УДК: 519.683.5 DOI: 10.35803/1694-5298.2021.1.118-123

УСЕНОВ И.А., УСЕНОВА Р.К., НУРКАЛИЕВА А.
[1]Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

USENOV I.A., USENOVA R.K., NURKALIEVA A.
[1]Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОПЕРАТОРОМ

SOLUTION OF A NONLINEAR OPERATOR EQUATION OF THE FIRST KIND WITH A CONTINUOUS POSITIVE LINEAR OPERATOR

Биринчи тектеги сызыктуу эмес оператордук тендеменин классы сызыктуу, сызыктуу эмес оператор жана теңдеменин оң жагы жакындаштырылып берилген учурда гильберт мейкиндигинде изилденген. Лаврентьевдин ыкмасы менен баштапкы берилиштерден турумдуу болгон жакындаштырылган чыгарылыш тургузулду. Регуляризация параметринин кетирилген каталардан көз карандылыгы аныкталды. Берилген теңдеменин так чыгарылышына жакындаштырылган чыгарылыштын жыйналуучулугунун ылдамдыгы алынды.

Өзөк сөздөр: *оператор, жакындаштырылган чыгарылыш, жыйналуучулук, регуляризация параметри.*

В пространстве H изучено нелинейное операторное уравнение первого рода, когда линейный, нелинейный оператор и правая часть уравнения задана приближенно. На основе метода Лаврентьева М.М. построено приближенное решение уравнения в гильбертовом пространстве. Выбрана зависимость параметра регуляризации от погрешностей. Получена скорость сходимости приближенного решения к точному решению исходного уравнения.

Ключевые слова: *оператор, приближенное решение, сходимость, параметр регуляризации.*

In the space H, a nonlinear operator equation of the first kind is studied, when the linear, nonlinear operator and the right-hand side of the equation are given approximately. Based on the method of Lavrent'ev M.M. an approximate solution of the equation in Hilbert space is constructed. The dependence of the regularization parameter on errors was selected. The rate of convergence of the approximate solution to the exact solution of the original equation is obtained.

Key words: *operator,* approximate solution*, convergence, regularization parameter.*

Введение. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода посвящены работы [1], [2], [3], [4],[5].

В работе [2] построен регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения первого рода.

В работе [5] построен регуляризирующий оператор для решения операторного уравнения первого рода Гаммерштейна, когда приближенно задан линейный оператор.

В данной работе исследовано операторное уравнение первого рода в случае, когда приближенно задан линейный и нелинейный оператор.

Постановка задач: Рассмотрим уравнение

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$Az = u + AK(z) \tag{1}$$

когда A -непрерывный положительный самосопряженный линейный оператор в H. K-нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица, определенный в пространстве H.

Допустим, что при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0 \in H$.

Пусть вместо элемента u_0 задан элемент u_δ, удовлетворяющий условию

$$\| u_\delta - u_0 \| \le \delta. \tag{2}$$

Пусть вместо оператора A задан оператор A_h, удовлетворяющий неравенству

$$\| A - A_h \| \le h \tag{3}$$

Вместо оператора K задан оператор K_{h_1}, представимый в виде

$$K_{h_1} = K + h_1 K_1, \tag{4}$$

где $\|K_1(z_1) - K_1(z_2)\| \le N_1 \|z_1 - z_2\|: \quad \forall z_1, z_2 \in H$.

Регуляризация: Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z + Az = u + AK(z). \tag{5}$$

α является регулярным значением оператора A.

Тогда уравнение эквивалентно следующему уравнению

$$z = L_\alpha u + L_\alpha AKz, \quad L_\alpha = (\alpha E + A)^{-1} \tag{6}$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$z = L_\alpha u + L_\alpha AKz + L_\alpha (A - A_h) z + L_\alpha A_h (K_{h_1} - K) z - L_\alpha (A - A_h) Kz. \tag{7}$$

Введем новую неизвестную g по формуле

$$g = z - L_\alpha AKz. \tag{8}$$

В силу условия [2] $N < 1$ оператор $E - (\alpha E + A)^{-1} AK(.)$ обратим. Через D_α обозначим обратный оператор. Тогда из (8) получаем

$$z = D_\alpha g. \tag{9}$$

Оператор D_α удовлетворяет условию Липшица с постоянной $(1 - N)^{-1}$

$$\|D_\alpha g_1 - D_\alpha g_2\| \le (1 - N)^{-1} \|g_1 - g_2\|. \tag{10}$$

Подставляя (11) в (7), получаем уравнение относительно g

$$g = L_\alpha u + + L_\alpha (A - A_h) D_\alpha g + L_\alpha A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha g - L_\alpha (A - A_h) K D_\alpha g. \tag{11}$$

Введем новую неизвестную t по формуле

$$t = g - L_\alpha (A - A_h) D_\alpha g + L_\alpha (A - A_h) K D_\alpha g. \tag{12}$$

Оператор $E - (\alpha E + A)^{-1} (A - A_h) D_\alpha(.) + (\alpha E + A)^{-1} (A - A_h) K D_\alpha(.)$ в силу условия [2] $q = h\alpha^{-1}(1 + N)(1 - N)^{-1} < 1,\ h < h_0$ обратим. G_α^h -обратный оператор. Тогда из (12) получаем

$$g = G_\alpha^h t. \tag{13}$$

Оператор G_α^h удовлетворяет условию Липшица с постоянной $(1 - q)^{-1}$

$$\|G_\alpha^h g_1 - G_\alpha^h g_2\| \le (1 - q)^{-1} \|g_1 - g_2\|. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (11), получаем уравнение относительно t

$$t = L_\alpha u + L_\alpha A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t. \tag{15}$$

Уравнение (15) решаем методом последовательных приближений.

За нулевое приближение возьмем элемент

$$t_0 = (\alpha E + A)^{-1} u. \tag{16}$$

Остальные приближения определяются по формуле

$$t_k = t_0 + L_\alpha A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t_{k-1}. \qquad (17_к)$$

Докажем сходимость последовательности приближений

$$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}. \qquad (18)$$

Для доказательства сходимости последовательности (18) из элементов этой последовательности составим ряд

$$t_0 + [t_1 - t_0] + \ldots + [t_k - t_{k-1}] + \ldots \qquad (19)$$

t_0 удовлетворяет неравенству

$$\|t_0\| \le \alpha^{-1} \|u\|. \qquad (20)$$

Полагая $k=1$ в $(17_к)$ получаем

$$\|t_1 - t_0\| = \|L_\alpha A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t_0\| \le \|L_\alpha A (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t_0\| + \|L_\alpha (A - A_h)\| \|(K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t_0\| \le h_1 \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right) \|K_1 D_\alpha G_\alpha^h t_0\|. \qquad (21)$$

Используя оценки [2]

$$\|D_\alpha(0)\| \le (1-N)^{-1} \|K(0)\|, \qquad \|G_\alpha^h(0)\| \le 2h\alpha^{-1}(1-N)^{-1}(1-q)^{-1} \|K(0)\| \qquad (22)$$

оценим норму $\|K_1 D_\alpha G_\alpha^h t_0\|$

$$\|K_1 D_\alpha G_\alpha^h t_0\| \le p, \qquad (23)$$

где $p = N_1(1-N)^{-1}(1-q)^{-1} \|t_0\| + 2h\alpha^{-1}(1-N)^{-2}(1-q)^{-1} \|K(0)\| + N_1(1-N)^{-1} \|K(0)\| + \|K_1(0)\|$.

Подставляя (23) в (21), получаем

$$\|t_1 - t_0\| \le h_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right) p. \qquad (17_1)$$

Из выражения при $k=2$ вычитая выражение при $k=1$ в $(17_к)$, получаем

$$\|t_2 - t_1\| \le h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1} \|t_1 - t_0\|. \qquad (17_2)$$

Аналогично, из выражения при $k=3$ вычитая выражение при $k=2$ в $(17_к)$, получаем

$$\|t_3 - t_2\| \le h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1} \|t_2 - t_1\| \le \left(h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1}\right)^2 \|t_1 - t_0\| \qquad (17_3)$$

Далее для любого натурального $k \ge 2$ справедливо неравенство

$$\|t_k - t_{k-1}\| \le \left(h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1}\right)^{k-1} \|t_1 - t_0\|. \qquad (17_к)$$

Используя неравенство (17_1), из $(17_к)$ получаем

$$\|t_k - t_{k-1}\| \le \left(h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1}\right)^{k-1} p. \qquad (24)$$

Таким образом, ряд (19) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_1 \left(h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1}\right)^k, \qquad (25)$$

где $p_1 = \|t_0\| + 2h\alpha^{-1}(1-N)^{-1} \|K(0)\| + (1-q)\left(K(0)\left(+ (1-N)(1-q)N_1 \|K_1(0)\|\right.\right.$.

Предположим, что $\alpha(h, h_1)$ зависит так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \to 0} h\alpha^{-1}(h, h_1) = 0. \qquad (26)$$

При выполнении условия (26) следует, что существуют числа h_0, h_{1_0} такие, что

$$R = h_1 N_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right)(1-N)^{-1}(1-q)^{-1} < 1, \qquad h < h_0, \quad h_1 < h_{1_0}. \qquad (27)$$

При выполнении условия (27) ряд (25) сходится. Следовательно, сходится и ряд (19). Сумму ряда (19) обозначим через t_α. По построению элемент t_α является пределом последовательности (18), т. е.

$$\lim_{k \to \infty} t_k = t_\alpha. \qquad (28)$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в $(17_к)$ и используя непрерывность данных операторов и (28), получаем

$$t_\alpha = t_0 + (\alpha E + A)^{-1} A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h t_\alpha . \qquad (29)$$

Обратный оператор к оператору $E - (\alpha E + A)^{-1} A_h (K_{h_1} - K) D_\alpha G_\alpha^h(.)$ обозначим через T_α^{h,h_1}. Тогда решение уравнения (15) записывается в виде

$$t_\alpha = T_\alpha^{h,h_1} t_0. \qquad (30)$$

Из (29) следует, что оператор T_α^{h,h_1} удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$\left\| T_\alpha^{h,h_1} t_1 - T_\alpha^{h,h_1} t_2 \right\| \le (1-R)^{-1} \left\| t_1 - t_2 \right\|. \qquad (31)$$

В силу (25) для t_α справедлива оценка

$$\left\| t_\alpha \right\| \le p_1 (1-R)^{-1}. \qquad (32)$$

Подставляя (30) в (13), получаем

$$g_\alpha = G_\alpha^h T_\alpha^{h,h_1} t_0. \qquad (33)$$

Подставляя (33) в (9), получаем решение уравнения (7)

$$z_\alpha^{h,h_1} = D_\alpha G_\alpha^h T_\alpha^{h,h_1} t_0. \qquad (34)$$

Таким образом, доказано:

Теорема 1. Пусть: 1) оператор A линейный непрерывный положительный самосопряженный; 2) линейный оператор A_h удовлетворяет условию (3); 3) оператор K_{h_1} представим в виде (4), где K, K_1 - нелинейные операторы, определенные в H и удовлетворяют условию Липшица, причем постоянная Липшица N для оператора K удовлетворяет условию $N < 1$; 4) параметр $\alpha(h, h_1)$ удовлетворяет условию (26). Тогда существуют такие числа h_0 и h_{1_0}, что при любых $h < h_0$ и $h_1 < h_{1_0}$ и любом $u \in H$ уравнение (7) имеет единственное решение $z_\alpha^{h,h_1} \in H$.

Покажем, что решение уравнения (7) является приближенным решением уравнения (1). Для этого оценим разность $z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_\alpha^0$, где z_α^0 - решение представимое в виде [2]:

$$z_\alpha^0 = D_\alpha t_0^0. \qquad (35)$$

Используя неравенство треугольника, получаем

$$\left\| z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_\alpha^0 \right\| \le \left\| z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_{\alpha,0}^h \right\| + \left\| z_{\alpha,0}^h - z_\alpha^0 \right\| \qquad (36)$$

где $z_{\alpha,0}^h$ - решение представимое в виде [2]:

$$z_{\alpha,0}^h = D_\alpha G_\alpha^h t_0^0. \qquad (37)$$

Подставляя (34), (35) и (37) в (36), получаем

$$\left\| z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_\alpha^0 \right\| \le h_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right) p_2 + h\alpha^{-1} p_3 , \qquad (38)$$

где $p_2 = (1-N)^{-2}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1} N_1 \left(\left\| t_0^0 \right\| + \left\| K(0) \right\| \right) + (1-N)^{-1}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1} \left\| K_1(0) \right\|,$

$p_3 = 2(1-N)^{-2}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1} \left\| K(0) \right\| + (1-N)^{-2}(1-q)^{-1}(1+N) \left\| t_0^0 \right\| + 2(1-N)^{-2}(1-q)^{-1} \left\| K(0) \right\|.$

Оценим разность $z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_0$, где z_0 - точное решение уравнения (1) при $u = u_0$. Используя неравенство треугольника и учитывая неравенство (38) и неравенство [2] $\left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\| \le \alpha (1-N)^{-1} \left\| v_0 \right\|$, $v_0 \in H$, получаем

$$\left\| z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_0 \right\| \le \left\| z_{\alpha,0}^{h,h_1} - z_\alpha^0 \right\| + \left\| z_\alpha^0 - z_0 \right\| \le h_1 \left(1 - h\alpha^{-1}\right) p_2 + h\alpha^{-1} p_3 + \alpha (1-N)^{-1} \left\| v_0 \right\|. \qquad (39)$$

Отсюда при выполнении условия (26) и

$$\lim_{h \to 0} \alpha(h, h_1) = 0 \qquad (40)$$

из (39) следует, что $z_{\alpha,0}^{h,h_1} \to z_0$ при $h \to 0$ и $h_1 \to 0$ в H.

Таким образом, доказано

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) при $u=u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение $z_0 \in H$, представимое в виде $z_0 = Av_0$, $v_0 \in H$; 3) параметр $\alpha(h,h_1)$ удовлетворяет условию (40). Тогда решение $z^{h,h_1}_{\alpha,0}$ уравнения (7) при $u=u_0$ сходится при $h \to 0$ и $h_1 \to 0$ к точному решению z_0 уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет условию (39).

Решение уравнения (7) при $u=u_\delta$ обозначим через $z^{h,h_1}_{\alpha,\delta}$. В силу формулы (34) $z^{h,h_1}_{\alpha,\delta}$ представимо в виде

$$z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} = D_\alpha G^h_\alpha T^{h,h_1}_\alpha t^\delta_0. \tag{41}$$

Оценим разность $z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z^{h,h_1}_{\alpha,0}$

$$\left\|z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z^{h,h_1}_{\alpha,0}\right\| \le (1-N)^{-1}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1}\left\|t^\delta_0 - t^0_0\right\|. \tag{42}$$

Из формулы (16) при $u=u_\delta$ вычитая формулу (16) при $u=u_0$, имеем

$$\left\|t^\delta_0 - t^0_0\right\| = \left\|(\alpha E + A)^{-1}(u_\delta - u_0)\right\| \le \delta\alpha^{-1}. \tag{43}$$

Учитывая (43) из (42) получаем

$$\left\|z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z^{h,h_1}_{\alpha,0}\right\| \le (1-N)^{-1}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1}\delta\alpha^{-1} \tag{44}$$

Далее оценим разность $z^{h,h_1}_{\alpha,0} - z_0$. Используя неравенство треугольника и неравенства (39) и (44), получаем

$$\left\|z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z_0\right\| \le \left\|z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z^{h,h_1}_{\alpha,0}\right\| + \left\|z^{h,h_1}_{\alpha,0} - z_0\right\| \le h_1\left(1-h\alpha^{-1}\right)p_2 + h\alpha^{-1}p_3 + \alpha p_4 + \delta\alpha^{-1}p_5, \tag{45}$$

где $p_4 = (1-N)^{-1}\|v_0\|$, $p_5 = (1-N)^{-1}(1-q)^{-1}(1-R)^{-1}$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(\alpha) = h_1\left(1-h\alpha^{-1}\right)p_2 + h\alpha^{-1}p_3 + \alpha p_4 + \delta\alpha^{-1}p_5. \tag{46}$$

Вычислим первую производную этой функции и приравнивая ее к нулю находим

$$\alpha(\delta,h,h_1) = \sqrt{p_4^{-1}(hp_3 + \delta p_5 - h_1 h p_2)}. \tag{47}$$

Подставляя значение (47) в правую часть неравенства (45), получаем

$$\left\|z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} - z_0\right\| \le 2\sqrt{p_4(hp_3 + \delta p_5 - h_1 h p_2)} + h_1 p_2. \tag{48}$$

Из неравенства (48) следует, что $z^{h,h_1}_{\alpha,\delta} \to z_0$ при $\delta, h, h_1 \to 0$ в H.

Таким образом, доказано

Теорема 3. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 2; 2) элемент u_δ удовлетворяет условию (2). Тогда решение $z^{h,h_1}_{\alpha,\delta}$ уравнения (7) при $u=u_\delta$ сходится при $h, h_1, \delta \to 0$ к точному решению $z_0 \in H$ уравнения (1) при $u=u_0$. Скорость сходимости удовлетворяет условию (48).

Выводы и результаты исследования:

1. В пространстве гильберта построен приближенное решение нелинейного операторного уравнения первого рода с приближенными данными;

2. Установленна сходимость и найдена оценка скорости сходимости приближенного решения к точному решению.

Список литературы

1. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики[Текст] / М.М.Лавреньтев. - Новосибирск: 1962. – 96 с.
2. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных интегральных и операторных уравнений 1-го рода [Текст] / А.Садабаев. - Бишкек: 1997. - 218с.
3. Усенов И.А. Регуляризация решения операторного уравнения Гаммерштейнапервого рода [Текст] / И.А.Усенов // Исслед. по интегро-дифф. урав.. - вып. №41. Бишкек: «Илим», 2009. - С. 63-67.
4. Усенов И.А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестник Московского государственного областного университета [Текст] / И.А.Усенов // Серия: Физика- математика. 2016. - №1. С.8-14. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.
5. Саадабаев А.С. Регуляризирующий оператор для решения операторного уравненияГаммерштейна первого рода [Текст] / / А.С.Садабаев, И.А.Усенов // Вестник ОшГУ, серия “физики, математики, информационные технологии, экономики,технические науки”. – Ош: 2020. - с. 157-164.