



АБЛАБЕКОВА Ч. А.

¹КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика

ABLABEKOVA CH. A.

¹KSUCTA n.a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО С РАВНОМЕРНЫМ АБСОЛЮТОМ

UNIFORM SPACE WITH UNIFORM ABSOLUTE

Берилген иште бир калыптуу мейкиндиктин абсолют түшүнүгү киргизилген, топологиялык абсолюттар жөнүндөгү кээ бир жыйынтыктар бир калыптуу учурга жалпыланган жана өткөрүлгөн»;

Өзөк сөздөр: бир калыптуу мейкиндиктер, абсолют, бир калыптуу абсолют.

В данной статье вводится понятие абсолюта равномерного пространства, обобщаются и переносятся некоторые результаты о топологических абсолютах на равномерный случай.

Ключевые слова: равномерные пространства, абсолют, равномерный абсолют .

In this article introduced the concept of the absolute in uniform space, and some results on topological absolutes are generalized and carried over to the uniform case.

Key words: uniform spaces, absolute, uniform absolute.

Введение. В теории топологических пространств изучение абсолютов имеет большую значимость. В книгах /1/, /2/ определены равномерные пространства, в частности, описание равномерности \mathcal{U} абсолюта \dot{X} тихоновского пространства X равномерного пространства (X, \mathcal{U}) .

Назовем равномерное пространство $\dot{\mu}X$ абсолютом равномерного пространства μX , если существует неприводимое u -совершенное отображение $h: \dot{\mu}X \rightarrow \mu X$ и всякое неприводимое u -совершенное отображение $g: wZ \rightarrow \dot{\mu}X$ является (равномерным) изоморфизмом, Равномерность $\dot{\mu}$ назовем абсолютом равномерности μ .

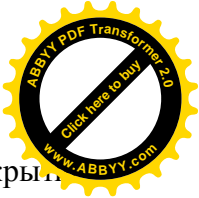
ТЕОРЕМА. У всякого равномерного пространства существует единственный с точностью до изоморфизма абсолют /1/.

Основная часть. Тихоновское пространство X с равномерностью \mathcal{U} на нем будет, для краткости, обозначаться как (X, \mathcal{U}) . Итак, запись (X, \mathcal{U}) - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$ называется равномерным покрытием.

Среди всех равномерностей на тихоновском пространстве X , порождающих тихоновскую топологию пространства X существует сильнейшая равномерность, которая называется тонкой (fine) равномерностью и обозначается с индексом f , т.е. \mathcal{U}_f - тонкая равномерность на X /1/.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тихоновское пространство X называется сильно коллективно нормальным, если тонкая равномерность \mathcal{U}_f на X состоит из всех окрестностей диагонали /2/.

Пусть X - тихоновское пространство, α и β – покрытия X , т.е. α и β такие семейства подмножеств в X , что $\cup \alpha = \cup \beta = X$. Говорят, что покрытие α вписано в покрытие β , если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$ и часто пишут



$\alpha \succ \beta$. Внутренним пересечением $\alpha \wedge \beta$ покрытий α и β называется покрытие $\{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$, т.е. $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$. Пусть $Y \subset X$ и α - покрытие. Множество $\alpha(Y) = \cup \{A \in \alpha : A \cap Y \neq \emptyset\}$ называется звездой множества Y относительно покрытия α . Если $Y = \{x\}$, то $\alpha(x)$ звезда точки $x \in X$ относительно покрытия α . Говорят, что покрытие α звездно вписано в покрытие β , если для любого $x \in X$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(x) \subset B$ и покрытие α сильно звездно вписано в покрытие β , если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(A) \subset B$. Покрытие α (сильно) звездно вписано в покрытие β обозначается для краткости как $(\alpha^* \succ \beta)$ $\alpha \succ \beta$.

Последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ покрытий X называется нормальной, если $\alpha_{n+1}^* \succ \alpha_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и покрытие α называется нормальным, если существует нормальная последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $\alpha_1^* \succ \alpha$.

Если равномерное пространство (X, \mathcal{U}) задано в терминах равномерных покрытий, то полагая для любого $\alpha \in \mathcal{U}$, $V_\alpha = \cup \{A \times A : \alpha \in \mathcal{U}\}$ получим некоторую окрестность диагонали $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ система $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{U}\}$.

Если равномерное пространство (X, \mathcal{U}) задано в терминах окружений диагонали, то для $V \in \mathcal{U}$ и любого $x \in X$ определен срез $V[x] = \{y : (x, y) \in V\}$ окружения V по точке x и система $\alpha_V = \{V(x) : x \in X\}$ покрытие X . Семейство $\{\alpha_V : V \in \mathcal{U}\}$ образует базу равномерности на X в терминах равномерных покрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство \mathcal{U} покрытий тихоновского пространства X называется равномерностью на X , если выполняются условия:

- I. Если $\alpha \in \mathcal{U}$ и α вписано в некоторое покрытие γ , то $\gamma \in \mathcal{U}$.
- II. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ существует такое $\gamma \in \mathcal{U}$, что γ вписано в $\alpha \wedge \beta$.
- III. Для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{U}$, сильно звездно вписанное в α .
- IV. Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathcal{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y .

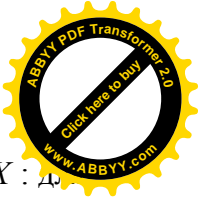
Тихоновское пространство X с равномерностью \mathcal{U} на нем будет, для краткости, обозначаться как (X, \mathcal{U}) . Итак, запись (X, \mathcal{U}) - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$ называется равномерным покрытием.

Если семейство покрытий \mathcal{U} на множестве X удовлетворяет аксиомам I – III определения 2., то \mathcal{U} называется псевдоравномерностью, а (X, \mathcal{U}) - псевдоравномерным пространством.

Семейство $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ называется базой равномерности (псевдоравномерности) \mathcal{U} , если для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{B}$ такое, что $\beta \succ \alpha$. Наименьшее из кардинальных чисел $|\mathcal{B}|$, где $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ база равномерности (псевдоравномерности) \mathcal{U} называется весом равномерности (псевдоравномерности) \mathcal{U} и обозначается $w(\mathcal{U})$, $w(\mathcal{U}) = \min \{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ база } \mathcal{U}\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство \mathcal{B} покрытий образует базу некоторой равномерности \mathcal{U} на X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (B1) Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ существует такое $\gamma \in \mathcal{B}$ такое, что $\gamma \succ \alpha \wedge \beta$.
- (B2) Для любого $\alpha \in \mathcal{B}$ существует $\beta \in \mathcal{B}$ такое, что $\beta^* \succ \alpha$.
- (B3) $\cap \{\beta(x) : \beta \in \mathcal{B}\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.



ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой равномерности \mathcal{U} на X семейство $\tau_u = \{O \subset X : \text{для каждого } x \in O \text{ существует такое } \alpha \in \mathcal{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset O\}$ есть тихоновская топология пространства X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Внутренность $\langle A \rangle$ множества $A \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью \mathcal{U} определяется как: $\langle A \rangle = \{x \in X : \text{существует такое } \alpha \in \mathcal{U}, \text{ что } \alpha(x) \subset A\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для каждой точки $x \in X$ и каждого равномерного покрытия $\alpha \in \mathcal{U}$ множество $\langle \alpha(x) \rangle$ - открытая окрестность точки x относительно топологии τ_u .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Замыкание \bar{A} или $[A]_X$ множества $A \subset X$ относительно топологии индуцированной равномерностью \mathcal{U} на X определяется как $\bar{A} = [A]_X = \{x \in X : \alpha(x) \cap A \neq \emptyset \text{ для любого } \alpha \in \mathcal{U}\}$ или $\bar{A} = [A]_X \cap \{x \in X : \exists \alpha \in \mathcal{U}, \alpha(x) \cap A \neq \emptyset\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Фильтр \mathcal{F} называется фильтром Коши в равномерном пространстве (X, \mathcal{U}) , если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathcal{U}$.

Точками абсолюта \dot{X} тихоновского пространства X согласно С. Илиадису [5], являются ультрафильтры из открытых в X множеств, сходящихся к точкам пространства X . Таким образом, $p \in \dot{X}$ тогда и только тогда, когда существует такая точка $x \in X$, что $\mathcal{B}(x) \subset p$, где $\mathcal{B}(x)$ - фильтр открытых окрестностей точки $x \in X$.

Для любого открытого $U \subset X$ объявляются открытыми на \dot{X} множества $\hat{U} = \{p \in \dot{X} : U \in p\}$, которые образуют базу топологии \dot{X} , относительно которой \dot{X} является экстремально несвязным пространством.

Каждой точке $x \in X$ соответствует ультрафильтр $p \in \dot{X}$, который содержит фильтр открытых окрестностей $\mathcal{B}(x)$ точки x и определена естественная проекция $\pi_x : \dot{X} \rightarrow X$ таким образом, что $\pi_x^{-1}(x) = \{p \in \dot{X} : \mathcal{B}(x) \subset p\}$.

Естественная проекция $\pi_x : \dot{X} \rightarrow X$ является совершенным неприводимым отображением [5].

Равномерность \mathcal{U} обладает базой \mathcal{B} , состоящей из открытых равномерных покрытий [1], [4]. Для каждого $\alpha \in \mathcal{B}$ положим $\hat{\alpha} = \{A : A \in \alpha\}$. Тогда семейство $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\alpha} : \alpha \in \mathcal{B}\}$ образует базу некоторой псевдоравномерности $\hat{\mathcal{U}}$ на \dot{X} . Пусть $\hat{\mathcal{U}}_p$ - Стоун - Чеховская равномерность на \dot{X} . Положим $\hat{\mathcal{U}} = \sup\{\hat{\mathcal{U}}, \hat{\mathcal{U}}_p\}$. Тогда $\hat{\mathcal{U}}$ - равномерность абсолюта \dot{X} , причем естественная проекция $\pi_x : (\dot{X}, \hat{\mathcal{U}}) \rightarrow (X, \mathcal{U})$ является равномерно совершенным отображением.

Отметим некоторые свойства псевдоравномерности $\hat{\mathcal{U}}$ на \dot{X} . Положим $\pi_x^{-1}(x) = s(x)$ для любой точки $x \in X$. Отметим, что $s(x)$ - бикомпактно в \dot{X} для любой точки $x \in X$.

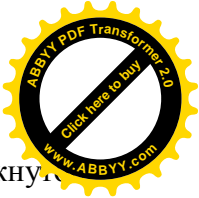
ЛЕММА 1. Для любого $p \in s(x)$ имеет место равенство

$$\bigcap \{\hat{\alpha}(p) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\} = s(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Имеет место равенство $\bigcap \{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\} = s(x)$.

ЛЕММА 2. Система $\{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathcal{B}}\}$ образует базу открытых окрестностей бикомпакта $s(x)$ в \dot{X} .

ТЕОРЕМА 1. Пусть равномерное пространство (X, \mathcal{U}) имеет равномерный вес $w(\mathcal{U}) \leq \tau$. Тогда $(\dot{X}, \hat{\mathcal{U}})$ является равномерно τ -перистым пространством.



ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно непрерывное замкнутое отображение равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) . Тогда для любого равномерного покрытия $\alpha \in \mathcal{U}$ и произвольного бикompакта $K \subseteq Y$ существует открытое равномерное покрытие $\beta_K \in \mathcal{V}$ такое, что $\alpha(f^{-1}(K)) \supseteq f^{-1}(\beta_K(K))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f : (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ равномерно непрерывное совершенное отображение равномерного пространства (X, \mathcal{U}) в равномерно τ -перистое равномерное пространство (Y, \mathcal{V}) . Тогда равномерное пространство (X, \mathcal{U}) также равномерно τ -перисто.

ТЕОРЕМА 3. Если равномерное пространство (X, \mathcal{U}) является равномерно τ -перистым пространством, тогда его абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ также является равномерно τ -перистым пространством.

Следующие определения являются переносом на псевдоравномерные пространства понятия индекса полноты равномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть (X, \mathcal{U}) псевдоравномерное пространство, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ - произвольная система псевдоравномерных покрытий. Фильтр \mathcal{F} в множестве X называется \mathcal{K} -фильтром Коши в (X, \mathcal{U}) , если $\alpha \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ для любого $\alpha \in \mathcal{K}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть (X, \mathcal{U}) псевдоравномерное пространство и $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$. Псевдоравномерное пространство (X, \mathcal{U}) называется \mathcal{K} -полным, а система \mathcal{K} называется полной, если всякий \mathcal{K} -фильтр Коши \mathcal{F} имеет по крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\bigcap \{F : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Индексом полноты $ic(\mathcal{U})$ псевдоравномерности \mathcal{U} псевдоравномерного пространства (X, \mathcal{U}) называется наименьшее кардинальное число τ такое, что существует \mathcal{K} -полная система $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{U}$ мощности τ , т.е. $|\mathcal{K}| = \tau$. Другими словами, $ic(\mathcal{U}) = \min \{ \tau : \mathcal{K} \subseteq \mathcal{U} \text{ и } \mathcal{K}\text{-полно}, |\mathcal{K}| \leq \tau \}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (X, \mathcal{U}) равномерное пространство и $\mathcal{U} = \sup \{ \mathcal{V}, \mathcal{W} \}$, где \mathcal{V} -некоторая псевдоравномерность в \mathcal{U} , а \mathcal{W} -некоторая предкомпактная равномерность в \mathcal{U} . Тогда $ic(\mathcal{U}) \leq \tau$ тогда и только тогда, когда $ic(\mathcal{V}) \leq \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ равномерного пространства (X, \mathcal{U}) является полным тогда и только тогда, когда $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ $\hat{\mathcal{U}}$ -полно.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть (X, \mathcal{U}) полное равномерное пространство и $w(\mathcal{U}) \leq \tau$. Тогда для абсолюта $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ выполняется $ic(w(\mathcal{U})) \leq \tau$.

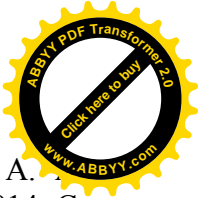
СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для равномерного пространства (X, \mathcal{U}) и его абсолюта $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$ выполнено равенство $ic(\mathcal{U}) = ic(\dot{\mathcal{U}})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Равномерное пространство (X, \mathcal{U}) равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда равномерно полным по Чеху является его абсолют $(\dot{X}, \dot{\mathcal{U}})$.

Выводы и результаты исследования. В исследовании были введены понятия абсолюта равномерного пространства. Доказывается характеристики и свойства абсолютов равномерного пространства. Установлена сильная равномерная полнота по Чеху равномерных абсолютов, в случае таковых самих равномерных пространств.

Список литературы

1. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А. Борубаев. - Фрунзе, Илим, 1990.- 171 с.
2. Келли, Дж. Л. Общая топология. [Текст] / Дж. Л. Келли. - 2-е изд.- М.: Наука, 1980.- 431 с.



3. Аблабекова, Ч. А. О перистности равномерных абсолютов. [Текст] / А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, выпуск 1 , Бишкек, 2014. С. 30-33
4. Боррес. On stratifiable spaces [Текст] / С.J.R. Borges // Pacific J. Math., 1966. – Vol. 17. – P. 1-16.
5. Илиадис, С.Д. Абсолюты хаусдорфовых пространств [Текст] / С.Д.Илиадис // ДАН СССР, 1963. - 149. - С. 22-25.
6. Акерова Дж.А. Исследование дифференциальных уравнений с управлением [Текст] / Дж. А. Акерова, Э.Кененбаев, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с.448-454.
7. Кененбаев Э. Применение функциональных соотношений к моделированию посредством дифференциальных уравнений [Текст] / Э. Кенебаев, Дж. А. Акерова, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с. 454-459.