УДК. 515.123 DOI:10.35803/1694-5298.2021.3.434-438

АБЛАБЕКОВА Ч. А.
[1]КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика

ABLABEKOVA CH. A.
[1]KSUCTA n.a. N. Isanov, Bishkek, *Kyrgyz Republic*
achacha@mail.ru

О ПЕРИСТЫХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ON PEROUS UNIFORM SPACES

Бул макалада канатчалуу мейкиндиктердин аныктамасы жана τ - канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктердин шартары киргизилген. Бир калыпта τ - канатчалуу бир калыптуу мейкиндиктердин мунөздомосу жана бул классында бир калыптуу мейкиндиктердин τ - канатчасы бар экени далилденет.

Өзөк сөздөр: *калыптуу мейкиндиктер, τ - канатчалуу мейкиндиктер, бир калыптуу мейкиндиктердин τ - канатчасы.*

В данной работе вводятся определение перистых пространств и условия τ - перистых равномерных пространств. Устанавливается их характеристики и доказывается, что в этом классе равномерные пространства имеют равномерное τ - оперение.

Ключевые слова: *равномерные пространства, τ - перистые пространства, равномерное τ - оперение.*

In this article introduced the concept of cirrus spaces and the conditions of cirrus τ - pluming uniform spaces. There are their characteristics eestablished and proved that in this class uniform spaces have uniform τ - plumage.

Key words: *uniform spaces, τ - pluming uniform spaces, uniform τ - plumage.*

Введение. Класс перистых пространств изучался А. В. Архангельским [1]. Им перистое пространство определено как пространство, которое содержит в себе класс всех метрических и всех локально бикомпактных пространств. В теории топологических пространств изучение класса перистых пространств имеет большую значимость.

А. А. Борубаевым [2], [3] определены равномерно τ - перистые и равномерно τ - полные по Чеху равномерные пространства, топология которых при $\tau=\aleph_0$ дает перистую паракомпактность и полную по Чеху паракомпактность.

Основная часть. Пусть X — подпространство пространства Y, A — множество, и для каждого $a \in A$ задано семейство γ_α открытых в Y множеств, покрывающее $X: X \subset \bigcup \gamma_\alpha \subset Y$.

Семейство $\{\gamma_\alpha : \alpha \in A\}$ называется оперением пространства X в пространстве Y, если для каждой точки $x \in X$, $\bigcap_{\alpha \in A} \mathrm{St}_{\gamma_\alpha}(x) \subset X$.

Тихоновское пространство X называется перистым, или *p-пространством*, если оно обладает счетным оперением в каком-нибудь своем компактном хаусдорфовом расширении. Можно показать, что если пространство обладает счетным оперением в каком-нибудь компактном хаусдорфовом расширении, то оно обладает счетным оперением и в любом своем компактном хаусдорфовом расширении [1].

Определение 1 [2]. Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ называется ***равномерно τ - перистым***, если существует такая псевдоравномерность $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, что выполнены следующие свойства:

1) вес $w(\mathcal{V}) \le \tau$;

2) $\cap\{v(x): v \in \mathcal{V}\} = B_x$ - бикомпакт в X для любой точки $x \in X$;

3) Система $\{v(B_x): v \in \mathcal{V}\}$ - база окрестностей бикомпакта B_x в X для любой точки $x \in X$.

В случае, когда $\tau = \aleph_0$ равномерно $\aleph_0$- перистые пространства называются **равномерно перистыми равномерными пространствами.**

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ база равномерность $\mathcal{V}$, состоящая из открытых равномерных покрытий. Для любого $\beta \in \mathcal{B}$ положим $\beta^{\#} = f^{\#}(\beta)$ $\left\{f^{\#}(B): B \in \beta\right\}$ и $\mathcal{B}^{\#} = \left\{\beta^{\#}: B \in \beta\right\}$.

Определение 2. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется **сильно равномерно** τ **- перистым**, если существует такая псевдоравномерность $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, что выполнены следующие условия:

1^0. $w(\mathcal{V}) \le \tau$

2^0. $\cap\{\alpha((x): \alpha \in \mathcal{V}\} = B_x$ - бикомпакт для любого $x \in X$

3^0.Семейство $\{\alpha(B_x): \alpha \in \mathcal{V}\}$ образует базу окрестностей бикомпакта B_x в $(X, \tau_{\mathcal{U}})$

4^0.$\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_p, \mathcal{V}\}$, т.е. равномерность $\mathcal{U}$ есть верхняя грань равномерности $\mathcal{U}_p$ псевдоравномерности $\mathcal{V}$.

Напомним [4], [2], если $\mathcal{W}$ и $\mathcal{V}$- псевдоравномерности, тогда семейство $\{\omega \wedge \beta : \omega \in \mathcal{W}, \beta \in \mathcal{V}\}$ образует базу псевдомерности $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{W}, \mathcal{V}\}$.

Теорема 3. Для равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ следующие условия равносильны:

/1/ $(X, \mathcal{U})$ сильно равномерно τ – перисто.

/2/ $(X, \mathcal{U})$ равномерно совершенно отображается на некоторое равномерное пространство веса $\le \tau$.

/3/ $(X, \mathcal{U})$ равномерно гомеоморфно и замкнуто вкладывается в произведение $(sX \times Z, s\mathcal{U} \times \mathcal{W})$, где $(sX, s\mathcal{U})$ Самуэловское бикомпакное расширение $(X, \mathcal{U})$ и $(Z, \mathcal{W})$ некоторое равномерное пространство весы $\le \tau$, т.е. $w(\mathcal{W}) \le \tau$.[6].

Доказательство: /1/$\Rightarrow$ /2/. Пусть $(X, \mathcal{U})$ - сильно равномерно τ – перисто и $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ псевдоравномерность, удовлетворяющая всем требованиям определения 2. Тогда для любых $x, y \in X, x \ne y$ либо $B_x \cap B_y = \varnothing$, либо $B_x \cap B_y \ne \varnothing$. Легко показать, что $B_x \cap B_y \ne \varnothing$ влечет $B_x \ne B_y$.Тогда имеем разбиение $Z = \{B_x : x \in X\}$ пространства X на попарно непересекающиеся бикомпакты B_x. Определим отображение $f : X \to Z$ по правилу $f^{-1}(z) = B_x$ для некоторого $x \in X$. Это отображение является сюръективным по определению. Пусть база $\mathcal{B}$ псевдоравномерности $\mathcal{V}$ и $|\mathcal{B}| \le \tau$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathcal{B}$ положим $\alpha^{\#} = \{f^{\#}(A): A \in \alpha\}$, где $f^{\#}(A) = Z \setminus f(X \setminus A)$. Пусть $z \in Z$ произвольная точка, тогда $f^{-1}(z) = B_x$ для некоторого $x \in X$. Пусть $\beta \in \mathcal{B}$ звездно вписано в α , тогда $x \in B_x$ $\beta(x) \subset A$ для некоторого $A \in \alpha$. Тогда $f(B_x) = y \in f^{\#}(A)$, т.е. семейство $\alpha^{\#}$ является покрытием множества Z .

Выполнение условий (1^0) – (3^0) определения 2 показывает, что система $\mathcal{B}^{\#}$ база некоторой равномерности $\mathcal{W}$ на Z при этом т.к. $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}^{\#}|$, то $w(\mathcal{W}) \le \tau$. Условие (4^0) показывает, что отображение $f : (X, \mathcal{U}) \to (Z, \mathcal{W})$ равномерно непрерывно. В силу условия 4^0 определения 2, для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{V}$ и конечное $\gamma \in \eta_p$ такие, что $\beta \wedge \gamma$

вписано в α.Тогда в силу условия (5), $f^{-1}(\beta^{\#})\wedge\gamma$ вписано в α. Это означает, что отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$ предкомпактно. По определению отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$, $f^{-1}(z)=B_x$ бикомпактно для любого $z\in Z$, следовательно
f - бикомпактное отображение. Покажем теперь замкнутость отображения $f:(X,\tau_n)\to(Z,\tau_w)$. Пусть $\mathcal{V}$ открыто в X и $f^{-1}(z)=B_x\subset U$. Тогда $B_x\cap F\neq\varnothing$ и $F=X\setminus U$ замкнуто в X, следовательно, существует такое $\alpha\in\mathcal{U}$, что $\alpha(B_x)\cap\alpha(F)=0$ [5]. Тогда $\alpha(B_x)\subset X\setminus\alpha(F)\subset X\setminus F=U$ или $\alpha(f^{-1}(y))\subset U$. По одному из критериев замкнутых отображений [6], последнее доказывает замкнутость отображения $f:(X,\tau_{\mathcal{U}})\to(Z,\tau_{\mathcal{W}})$. Итак отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$ является равномерно совершенным отображением $(X,\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Z,\mathcal{W})$ веса $w(\mathcal{W})\le\tau$.

/2/$\Rightarrow$/3/. Пусть равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно совершенно отображается на равномерное пространство $(Z,\mathcal{W})$ веса $w(\mathcal{W})\le\tau$ посредством отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$ и $(sX,s\mathcal{U})$- Самуэловское бикомпактное расширение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$. Тогда по одному из критериев равномерно совершенных отображений [5], равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно гомеоморфно замкнутому подпространству $(Gr,s\mathcal{U}\times\mathcal{W}\wedge Gr)$, где $Gr=\{(x,f(x)):x\in X\}\subseteq sX\times Z$ график отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$.

/3/$\Rightarrow$/2/. Пусть равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ замкнуто равномерно гомеоморфно вкладывается в произведение $(sX\times Z,s\mathcal{U}\times\mathcal{W})$. Тогда $f=\pi_Y|_X:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$ - равномерно совершенное отображение, как сужение равномерно совершенного отображения $\pi_Y:(sX\times Z,s\mathcal{U}\times\mathcal{W})\to(Z,\mathcal{W})$ на замкнутое подпространство $(X,\mathcal{U})$ [2], [4].

/2/$\Rightarrow$/1/. Пусть $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$ - равномерно совершенное отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ на равномерное пространство $(Z,\mathcal{W})$ веса $\le\tau$, т.е. $w(\mathcal{W})\le\tau$. Тогда семейство $\mathcal{B}=\{f^{-1}(\omega):\omega\in\mathcal{W}\}$ база некоторой псевдоравномерности $\mathcal{V}$ в $\mathcal{U}$. Тогда имеем в силу предкомпактности отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(Z,\mathcal{W})$, для любого $\alpha\in\mathcal{U}$ существуют $\omega\in\mathcal{W}$ и конечное $\gamma\in\mathcal{U}_p$ такие, что $f^{-1}(\omega)\wedge\gamma$ вписано в α. Но $\beta=f^{-1}(\omega)\in\mathcal{V}$, следовательно, $\beta\wedge\gamma$, вписано в α. Это означает, что $\mathcal{U}=\sup\{\mathcal{U}_p,\mathcal{V}\}$, т.е. равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ является сильно равномерно τ - перистым. *Теорема доказана*

Теорема 4. Тихоновское произведение счетного множества перистых пространств является перистым пространством.

Ограничимся доказательством для случая вполне регулярных сомножителей. **Доказательство**. Предположим, что $X_i, i=1,2,...,\infty,$ — перистые пространства, βX_i — их чеховские расширения $\varphi_i=\{\gamma_i^j, j=1,2,...,\infty\}$, $\gamma_i^j=\{\cup_{i,\alpha}^j,\alpha\in M_{i,j}\}$— их оперения в βX_i Покажем, что тогда пространство X = $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$, обладает оперением в $bX=\prod_{i=1}^{\infty}\beta X_i$ где bX как следует из теоремы Тихонова,— бикомпактное расширение пространства X.

В самом деле, обозначим через $\lambda^{j,k}$ при произвольно фиксированных j и k совокупность всех множеств, представляющихся в виде произведения каких либо элементов, взятых по одному из каждого γ_i^j для которого $i\le k$, на все βX_i, удовлетворяющие условию $i>k$.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Очевидно, каждое $\lambda^{j,k}$ является открытым в bX покрытием множества X. Совокупность ψ этих покрытий, отвечающих всевозможным различным парам целых чисел *j* и *k*, счетна.

Пусть точки $x \in X$ и $x^{/} \in bX \setminus X$ выбраны произвольно. Подбирам *j* и *k*, чтобы выполнялось соотношение $\lambda^{j,k} x \not\subset x^{/}$. Но так как $x^{/} = \{x_i^{/}\} \in \prod_{i=1}^{\infty} \beta X_i \setminus \prod_{i=1}^{\infty} X_i$, то для некоторого значения *i = i′* будет $x_i^{/} \in \beta X_i \setminus \mathrm{X}_i$. Так как $\varphi_i = \{\gamma_i^j, j = 1,2,...,\infty\}$ — оперение X_i в βX_i -', то для некоторого *j =j/* будет выполняться соотношение $\gamma_{i^/}^{j^/} x_{i^/} \not\subset x_{i^/}^{/}$, где $\{xi\} = x \in X$. Но тогда, как вытекает из определения систем $\lambda^{j,k}$, $\lambda^{j,i'} x \subseteq \prod_{i=i^/} \gamma_i^{j^/} x \times \prod_{i=i'} \beta X_i \subseteq bX \setminus x'$.

Теорема доказана.

Теорема 5. Равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ **равномерно τ - перисто** тогда и только тогда, когда X имеет равномерное τ - оперение в βX.

Доказательство. Пусть $(X, \mathscr{U})$ - равномерно τ - перистое равномерное пространство и $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ - псевдоравномерность, удовлетворяющая условиям определения 2. Для каждого $\alpha \in \mathscr{V}$ положим $Ex\alpha = \{ExA : A \in \alpha\}$, где $ExA = \beta X \setminus [X \setminus A]_{\beta X}$ наибольшее открытое множество в βX, высекающее из X множество A ([31]). Так как $|\mathscr{V}| \le \tau$, то $|Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{V}| \le \tau$ и $Ex\alpha \wedge x = \alpha$ для любого $\alpha \in \mathscr{V}$. Следовательно, система $\{Ex\alpha : \alpha \in \mathscr{V}\}$ является равномерным τ - оперением X в βX.

Для доказательства обратного утверждения используем лемму 4.

Пусть равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ имеет в Стоун – Чеховской бикомпактификации βX равномерное τ - оперение $\mathscr{P}$. Тогда $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathscr{P}\} \subset \mathscr{U}$, $\bigcap\{\alpha(x) : \alpha \in \mathscr{P}\} = B_x$ - бикомпактно в X для любой точки $x \in X$ и $|\mathscr{P}| \le \tau$. Пусть $\mathscr{V}$ псевдоравномерность, порожденная семейством равномерных покрытий $\{\alpha \wedge X : \alpha \in \mathscr{P}\}$. Тогда $w|\mathscr{V}| \le \tau$, $K_x = \bigcap\{\beta(x) : \beta \in \mathscr{V}\} \subset B_x$ для любой точки $x \in X$ и K_x - замкнуто относительно топологии $\tau_{\mathscr{V}}$, порожденной псевдоравномер-ностью $\mathscr{V}$. Так как $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$, то $\tau_{\mathscr{V}} \subset \tau_{\mathscr{U}}$. Следовательно, K_x - замкнуто в B_x и является бикомпактом. Теперь мы находимся в условиях леммы 4. Тогда семейство $\{\beta(K_x) : \beta \in \mathscr{V}\}$ - база фильтра открытых окрестностей бикомпакта K_x в X для любой точки $x \in X$. Это означает, что псевдоравномерность $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}$ удовлетворяет всем требованиям определения 2., т. е. равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ является равномерно τ - перистым. *Теорема доказана.*

Выводы и результаты исследования. В исследовании были введены понятия оперение пространства, равномерно τ - перистого пространства. Доказывается условия равномерного пространства, когда тихоновское пространство является перистым пространством и когда равномерное пространство имеет равномерное τ - оперение.

Список литературы

1. Архангельский А. В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства [Текст] / А.В.Архангельский // Мат. Сб.- 1965. – Т.97.- № 31.- С. 55-85.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А.Борубаев. – Фрунзе: Илим, 1990. – 171 с.

3. Борубаев А.А. Равномерная топология [Текст] / А.А.Борубаев. – Бишкек: Илим, 2013. – С. 338.

4. Wilhelm M. Criteria of openness relations, Fund, Math.Y.124, 1981,P.219-228.

5. Энгелькинг Р. Общая топология [Текст] / Р.Энгелькинг. – М.: Мир, 1986.

6. Аблабекова Ч. А. Об усилении равномерно перистых равномерных пространств [Текст] / Ч.А.Аблабекова // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2014. - № 1. – с. 113-117.

7. Акерова Дж.А. Исследование дифференциальных уравнений с управлением [Текст] / Дж. А. Акерова, Э.Кененбаев, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с.448-454.

8. Кененбаев Э. Применение функциональных соотношений к моделированию посредством дифференциальных уравнений [Текст] / Э. Кенебаев, Дж. А. Акерова, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с. 454-459.