершенно нормально.* □

Предложение 10. *Любое отображение $f: X \to Y$ совершенно нормального пространства co-совершенно нормально.*

В частности, любое нормальное отображение совершенного пространства X (любое открытое подмножество является F_σ-подмножеством X) co-совершенно нормально.

Доказательство. Из совершенной нормальности пространства X следует его наследственная нормальность, тогда из [5, предложение 8] отображение f *co*-наследственно нормально. Рассмотрим произвольное множество $O \in \tau_X$. Из совершенной нормальности пространства X следует, что $O = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — замкнутые в X множества.

Для произвольной точки $y \in Y$, и её окрестность $\mathcal{O}y = Y$ получаем следующее

$$(f|_O)^{-1}\mathcal{O}y = O \cap f^{-1}\mathcal{O}y = O = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

где множества F_i замкнуты в $X = f^{-1}\mathcal{O}y$. То есть, произвольное открытое подотображение $f|_O$ имеет тип F_σ. □

Пример 3 (*co*-совершенно нормальное отображение не совершенно нормального пространства). Рассмотрим плоскость Тихонова $T = ([0, \omega_1] \times [0, \omega_0])\backslash\{(\omega_1, \omega_0)\}$, где ω_0 — начальный ординал мощности $\aleph_0$, *а* ω_1 — наименьший несчетный ординал. Она не является нормальным пространством [3] и, следовательно, не является совершенно нормальным пространством. Тождественное отображение $id: T \to T$ нормально [5, пример 3], и каждая точка $y \in T$ имеет окрестность, являющуюся F_σ-

множеством, значит это отображение со-совершенно нормально.

Предложение 11. *Для постоянного отображения $f: X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

отображение f c-совершенно нормально,

отображение f coi-совершенно нормально,

пространство X — совершенно нормально.

Доказательство. Из (a) по предложению 9 следует (b). Из (c) по предложению 10 следует (a). Рассмотрим постоянное $coim$-совершенно нормальное отображение $f: X \to Y$, $f(X) = \{y\} \in Y$ и произвольное открытое в X подмножество O. Из [5, пример 2] следует нормальность пространства X. Для подотображения $f||_O: O \to f(O) = y$ из (b) имеем $(f||_O)^{-1}y = O \cap f^{-1}y = O = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где множества F_i замкнуты в $f^{-1}y = X$. То есть, пространство X совершенно нормально и справедливо (c). □

Пример 4 (Постоянное, *co-(coim-)*наследственно нормальное, но не *co-(coim-)* совершенно нормальное отображение). Рассмотрим пространство $W = [0, \omega_1]$ ординалов меньших или равных первому несчетному ординалу ω_1 в топологии линейного порядка (с предбазой $[0, x)$ *и* $(y, \omega_1]$, где $0 < x \leq \omega_1$, $0 \leq y < \omega_1$). Пространство W наследственно нормально, но не совершенно нормально [3, пример 3.1.27]. Рассматривая отображение $f: W \to \{y\} = Y$ в одноточечное пространство заключаем, что отображение f co-наследственно нормально [5, пример 5], но, согласно предложению 11, не $coim$-совершенно нормально.

Предложение 12. *Любое тождественное отображение $coim$-совершенно нормально.*

В частности, любое тождественное отображение совершенного пространства co-совершенно нормально.

Доказательство. Рассмотрим тождественное отображение $id: X \to X$ пространства X и подотображение $id||_O$, для произвольного $O \in \tau_X$. Для произвольной точки $x \in id(O) = O$ рассмотрим её окрестность O. Тогда, $(id||_O)^{-1}O = O$. Так как множество O замкнуто в себе, то подотображение $id||_O$ имеет тип F_σ. Тогда, из нормальности любого тождественного отображения [5, пример 3] следует, что тождественное отображение $coim$-совершенно нормально. □

В следующих двух примерах строятся тождественные, $coim$-, но не co-совершенно нормальные отображения, и показано, что $coim$-совершенная нормальность отображения не влечет co-наследственную нормальность отображения, поскольку $coim$-совершенно нормальное отображение может как быть co-наследственно нормальным, так не быть таковым. С другой стороны, co-наследственная нормальность отображения не влечет $coim$-совершенную нормальность отображения (пример 4).

Пример 5 (*coim*-, но не *co*-совершенно нормальное, *coim*-, но не *co*-наследственно нормальное тождественное отображение). Рассмотрим тождественное отображение $id: \beta T \to \beta T$ компактификации плоскости Тихонова T. В [5, пример 7] доказана его $coim$-наследственная нормальность, не co-наследственная нормальность. По предложению 12 отображение $coim$-совершенно нормально. Рассмотрим открытое подотображение $id|_T: T \to \beta T$. Для любой окрестности Oy точки $y = (\omega_0, \omega_1)$ прообраз $(id|_T)^{-1}Oy = T \cap Oy$ не является F_σ-подмножеством $id^{-1}Oy$ (поскольку замкнутое в $id^{-1}Oy$ подмножество (ω_0, ω_1) не является G_δ-подмножеством в $id^{-1}Oy$). Значит, отображение $id: \beta T \to \beta T$ не co-совершенно нормально.

Пример 6 (*coim*-, но не *co*-совершенно нормальное, *co-(coim-)*наследстенно нормальное, тождественное отображение). Рассмотрим александровскую компактификацию $\alpha D = D \cup \xi$ несчетного дискретного пространства D. Она наследственно нормальна, но не совершенно нормальна [3, пример 1.1.8. и стр. 85, 115] поскольку открытое подмножество D не является F_σ-подмножеством βD.

Тождественное отображение $id: \alpha D \to \alpha D$ co-наследственно нормально [5, предложение 8] и $coim$-совершенно нормально по предложению 12. Рассмотрим несчетное открытое в αD подмножество $O = D$, не содержащее ξ. Для произвольной окрестности $U \subset \alpha D$ точки ξ и открытого подотображения $id|_O: O \to \alpha D$ получаем, что $(id|_O)^{-1}U = O \cap id^{-1}U = O \cap U = U'$. Множество U' несчетно, не является F_σ-подмножеством $id^{-1}U = U$, которое гомеоморфно αD, поскольку замкнутые подмножества U' могут быть только конечными. Значит, отображение $id: \alpha D \to \alpha D$ не co-совершенно нормально.

Вопрос 2. Следует ли из c-(соответственно $coim$-) совершенной нормальности отображения его co-(соответственно $coim$-)наследственная нормальность?

Следует ли из co-совершенной нормальности тождественного отображения его co-наследственная нормальность?

Определение 9. σ-нормальное отображение $f: X \to Y$ называется *co-σ-совершенно нормальным отображением*, если любое его открытое подотображение $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ имеет тип F_σ.

σ-нормальное отображение $f: X \to Y$ называется *coim-σ-совершенно нормальным отображением*, если любое его открытое подотображение $f||_{X_0}: X_0 \to f(X_0)$ имеет тип F_σ.

Предложение 13. $(\boldsymbol{a})$ Любое co-σ-совершенно нормальное отображение — $coim$-σ-совершенно нормально.

$(\boldsymbol{b})$ Любое отображение $f: X \to Y$ совершенно нормального пространства co-σ-совершенно нормально.

$(\boldsymbol{c})$ Любое $co(coim)$- σ-совершенно нормальное отображение является $co(coim)$-совершенно нормальным.

Доказательство. Из предложения 1 (b) следует (a).

Так как любое совершенно нормальное пространство наследственно нормально, то из предложения 5 следует, что отображение f — σ-нормально. Из совершенной нормальности пространства X и предложения 10 следует что отображение f co-совершенно нормально, значит всякое открытое подотображение $f|_{X_0}: X_0 \to Y$ имеет тип F_σ, то есть справедливо (b).

Поскольку, любое σ-нормальное отображение нормально (по замечанию 1), то справедливо (c). □

Теорема 14. *Любое co-σ-совершенно нормальное отображение $f: X \to Y$ co-наследственно нормально.*

Любое F_σ-подотображение co-σ-совершенно нормального отображения является co-σ-совершенно нормальным.

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что всякое открытое подотображение $f|_O: O \to Y$ co-σ-совершенно нормального отображения σ-нормально и, следовательно, преднормально. Тогда, из того, что отображение co-наследственно нормально тогда и только тогда, когда каждое его открытое подотображение (в смысле сужения на прообраз) преднормально [5, предложение 7] следует, что всякое co-σ-совершенно нормальное отображение co-наследственно нормально.

По предложению 3 любое открытое подотображение отображения $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ. Оно σ-нормально по теореме 6. □

Вопрос 3. Является ли $coim$-σ-совершенно нормальное отображение $f: X \to Y$ $coim$-наследственно нормальным?

Пример 7. (Тождественное coim-σ-, но не co-σ-совершенно нормальное отображение). A. Отображение $id: \beta T \to \beta T$ компактификации плоскости Тихонова T из примера 5 не co-σ-совершенно нормально по теореме 14. Так как для любого открытого множества $\mathcal{O} \subset \tau_{\beta T}$, если точка $y \in \mathcal{O}$, то существует её нормальная окрестность $\mathcal{O}y \subset \mathcal{O}$ и σ-преднормальность отображения $id||_{\mathcal{O}y}$ следует из предложения 5. Значит отображение $id: \beta T \to \beta T$ $coim$-σ-совершенно нормально. Кроме того, в [5, пример 7] показано, что отображение $id\colon \beta T \to \beta T$ является $coim$-, но не co-наследственно нормальным.

B. Отображение $id\colon \alpha D \to \alpha D$ александровской компактификации $\alpha D = D \cup \xi$ несчетного дискретного пространства D из примера 6 $coim$-σ-совершенно нормально по соображениям аналогичным пункту А. Оно не co-σ-совершенно нормально по предложению 13 (c). При этом оно co-наследственно нормально.

Используя предложение 3, получаем следствие теоремы 14.

Следствие 15. *Если отображение co-σ-совершенно нормально, то всякое его подотображение co-совершенно нормально.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное подотображение $f|_{X_0}$ произвольного co-σ- совершенно нормального отображения f. Тогда, из предложения 3 следует, что всякое открытое подотображение $f|_O$ отображения $f|_{X_0}$ имеет тип F_σ. По теореме 14 подотображение $f|_{X_0}$ — нормально. Значит, подотображение $f|_{X_0}$ — co-совершенно нормально. □

Список цитируемых источников:

1. Пасынков Б.А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств //Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. 72–102.
2. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Мир, 1973.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
4. Мусаев Д. К., Пасынков Б. А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. Ташкент: АН Республики Узбекистан, 1994.
5. Лисеев М. Ю. О свойствах (наследственно) нормальных отображений //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., Сдана в печать, 2020.
6. Лисеев М.Ю. Сохранение свойств отображений типа нормальности замкнутыми map-морфизмами //Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2019. № 6. 61–64.

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению №075-15-2019-1621