УДК. 515.123. DOI:10.35803/1694-5298.2021.3.429-433

АБЛАБЕКОВА Ч. А.
[1]*КГУСТА им. Н. Исанова,* Бишкек, Кыргызская Республика

ABLABEKOVA CH. A.
[1]KSUCTA n.a. N. Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
achacha@mail.ru

РАВНОМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО С РАВНОМЕРНЫМ АБСОЛЮТОМ

UNIFORM SPACE WITH UNIFORM ABSOLUTE

Берилген иште бир калыптуу мейкиндиктин абсолют түшүнүгү киргизилген, топологиялык абсолюттар жөнүндөгү кээ бир жыйынтыктар бир калыптуу учурга жалпыланган жана өткөрүлгөн»;

Өзөк сөздөр: *бир калыптуу мейкиндиктер, абсолют, бир калыптуу абсолют.*

В данной статье вводится понятие абсолюта равномерного пространства, обобщаются и переносятся некоторые результаты о топологических абсолютах на равномерный случай.

Ключевые слова*: равномерные пространства, абсолют, равномерный абсолют .*

In this article introduced the concept of the absolute in uniform space, and some results on topological absolutes are generalized and carried over to the uniform case.

Key words*: uniform spaces, absolute, uniform absolute.*

Введение. В теории топологических пространств изучение абсолютов имеет большую значимость. В книгах /1/, /2/ определены равномерные пространства, в частности, описание равномерности $\dot{\mathscr{U}}$ абсолюта $\dot{X}$ тихоновского пространства X равномерного пространства $(X,\mathscr{U})$.

Назовем равномерное пространство $\dot{\mu}\dot{X}$ абсолютом равномерного пространства μX, если существует неприводимое u-совершенное отображение h: $\dot{\mu}\dot{X} \to \mu X$ и всякое неприводимое u-совершенное отображение g: $wZ \to \dot{\mu}\dot{X}$ является (равномерным) изоморфизмом, Равномерность $\dot{\mu}$ назовем абсолютом равномерности μ.

ТЕОРЕМА. У всякого равномерного пространства существует единственный с точностью до изоморфизма абсолют /1/.

Основная часть. Тихоновское пространство X с равномерностью $\mathscr{U}$ на нем будет, для краткости, обозначаться как $(X,\mathscr{U})$. Итак, запись $(X,\mathscr{U})$ - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$ называется равномерным покрытием.

Среди всех равномерностей на тихоновском пространстве X, порождающих тихоновскую топологию пространства X существует сильнейшая равномерность, которая называется тонкой (fine) равномерностью и обозначается с индексом f, т.е. $\mathscr{U}_f$ - тонкая равномерность на X /1/.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тихоновское пространство X называется сильно коллективно нормальным, если тонкая равномерность $\mathscr{U}_f$ на X состоит из всех окрестностей диагонали /2/.

Пусть X - тихоновское пространство, α и β – покрытия X, т.е. α и β такие семейства подмножеств в X, что $\cup\alpha = \cup\beta = X$. Говорят, что покрытие α вписано в покрытие β, если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $A \subset B$ и часто пишут

$\alpha \succ \beta$. Внутренним пересечением $\alpha \wedge \beta$ покрытий α и β называется покрытие $\{A \cap B : A \in \alpha,\ B \in \beta\}$, т.е. $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$. Пусть $Y \subset X$ и α - покрытие. Множество $\alpha(Y) = \cup\{A \in \alpha : A \cap Y \neq \varnothing\}$ называется звездой множества Y относительно покрытия α. Если $Y = \{x\}$, то $\alpha(x)$ звезда точки $x \in X$ относительно покрытия α. Говорят, что покрытие α звездно вписано в покрытие β, если для любого $x \in X$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(x) \subset B$ и покрытие α сильно звездно вписано в покрытие β, если для любого $A \in \alpha$ существует такое $B \in \beta$, что $\alpha(A) \subset B$. Покрытие α (сильно) звездно вписано в покрытие β обозначается для краткости как ($\alpha * \succ \beta$) $\alpha \triangleright\!\succ \beta$.

Последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ покрытий X называется нормальной, если $\alpha_{n+1} * \succ \alpha_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и покрытие α называется нормальным, если существует нормальная последовательность $\{\alpha_n : n \in \mathbf{N}\}$ такая, что $\alpha_1 * \succ \alpha$.

Если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ задано в терминах равномерных покрытий, то полагая для любого $\alpha \in \mathscr{U}$, $V_\alpha = \cup\{A \times A : \alpha \in \mathscr{U}\}$ получим некоторую окрестность диагонали Δ $\{(x,x) : x \in X\}$ система $\{V_\alpha : \alpha \in \mathscr{U}\}$.

Если равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ задано в терминах окружений диагонали, то для $V \in \mathscr{U}$ и любого $x \in X$ определен срез $V[x] = \{y : (x,y) \in V\}$ окружения V по точке x и система $\alpha_V \{V(x) : x \in X\}$ покрытие X. Семейство $\{\alpha_V : V \in \mathscr{U}\}$ образует базу равномерности на X в терминах равномерных покрытий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство $\mathscr{U}$ покрытий тихоновского пространства X называется равномерностью на X, если выполняются условия:

I. Если $\alpha \in \mathscr{U}$ и α вписано в некоторое покрытие γ, то $\gamma \in \mathscr{U}$.

II. Для любых $\alpha, \beta \in \mathscr{U}$ существует такое $\gamma \in \mathscr{U}$, что γ вписано в $\alpha \wedge \beta$.

III. Для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует $\beta \in \mathscr{U}$, сильно звездно вписанное в α.

IV. Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathscr{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y.

Тихоновское пространство X с равномерностью $\mathscr{U}$ на нем будет, для краткости, обозначаться как $(X, \mathscr{U})$. Итак, запись $(X, \mathscr{U})$ - равномерное пространство, а каждое покрытие $\alpha \in \mathscr{U}$ называется равномерным покрытием.

Если семейство покрытий $\mathscr{U}$ на множестве X удовлетворяет аксиомам I – III определения 2., то $\mathscr{U}$ называется псевдоравномерностью, а $(X, \mathscr{U})$ - псевдоравномерным пространством.

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ называется базой равномерности (псевдоравномерности) $\mathscr{U}$, если для любого $\alpha \in \mathscr{U}$ существует $\beta \in \mathscr{B}$ такое, что $\beta \succ \alpha$. Наименьшее из кардинальных чисел $|\mathscr{B}|$, где $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ база равномерности (псевдоравномерности) $\mathscr{U}$ называется весом равномерности (псевдоравномерности) $\mathscr{U}$ и обозначается $w(\mathscr{U})$, $w(\mathscr{U}) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B}$ база $\mathscr{U}\}$. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Семейство $\mathscr{B}$ покрытий образует базу некоторой равномерности $\mathscr{U}$ на X тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

(B1) Для любых $\alpha, \beta \in \mathscr{B}$ существует такое $\gamma \in \mathscr{B}$ такое, что $\gamma \succ \alpha \wedge \beta$.

(B2) Для любого $\alpha \in \mathscr{B}$ существует $\beta \in \mathscr{B}$ такое, что $\beta * \succ \alpha$.

(B3) $\cap\{\beta(x) : \beta \in \mathscr{B}\} = \{x\}$ для любой точки $x \in X$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любой равномерности $\mathscr{U}$ на X семейство $\tau_u = \{O \subset X :$ для каждого $x \in O$ существует такое $\alpha \in \mathscr{U}$, что $\alpha(x) \subset O\}$ есть тихоновская топология пространства X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Внутренность $\langle A \rangle$ множества $A \subset X$ относительно топологии, индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$ определяется как: $\langle A \rangle = \{x \in X :$ существует такое $\alpha \in U$, что $\alpha(x) \subset A\}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Для каждой точки $x \in X$ и каждого равномерного покрытия $\alpha \in \mathscr{U}$ множество $\langle \alpha(x) \rangle$ - открытая окрестность точки x относительно топологии τ_u.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Замыкание $\overline{A}$ или $[A]_X$ множества $A \subset X$ относительно топологии индуцированной равномерностью $\mathscr{U}$ на X определяется как $\overline{A} = [A]_X = \{x \in X : \alpha(x) \cap A \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathscr{U}\}$ или $\overline{A} = [A]_X = \cap\{\alpha(A) : \alpha \in \mathscr{U}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Фильтр $\mathscr{F}$ называется фильтром Коши в равномерном пространстве $(X, \mathscr{U})$, если $\alpha \cap \mathscr{F} \neq \varnothing$ для любого $\alpha \in \mathscr{U}$.

Точками абсолюта $\dot{X}$ тихоновского пространства X согласно С. Илиадису /5/, является ультрафильтры из открытых в X множеств, сходящихся к точкам пространства X. Таким образом, $p \in X$ тогда и только тогда, когда существует такая точка $x \in X$, что $\mathscr{B}(x) \subset p$, где $\mathscr{B}(x)$ - фильтр открытых окрестностей точки $x \in X$.

Для любого открытого $U \subset X$ объявляются открытыми на $\dot{X}$ множества $\hat{U} = \{p \in X : U \in p\}$, которые образуют базу топологии $\dot{X}$, относительно которой $\dot{X}$ является экстремально несвязным пространством.

Каждой точке $x \in X$ соответствует ультрафильтр $p \in X$, который содержит фильтр открытых окрестностей $\mathscr{B}(x)$ точки x и определена естественная проекция $\pi_X : \dot{X} \to X$ таким образом, что $\pi^{-1}(x) = \{p \in \dot{X} : \mathscr{B}(x) \subset p\}$.

Естественная проекция $\pi_X : \dot{X} \to X$ является совершенным неприводимым отображением /5/.

Равномерность $\mathscr{U}$ обладает базой $\mathscr{B}$, состоящей из открытых равномерных покрытий /1/, /4/. Для каждого $\alpha \in \mathscr{B}$ положим $\hat{\alpha} = \{\hat{A} : A \in \mathscr{B}\}$. Тогда семейство $\hat{\beta} = \{\hat{\alpha} : \alpha \in \mathscr{B}\}$ образует базу некоторой псевдоравномерности $\hat{\mathscr{U}}$ на $\dot{X}$. Пусть $\hat{\mathscr{U}}_\rho$ - Стоун – Чеховская равномерность на $\dot{X}$. Положим $\dot{\mathscr{U}} = \sup\{\hat{\mathscr{U}}, \hat{\mathscr{U}}_\rho\}$. Тогда $\hat{\mathscr{U}}$ - равномерность абсолюта $\dot{X}$, причем естественная проекция $\pi_X : (\hat{X}, \hat{\mathscr{U}}) \to (X, \mathscr{U})$ является равномерно совершенным отображением.

Отметим некоторые свойства псевдоравномерности $\hat{\mathscr{U}}$ на $\dot{X}$. Положим $\pi^{-1}(x) = s(x)$ для любой точки $x \in X$. Отметим, что $s(x)$ - бикомпактно в $\dot{X}$ для любой точки $x \in X$.

ЛЕММА 1. Для любого $p \in s(x)$ имеет место равенство
$\bigcap\{\hat{\alpha}(p) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathscr{B}}\} = s(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Имеет место равенство $\bigcap\{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathscr{B}}\} = s(x)$.

ЛЕММА 2. Система $\{\hat{\alpha}(s(x)) : \hat{\alpha} \in \hat{\mathscr{B}}\}$ образует базу открытых окрестностей бикомпакта $s(x)$ в X.

ТЕОРЕМА 1. Пусть равномерное пространство $(X, \mathscr{U})$ имеет равномерный вес $w(\mathscr{U}) \leq \tau$. Тогда $(\dot{X}, \dot{\mathscr{U}})$ является равномерно τ.- перистым пространством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерно непрерывное замкнутое отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$. Тогда для любого равномерного покрытия $\alpha\in\mathcal{U}$ и произвольного бикомпакта $K\subseteq Y$ существует открытое равномерное покрытие $\beta_K\in\mathcal{V}$ такое, что $\alpha(f^{-1}(K))\supseteq f^{-1}(\beta_K(K))$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f:(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ равномерно непрерывное совершенное отображение равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в равномерно τ-перистое равномерное пространство $(Y,\mathcal{V})$. Тогда равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ также равномерно τ-descr перисто.

ТЕОРЕМА 3. Если равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ является равномерно τ-перистым пространством, тогда его абсолют $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ также является равномерно τ-перистым пространством.

Следующие определения являются переносом на псевдоравномерные пространства понятия индекса полноты равномерных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $(X,\mathcal{U})$ псевдоравномерное пространство, $\mathcal{H}\subset\mathcal{U}$ - произвольная система псевдоравномерных покрытий. Фильтр $\mathcal{F}$ в множестве X называется $\mathcal{H}$-фильтром Коши в $(X,\mathcal{U})$, если $\alpha\cap\mathcal{F}\neq\varnothing$ для любого $\alpha\in\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $(X,\mathcal{U})$ псевдоравномерное пространство и $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{U}$. Псевдоравномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{H}$-полным, а система $\mathcal{H}$ называется полной, если всякий $\mathcal{H}$-фильтр Коши $\mathcal{F}$ имеет по
крайней мере одну точку прикосновения, т.е. $\cap\{[F]:F\in\mathcal{F}\}\neq\varnothing$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Индексом полноты $ic(\mathcal{U})$ псевдоравномерности $\mathcal{U}$ псевдоравномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется наименьшее кардинальное число τ такое, что существует $\mathcal{H}$-полная система $\mathcal{H}\subseteq\mathcal{U}$ мощности τ, т.е. $|\mathcal{H}|=\tau$. Другими словами, $ic(\mathcal{U})=\min\left\{\tau:\mathcal{H}\subset\mathcal{U}\ и\ \mathcal{H}\text{-}полно,|\mathcal{H}|\leq\tau\right\}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерное пространство и $\mathcal{U}=\sup\{\mathcal{V},\mathcal{W}\}$, где $\mathcal{V}$-некоторая псевдоравномерность в $\mathcal{U}$, а $\mathcal{W}$-некоторая предкомпактная равномерность в $\mathcal{U}$. Тогда $ic(\mathcal{U})\leq\tau$ тогда и только тогда, когда $ic(\mathcal{V})\leq\tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Абсолют $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ является полным тогда и только тогда, когда $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ $\hat{\mathcal{U}}$-полно.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $(X,\mathcal{U})$ полное равномерное пространство и $w(\mathcal{U})\leq\tau$. Тогда для абсолюта $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ выполняется $ic(w(\mathcal{U}))\leq\tau$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Для равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ и его абсолюта $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$ выполнено равенство $ic(\mathcal{U})=ic(\dot{\mathcal{U}})$.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда равномерно полным по Чеху является его абсолют $(\dot{X},\dot{\mathcal{U}})$.

Выводы и результаты исследования. В исследовании были введены понятия абсолюта равномерного пространства. Доказывается характеристики и свойства абсолютов равномерного пространства. Установлена сильная равномерная полнота по Чеху равномерных абсолютов, в случае таковых самих равномерных пространств.

Список литературы

1. Борубаев, А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения [Текст] / А.А. Борубаев. - Фрунзе, Илим, 1990.- 171 с.

2. Келли, Дж. Л. Общая топология. [Текст] / Дж. Л. Келли. – 2.-е изд.- М.: Наука, 1980.- 431 с.

3. Аблабекова, Ч. А. О перистности равномерных абсолютов. [Текст] / А. А. Чекеев, Ч. А. Аблабекова // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына, выпуск 1 , Бишкек, 2014. С. 30-33

4. Боргес. On stratifiable spaces [Текст] / C.J.R. Borges // Pacific J. Math., 1966. – Vol. 17. – P. 1-16.

5. Илиадис, С.Д. Абсолюты хаусдорфовых пространств [Текст] / С.Д.Илиадис // ДАН СССР, 1963. - 149. - С. 22-25.

6. Акерова Дж.А. Исследование дифференциальных уравнений с управлением [Текст] / Дж. А. Акерова, Э.Кененбаев, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с.448-454.

7. Кененбаев Э. Применение функциональных соотношений к моделированию посредством дифференциальных уравнений [Текст] / Э. Кенебаев, Дж. А. Акерова, Л.Аскар кызы // Вестник КГУСТА . – Бишкек: 2020. - - № 3(69). – с. 454-459.