УДК 519 DOI: 10.35803/1694-5298.2021.1.131-136

ШАРШЕМБИЕВА Ф.К.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

SHARSHEMBIEVA F.K.
[1]J. Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyz Republic
e-mail: peri7979@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С НЕОДНОРОДНЫМИ ТРАНСПОРТНЫМИ ЗАТРАТАМИ

SOLUTION OF PRODUCTION LOCATION PROBLEM WITH UNHOMOGENEOUS TRANSPORTATION COSTS

Иште продукцияны өндүрүүнүн, ташуунун жана кайра иштетүүнүн оптималдуу планын суммалык чыгымдарды минималдаштыруу критерийи боюнча аныктоо маселесинин экономика-математикалык модели түзүлгөн. Өндүрүүчүлүк продукциянын наркын өндүрүш көлөмүнүн жана продукцияны кайра иштетүү чыгымдарынан көз карандылыгын аныктоочу функциялары сызыктуу, ал эми транспорттук чыгымдардын ташылуучу продукциянын көлөмүнөн көз карандылыгын аныктоочу функция нөлдө үзгүлтүктүү. Түзүлгөн маселеге удаалаш эсептөө ыкмасын колдонуунун жетиштүү шарттары далилденген

Өзөк сөздөр: *сызыктуу эки этаптуу маселе, ташуу планы, өндүрүү, жайгаштыруу маселеси, чектелген шарттар, модель, транспорттук маселе, удаалаш эсептөө ыкмасы.*

В работе сформирована экономико-математическая модель задачи определения оптимального плана производства, транспортировки и обработки продукции по критерии минимума суммарных затрат. Функции, определяющие зависимость стоимости производимой продукции от объема производства и затраты на обработки продукции являются линейными, а функция, определяющая зависимость транспортных расходов от объема перевозимой продукции является разрывной в нуле. Доказаны достаточные условия применимости метода последовательных расчетов к сформулированной задаче.

Ключевые слова: *линейная двухэтаптная задача, план перевозки, производство, задача размещения, ограниченные условия, модель, транспортная задача, метод последовательных расчетов.*

In the work, an economic and mathematical model is formed for the problem of determining the optimal plan for production, transportation and processing of products according to the criterion of the minimum total costs. The functions that determine the dependence of the cost of manufactured products on the volume of production and the costs of processing products are linear, and the function that determines the dependence of transport costs on the volume of transported products is discontinuous at zero. Sufficient conditions for the applicability of the method of sequential calculations to the formulated problem are proved.

Key words: *linear two-stage problem, transportation plan, production, location problem, bounded conditions, model, transport problem, sequential calculation method.*

Постановка задачи. Пусть ассоциация производителей имеет A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, пунктов производства однородной продукции без ограничения на объем x_i, $i = 1, 2, \dots, m$ т.е. продукция может производиться в любом объеме по мере возмоности и желания производителя в зависимости от спроса и предложения, и обрабатывающие предприятия B_j,

$j = 1, 2, \dots, n$. Продукция, производимая в пунктах A_i, $i = 1, 2, \dots, m$, доставляется предприятиям B_j, $j = 1, 2, \dots, n$, где проходят обработку различного вида согласно договору.

Предполагается, что на каждом предприятии B_j, $j = 1, 2, \dots, n$ продукция имеет возможность обрабатываться k видами, $k = 1, 2, \dots, p$. Получен заказ для выполнения за рассматриваемый период производства и обработки продукции по каждому виду в объеме b_k, $k = 1, 2, \dots, p$ единиц.

Известно, что для каждого пункта производства ассоциации A_i, $i = 1, 2, \dots, m$ функции $\varphi_i(x_i)$, отражаются зависимости стоимости производимой продукции от объема производства x_i, $i = 1, 2, \dots, m$, а для каждого обрабатывающего предприятия B_j, $j = 1, 2, \dots, n$ известны функции $f_{jk}(y_{jk})$, $k = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$, определяющие затраты на обработки продукции по каждому виду k, $k = 1, 2, \dots, p$.

Кроме этого известны функции $\varphi_{ij}(x_{ij})$ $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, определяющие зависимость транспортных расходов от объема перевозимой продукции от A_i в B_j, и q_j-максимальная возможность обрабатываемой продукции каждого предприятия B_j, $j = 1, 2, \dots, n$ всеми видами обработки.

Требуется определить оптимальный план производства x_i, $i = 1, 2, \dots, m$, объем перевозки продукции x_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, и объем обрабатываемой продукции каждого вида y_{jk}, $j = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, p$, минимизирующие суммарные затраты. Изложенная проблема может быть представлена в виде следующей экстремальной задачи.

Найти минимум

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_{ij}) + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f_{jk}(y_{jk}) \qquad (1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2)$$

т.е. суммарное количество вывозимых продукций x_{ij} из пункта производства A_i в пункты обработки B_j должны совпадать с количеством продукций пункта A_i, порядок индексов должны соблюдаться.

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \le q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jk} = b_k, \qquad (4)$$

$$x_i \ge 0, \quad x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (5)$$

$$y_{jk} \ge 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p, \qquad (6)$$

где $x = |x_{ij}|_{m,n}$, $y = |y_{jk}|_{n,p}$. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{k=1}^{p} b_k$, $\sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{j=1}^{n} q_j$

Рассмотрим способ решения задачи (1)-(6) в случае, когда функции $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и $f_{jk}(y_{jk})$, $j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p$ – линейные а функции $\varphi_{ij}(x_{ij}), i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ – разрывны в нуле, т.е.

$$\varphi_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij} + \alpha_{ij}\theta(x_{ij}), \; i = 1, 2, \dots, m, \; j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi_i(x_i) = c_i x_i, \; i = 1, 2, \dots, m, f_{jk}(y_{jk}) = c_{ik} y_{ik}, \; j = 1, 2, \dots, n, \; k = 1, 2, \dots, p.$$

Преобразуем задачу (1)-(6). Рассмотрим ее как двухэтапную задачу размещения производства [1]. В дальнейшем условимся, что каждый пункт производства ассоциации A_i, $i = 1, 2, \dots, m$ рассмотрим как множество пунктов производства A_{ir}, $i = 1, 2, \dots, m$, $r = 1, 2, \dots, n$. Тогда каждому пункту производства A_{ir} соответствует некоторый объем производства продукции $x_{ir} = \sum_{i=1}^{n} x_{irj}$, где x_{irj} объем продукции перевозимого из A_{ir} в B_j для обработки.

Обозначим через c_{irj} – расходы на производство и перевозку единицы объема продукции из A_{ir} в B_j для обработки, а через α_{irj} фиксированные доплаты,

где $c_{irj} = \bar{c}_{ij}\delta_{jr} + M(1 - \delta_{jr})$, $\alpha_{irj} = \alpha_{ij}\delta_{jr}$, $\delta_{jr} = \begin{cases} 1, j = r, \\ 0, j \neq r, \end{cases}$ $j, r = 1, 2, \dots, n.$

M – достаточно большое положительное число, $\bar{c}_{ij} = c_{ij} + c_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Обозначив через G – множество пар индексов $\{ir\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $r = 1, 2, \dots, n$, задачу (1)-(6) можем записать в виде.

$$L(x, y, G) = \sum_{ir \in G} \sum_{j=1}^{n} c_{irj} x_{irj} + \sum_{ir \in G} F_{ir} \theta(x_{ir}) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{jk} y_{jk} \tag{7}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{irj} = x_{ir}, \quad ir \in G, \tag{8}$$

$$\sum_{ir \in G} x_{irj} = \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \le q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jk} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{10}$$

$$x_{irj} \ge 0, \quad x_{ir} \ge 0, \quad ir \in G, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{11}$$

где $F_{ir} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{irj}$, $ir \in G$.

Для решения задачи воспользуемся методом последовательных расчетов [2], который позволяет свести решение данной задачи к симплекс-методу [4].

Обозначим через ω произвольное подмножество множества G. Тогда на каждом подмножестве $\omega \subset G$ может быть определена значение целевой функции

$$L(x, y, \omega) = \sum_{ir \in \omega} \sum_{j=1}^{n} c_{irj} x_{irj} + \sum_{ir \in \omega} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} c_{jk} y_{jk} \tag{12}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{irj} = x_{ir}, \quad ir \in \omega, \tag{13}$$

$$\sum_{ir \in \omega} x_{irj} = \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \le q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jk} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \tag{15}$$

$$x_{irj} \ge 0, \quad x_{ir} \ge 0, \quad ir \in \omega, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{16}$$

и выполнения $\sum_{ir \in \omega} x_{ik} = \sum_{k=1}^{p} b_k$, $\sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{j=1}^{n} q_j$.

Обозначим через $p(\omega)$ минимальное значение (12) на множестве, заданное ограничениями (13)-(16), т.е. $p(\omega) = \min_{|x,y|}\{L(x, y, \omega)\}$.

Тогда исходная задача может быть сформулирована следующим образом. Требуется определить такое подмножество $\omega^* \subset G$, на котором $p(\omega)$ достигла бы своего наименьшего значения $p(\omega^*)$, т.е.

$$p(\omega^*) = \min_{\omega \subset G}\{p(\omega)\} \tag{17}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Решить задачу простым перебором невозможно из-за большого числа подмножеств $\omega \subset G$. В этой связи, для решения задачи используем метод последовательных расчетов. Покажем, что для (17) выполняется достаточное условие применимости метода последовательных расчетов, которое имеет вид:

$$s(\omega_1, \omega_2) = p(\omega_1) + p(\omega_2) - p(\alpha) - p(\beta) \leq 0, \qquad (18)$$

где ω_1, ω_2 – произвольные подмножества множества G, введем обозначения: $\alpha = \omega_1 \cup \omega_2$ и $\beta = \omega_1 \cup \omega_2$.

Покажем, что $p(\omega)$ удовлетворяет условию (18).

Так как $p(\omega) = \min_{|x,y|}\{\sum_{ir\in\omega}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\omega} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\}$,

следовательно, условие (18) можно записать в виде:

$$s(\omega_1, \omega_2) = \min_{|x,y|}\Big\{\sum_{ir\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\omega_1} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\Big\} +$$

$$+ \min_{|x,y|}\Big\{\sum_{ir\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\omega_2} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\Big\} -$$

$$- \min_{|x,y|}\Big\{\sum_{ir\in\alpha}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\alpha} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\Big\} -$$

$$\min_{|x,y|}\Big\{\sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\beta} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\Big\} \leq 0. \qquad (19)$$

Далее, предположим, что на множествах ω_1 и ω_2 существуют допустимые планы $|x^{\omega_1}_{irj}, x^{\omega_1}_{irj}|$, $|x^{\omega_2}_{irj}, x^{\omega_2}_{irj}|$ для задачи (7)-(11) которое удовлетворяет следующим условиям:

$$x^{\alpha}_{irj} = \begin{cases} x^{\omega_1}_{irj}, & ir \in \alpha\backslash\omega_2, \\ x^{\omega_2}_{irj}, & ir \in \alpha\backslash\omega_1, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (20)$$

$$y^{\alpha}_{jk} = \begin{cases} y^{\omega_1}_{jk}, & k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ y^{\omega_2}_{jk}, & k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \qquad (21)$$

$$x^{\omega_1}_{irj} + x^{\omega_2}_{irj} = x^{\alpha}_{irj} + x^{\beta}_{irj}, \quad ir \in \beta, \quad j = 1, 2, \dots, n \qquad (22)$$

$$y^{\omega_1}_{jk} + y^{\omega_2}_{jk} = y^{\alpha}_{jk} + y^{\beta}_{jk}, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, n. \qquad (23)$$

$$\min\{x^{\alpha}_{ir} + x^{\beta}_{ir}\} \leq x^{\omega_1}_{ir} + x^{\omega_2}_{ir} \leq \max\{x^{\alpha}_{ir} + x^{\beta}_{ir}\}, \quad ir \in \beta, \qquad (24)$$

где $|x^{\alpha}_{irj}, y^{\alpha}_{jk}|$ – оптимальный план задачи (12)-(16) при замене ω на множество α, а $|x^{\beta}_{irj}, y^{\beta}_{jk}|$– на множество β.

Тогда для доказательства условия (19) достаточно показать выполнение соотношения

$$s(\omega_1, \omega_2) = \Big(\sum_{ir\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega_1}_{irj} + \sum_{ir\in\omega_1} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y^{\omega_1}_{jk}\Big) +$$

$$+ \Big(\sum_{ir\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega_2}_{irj} + \sum_{ir\in\omega_2} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y^{\omega_2}_{jk}\Big) -$$

$$- \Big(\sum_{ir\in\alpha}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\alpha}_{irj} + \sum_{ir\in\alpha} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y^{\alpha}_{jk}\Big) +$$

$$+\left(\sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\beta}_{irj} + \sum_{ir\in\beta} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y^{\beta}_{jk}\right) \le 0. \qquad (25)$$

Из введения α и β легко заметить, что $\sum_{ir\in\omega_1} F_{ir} + \sum_{ir\in\omega_2} F_{ir} = \sum_{ir\in\alpha} F_{ir} + \sum_{ir\in\beta} F_{ir}$. Следовательно, соотношение (25) после сокращения имеет вид

$$\bar{s}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{ir\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 1}_{irj} + \sum_{ir\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 2}_{irj} - \sum_{ir\in\alpha}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\alpha}_{irj} - \sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\beta}_{irj} \le 0. \qquad (26)$$

Действительно, так как $|x^{\omega 1}_{irj}, y^{\omega 1}_{jk}|$ и $|x^{\omega 2}_{irj}, y^{\omega 2}_{jk}|$ не является оптимальными решениями соответствующих задач, то имеют место неравенства:

$$\min_{|x,y|}\left\{\sum_{ir\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\omega_1} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\right\} \le$$

$$\le \sum_{ir\in\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 1}_{irj} + \sum_{ir\in\omega_1} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk},$$

$$\min_{|x,y|}\left\{\sum_{ir\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x_{irj} + \sum_{ir\in\omega_2} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk}\right\} \le$$

$$\le \sum_{ir\in\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 1}_{irj} + \sum_{ir\in\omega_2} F_{ir} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} c_{jk}y_{jk},$$

Следовательно,

$$s(\omega_1,\omega_2) \le \bar{s}(\omega_1,\omega_2). \qquad (27)$$

Из (27) следует $s(\omega_1,\omega_2) \le 0$.

Докажем теперь соотношение (26).

Используя условия (20)-(22) преобразуем сумму слагаемых (26) в виде

$$\bar{s}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{ir\in\alpha\setminus\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 1}_{irj} + \sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 1}_{irj} + \sum_{ir\in\alpha\setminus\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 2}_{irj} + \sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\omega 2}_{irj} -$$

$$- \sum_{ir\in\alpha\setminus\omega_2}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\alpha}_{irj} - \sum_{ir\in\alpha\setminus\omega_1}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\alpha}_{irj} - \sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\alpha}_{irj} - \sum_{ir\in\beta}\sum_{j=1}^{n} c_{irj}x^{\beta}_{irj}.$$

Учитывая условия (20)-(23), получим $\bar{s}(\omega_1,\omega_2) \le 0$. Следовательно, $s(\omega_1,\omega_2) \le 0$.

Вывод. Существование допустимых планов, удовлетворяющих условиям (20)-(24), доказывается аналогично доказательству, приведенному в [1]. Приведенное доказательство позволяет применить к задаче алгоритм метода последовательных расчетов [3].

Заключение. Доказано выполнение достаточного условия применимости метода последовательных расчетов к (17) в предположении, что для задачи (7)-(11) на множествах ω_1 и ω_2 существуют допустимые планы вида $|x^{\omega 1}_{irj}, y^{\omega 1}_{jk}|$, $|x^{\omega 2}_{irj}, y^{\omega 2}_{jk}|$, которые удовлетворяют условиям (20)-(24).

Список литературы

1. Ланге Э.Г. Комбинаторный метод решения задачи размещения [Текст] / Э.Г. Ланге.
– Фрунзе: Илим, 1990. – 153 с.
2. Черенин В.П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов [Текст] / В.П. Черенин, – М.: 1962. – Вып. 2. –44 с.
3. Черенин В.П. Решение методом последовательных расчетов одного класса задач о разрешении производства [Текст] / В.П. Черенин, В.Р. Хачатуров // Математические методы и ЭВМ в экономических исследованиях. - М.:1962. – С. 112-124.
4. Dantzig, G.B. The Simplex Method [Text] / Dantzig, G.B. // Rand Corp. Rept. 1956. – P. 891.