УДК 517.968 DOI: 10.35803/1694-5298.2021.1.110-117

ЖАПАРОВА З. А.
[1]Ж. Баласагын атындагы КУУ, Бишкек, Кыргызстан

ЖАПАРОВА З. А.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

JAPAROVA Z. A.
[1]KNU named after Zh. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan
e-mail: ziynat83@mail.ru

О СПЕЦИФИЧЕСКОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

ON SPECIFIC ASYMPTOTIC STABILITY SOLUTIONS OF A LINEAR HOMOGENEOUS WELTERER INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Төртүнчү тартиптеги сызыктуу бир тектүү Вольтерра тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдеменин чыгарылышынын ага туура келген төртүнчү тартиптеги дифференциалдык теңдеменин баардык нөлдүк эмес чыгарылыштары асмиптотикалык турумдуулук касиетине ээ болбогон учурда берилген теңдеменин чыгарылышынын асимптотикалык турумдуулугунун спецификалык жетиштуу шарты табылган. Бул жумушта чыгарылыштын жана үчүнчү тартипке чейинки туундулардын жарым октогу баалоосу алынды .

Өзөк сөздөр: *Вольтерра тибиндеги сызыктуу интегро-диференциалдык теңдеме, асимптотикалык турумдуулук.*

Установлены специфические достаточные условия асимптотической устойчивости линейного однородного интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра в случае, когда все ненулевые решения соответствующего дифференциального уравнения четвертого порядка не обладают свойством асимптотической устойчивости решений. В данной работе получены оценки на полуоси решение и производного до третьего порядка.

Ключевые слова: *линейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, асимптотическая устойчивость*.

Specific sufficient conditions for the asymptotic stability of a linear homogeneous fourth-order integro-differential equation of the Volterra type are established in the case when all nonzero solutions of the corresponding fourth-order differential equation do not have the property of asymptotic stability of the solutions. In this paper, we obtain estimates on the semiaxis of the solution and the derivative up to the third order.

Key word: *linear integro-differential equations of Volterra type, asymptotic stability.*

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Введение. В данной работе исследуется уравнения вида

$$x^{(4)}(t) - a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[Q_0(t,r)x(r) +$$

$$+Q_1(t,r)x'(r) + Q_2(t,r)x''(r)+Q_3(t,r)x'''(r)]dr = 0, \qquad t \geq t_0$$

в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего однородного дифференциального уравнения не являются асимптотического устойчивым.

В работе [1] решен вопрос специфической устойчивости решений ИДУ с условием:

$$a_3(t) \geq 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} a_3(t) = \infty.$$

В работе [2] установлено специфической экспоненциальной устойчивости решений ИДУ при условии $a_3(t) \equiv 0$.

В данной работе ИДУ исследовано при условие $a_3(t) \geq 0$.

Постановка задач. Все фигурирующие функции и их производные являются непрерывными и соотношения имеют место при $t \geq t_0$, $t \geq r \geq t_0$; $J = [t_0; \infty)$; ИДУ-интегро-дифференциальное уравнение; ДУ-дифференциальное уравнение; АУ-асимптотическая устойчивость; ЭУ-экспоненциальная устойчивость.

ЗАДАЧА. *Установить достаточные условия АУ решений линейного однородного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра вида:*

$$x^{(4)}(t) - a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[Q_0(t,r)x(r) +$$

$$+Q_1(t,r)x'(r) + Q_2(t,r)x''(r)+Q_3(t,r)x'''(r)]dr = 0, \quad t \geq t_0 \tag{1}$$

при $a_3(t) \geq 0$, (a_3)

т. е. в случае, когда любое ненулевое решение соответствующего ДУ четвертого порядка:

$$x^{(4)}(t) - a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{1_0}$$

не являются АУ, что подтверждается формулой Остроградского- Лиувилля.

Для решения этой задачи сначала нестандартным методом сведения к системе [3,4] ИДУ (1) сводится к эквивалентной системе, состоящей из двух линейных неоднородных ДУ первого порядка и из одного линейного однородного ИДУ второго порядка типа Вольтерра. Затем к полученной системе развивается метод преобразования уравнений В. Вольтерра [5, с. 25-27] и метод весовых и срезывающих функций [5], при этом применяется лемма 1.4 [6], развивается схема преобразований по схеме А) → В) → С) [5, с. 114-116], а также метод интегральных неравенств [7]. В результате будут получены оценки для любых решений ИДУ (1) и их первых, вторых, третьих производных, из которых будет следовать решение поставленной задачи.

Решение задачи: В ИДУ (1) согласно [3,4] сделаем следующие замены:

$$x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t)y(t), \quad x'(t) = -\lambda_1 x(t) + W_1(t)y(t), \tag{2}$$

$$y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t)u(t), \quad y'(t) = -\lambda_2 y(t) + W_2(t)u(t), \tag{3}$$

где $0 < \lambda_k$ $(k = 1, 2)$ -некоторые вспомогательные параметры, $0 < W_k(t)$ $(k = 1,2)$ - некоторые весовые функции, $y(t), u(t)$ - новые неизвестные функции.

Из (2), (3) дифференцированием имеем:

$$x''(t) = -\lambda_1 x'(t) + W_1'(t)y(t) + W_1(t)y'(t) =$$

$$= -\lambda_1[-\lambda_1 x(t) + W_1(t)y(t)] + W_1'(t)y(t) + W_1(t)[-\lambda_2 y(t) + W_2(t)u(t)] =$$

$$= \lambda_1^2 x(t) + D_1(t)y(t) + W_1(t)W_2(t)u(t), \tag{4}$$

где $D_1(t) \equiv W_1'(t) - \lambda_1 W_1(t) - \lambda_2 W_1(t)$;

$$x'''(t) = \lambda_1^2 x'(t) + D_1'(t)y(t) + D_1(t)y'(t) + (W_1(t)W_2(t))' u(t) +$$

$$+W_1(t)W_2(t)u'(t) = \lambda_1^2[-\lambda_1 x(t) + W_1(t)y(t)] + D_1'(t)y(t) +$$

$$+D_1(t)[-\lambda_2 y(t) + W_2(t)u(t)]+(W_1(t)W_2(t))' u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t) =$$

$$-\lambda_1^3 x(t) + D_2(t)y(t) + D_3(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t), \tag{5}$$

где $D_2(t) \equiv D_1'(t) + \lambda_1^2 W_1(t) - \lambda_2 D_1(t)$,

$D_3(t) \equiv (W_1(t)W_2(t))' + D_1(t)W_2(t)$;

$$x^{(4)}(t) = -\lambda_1^3 x'(t) + D_2'(t)y(t) + D_2(t)y'(t) + D_3'(t)u(t) + D_3(t)u'(t) + (W_1(t)W_2(t))'u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t) = -\lambda_1^3[-\lambda_1 x(t) + W_1(t)y(t)] + D_2'(t)y(t) + D_2(t)[-\lambda_2 y(t) + W_2(t)u(t)] + D_3'(t)u(t) + D_3(t)u'(t) + (W_1(t)W_2(t))'u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t) = \lambda_1^4 x(t) + D_4(t)y(t) + D_5(t)u(t) + D_6(t)u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t), \qquad (6)$$

где $D_4(t) \equiv D_2'(t) - \lambda_1^3 W_1(t) - \lambda_2 D_2(t)$, $D_5(t) \equiv D_3'(t) + D_2(t)W_2(t)$, $D_6(t) \equiv D_3(t) + (W_1(t)W_2(t))'$.

Подставляя (2) - (6) в ИДУ (1), имеем

$$\lambda_1^4 x(t) + D_4(t)y(t) + D_5(t)u(t) + D_6(t)u'(t) + W_1(t)W_2(t)u''(t) - a_3(t)[-\lambda_1^3 x(t) + D_2(t)y(t) + D_3(t)u(t) + W_1(t)W_2(t)u'(t)] + a_2(t)[\lambda_1^2 x(t) + D_1(t)y(t) + W_1(t)W_2(t)u(t)] + a_1(t)[-\lambda_1 x(t) + W_1(t)y(t)] + a_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t} \{Q_0(t,r)x(r) + Q_1(t,r)[-\lambda_1 x(r) + W_1(r)y(r)] + Q_2(t,r)[\lambda_1^2 x(r) + D_1(r)y(r) + W_1(r)W_2(r)u(r)] + Q_3(t,r)[-\lambda_1^3 x(r) + D_2(r)y(r) + D_3(r)u(r) + W_1(r)W_2(r)u'(r)]\}dr = 0,$$

$$t \ge t_0. \qquad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$b_3(t) \equiv a_3(t) - D_6(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $u'(t)$),

$b_2(t) \equiv a_2(t) - a_3(t)D_3(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1} + D_5(t)(W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $u(t)$),

$b_1(t) \equiv a_1(t)(W_2(t))^{-1} + [a_2(t)D_1(t) - a_3(t)D_2(t) + D_4(t)](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $y(t)$),

$b_0(t) \equiv [a_0(t) - \lambda_1 a_1(t) + \lambda_1^2 a_2(t) + \lambda_1^3 a_3(t) + \lambda_1^4](W_1(t)W_2(t))^{-1}$ (коэффициент $x(t)$),

$P_0(t,r) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_0(t,r) - \lambda_1 Q_1(t,r) + \lambda_1^2 Q_2(t,r) - \lambda_1^3 Q_3(t,r)]$ (ядро с $x(r)$),

$P_1(t,r) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_1(t,r)W_1(r) + Q_2(t,r)D_1(r) + Q_3(t,r)D_2(r)]$ (ядро с $y(r)$),

$P_2(t,r) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}[Q_2(t,r)W_1(r)W_2(r) + Q_3(t,r)D_3(r)]$ (ядро с $u(r)$),

$K(t,r) \equiv (W_1(t)W_2(t))^{-1}Q_3(t,r)W_1(r)W_2(r)$ (ядро с $u'(r)$).

Деля обе части (7) на $W_1(t)W_2(t)$, проведя некоторые несложные преобразования, учитывая введенные обозначения, получаем ИДУ второго порядка для $u(t)$, и объединяя это ИДУ с ДУ (2), (3), будем иметь следующую систему, эквивалентную ИДУ четвертого порядка (1):

$$\begin{cases} x'(t) + \lambda_1 x(t) = W_1(t)y(t), \\ y'(t) + \lambda_2 y(t) = W_2(t)u(t), \\ u''(t) - b_3(t)u'(t) + b_2(t)u(t) + b_1(t)y(t) + b_0(t)x(t) + \int_{t_0}^{t}[P_0(t,r)x(r) + P_1(t,r)y(r) + P_2(t,r)u(r) + K(t,r)u'(r)]dr = 0, \quad t \ge t_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Далее к системе (8) развиваем метод весовых функций [5, с. 27 — 28] и метод преобразования уравнений В. Вольтерра [5, с. 25 — 27]. Для произвольно фиксированного решения $(x(t), y(t), u(t))$ системы (8) ее первое уравнение умножаем на $\varphi_1(t)x(t)$ ($0 < \varphi_1(t)$ -некоторая весовая функция), второе уравнение - на $\varphi_2(t)y(t)$ ($0 < \varphi_2(t)$ -некоторая весовая функция), третье уравнение - на $u'(t)$, полученные соотношения сложим, интегрируем в пределах от t_0 до t, в том числе по частям, при этом вводим функции $f(t)$, $R(t, r)$, к двойному интегралу с $R(s, r)$ применяем лемму 1. 4.[6] Тогда получаем следующее тождество:

$$\varphi_1(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta_1(s)(x(s))^2ds + \varphi_2(t)(y(t))^2 + \int_{t_0}^t \Delta_2(s)(y(s))^2ds + (u'(t))^2 - 2\int_{t_0}^t b_3(s)(u'(s))^2ds + b_2(t)(u(t))^2 - \int_{t_0}^t b_2'(s)(u(s))^2ds + R(t,t_0)(U(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^t R'_s(s,t_0)(U(s,t_0))^2ds + \int_{t_0}^t R'_c(t,r)(U(t,r))^2dr - \int_{t_0}^t\int_{t_0}^s R''_{sc}(s,r)(U(s,r))^2drds \equiv$$
$$\equiv c_* + 2\int_{t_0}^t [W_1(s)\varphi_1(s)x(s) + W_2(s)\varphi_2(s)u(s)]\, y(s)ds - 2\int_{t_0}^t u'(s)\{b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^s [P_0(s,r)x(r) + P_1(s,r)y(r)]dr\}ds, \qquad (9)$$

где $\Delta_1(t) \equiv 2\lambda_1\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)$, $\Delta_2(t) \equiv 2\lambda_2\varphi_2(t) - \varphi_2'(t)$,

$U(t,r) \equiv \int_c^t f(s)u'(s)ds$, $c_* = \varphi_1(t_0)(x(t_0))^2 + \varphi_2(t_0)(y(t_0))^2 + (u'(t_0))^2 + b_2(t_0)(u(t_0))^2$.

С учетом обозначений $D_1(t)$, $D_3(t)$ имеем

$D_6(t) = 2(W_1(t)W_2(t))' + [W_1'(t) - \lambda_1W_1(t) - \lambda_2W_1(t)]W_2(t)$.

Пусть

$$W_1'(t) \le 0, (W_1(t)W_2(t))' \le 0. \qquad (W_1, W_2)$$

Тогда получаем

$$b_3(t) = a_3(t) + |D_6(t)|(W_1(t)W_2(t))^{-1} \ge 0. \qquad (b_3)$$

С учетом (b_3) заключаем, что в левой части тождества имеется неположительный член:

$$I(t) \equiv -2\int_{t_0}^t b_3(s)(u'(s))^2\, ds \le 0. \qquad (10)$$

Для преобразования интеграла (10) применим преобразования по схеме *C*) [5, с. 114—116; 6, 8].

Аналогично [5, с. 115; 6, 8] введем следующие обозначения:

$\alpha(t) \equiv b_3(t)(f(t))^{-1}$, $\beta(t) \equiv [\alpha'(t) + b_3(t)\alpha(t)](f(t))^{-1}$,

$Z(t,r) \equiv \int_c^t U(s,t_0)ds$.

Проделав преобразования, аналогичные преобразованиям (2.15)-(2.16) [6] или преобразованиям (11) — (15) [8], при этом заменив $u''(s)$ в соотношении:

$$I(t) = -2\int_{t_0}^t b_3(s)(f(s))^{-1}u'(s)f(s)u'(s)ds =$$
$$= -2\int_{t_0}^t \alpha(s)u'(s)(U(s,t_0))'ds = -2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0) +$$
$$+\int_{t_0}^t [\alpha'(s)u'(s) + \alpha(s)u''(s)]U(s,t_0)\, ds, \qquad t \ge t_0$$

на ее эквивалент из третьего уравнения системы (8):

$$u''(s) = b_3(s)u'(s) - b_2(s)u(s) - b_1(s)y(s) - b_0(s)x(s) - \int_{t_0}^s [P_0(s,r)x(r) +$$
$$+P_1(s,r)y(r) + P_2(s,r)u(r) + K(s,r)u'(r)]dr,$$

будем иметь следующий аналог тождества (2.20)[6] или тождества (16) [8] для преобразования интеграла (10):

$$I(t) = -2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0) + \beta(t)(U(t,t_0))^2 -$$
$$-\int_{t_0}^t [\beta'(s) + 2b_3(s)R(s,s)](U(s,t_0))^2ds + b_3(t)R'_c(t,t_0)(Z(t,t_0))^2 -$$
$$-\int_{t_0}^t (b_3(s)R'_c(s,t_0))'(Z(s,t_0))^2ds + \int_{t_0}^t b_3(s)R''_{cc}(t,r)(Z(t,r))^2dr -$$
$$-\int_{t_0}^t\int_{t_0}^s (b_3(s)R'_c(s,r))''_{sc}(Z(s,r))^2drds - 2\int_{t_0}^t \alpha(s)U(s,t_0)\{b_2(s)u(s) + b_1(s)y(s) +$$
$$+b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^s [P_0(s,r)x(r) + P_1(s,r)y(r) + P_2(s,r)u(r)]dr\}ds. \qquad (11)$$

Учитывая преобразования (11) из тождества (9) будем иметь следующее тождество:

$$\varphi_1(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta_1(s)(x(s))^2 ds + \varphi_2(t)(y(t))^2 + \int_{t_0}^{t} \Delta_2(s)(y(s))^2 ds +$$
$$+b_2(t)(u(t))^2 - \int_{t_0}^{t} b_2'(s)(u(s))^2 ds + (u'(t))^2 - 2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0) +$$
$$+A(t)(U(t,t_0))^2 - \int_{t_0}^{t} B(s)(U(s,t_0))^2 ds + \int_{t_0}^{t} R_c'(t,r)(U(t,r))^2 dr -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_{sc}''(s,r)(U(s,r))^2 dr\,ds + b_3(t)R_c'(t,t_0)(Z(t,t_0))^2 -$$
$$-\int_{t_0}^{t}(b_3(s)R_c'(s,t_0))'(Z(s,t_0))^2 ds + \int_{t_0}^{t} b_3(s)R_{cc}''(t,r)(Z(t,r))^2 dr -$$
$$-\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}(b_3(s)R_c'(s,r))_{sc}''(Z(s,r))^2 dr\,ds \equiv c_* +$$
$$+2\int_{t_0}^{t}[W_1(s)\varphi_1(s)x(s) + W_2(s)\varphi_2(s)u(s)]y(s)ds -$$
$$-2\int_{t_0}^{t} u'(s)\{b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) +$$
$$+\int_{t_0}^{s}[P_0(s,r)x(r) + P_1(s,r)y(r) + P_2(s,r)u(r)]dr\}\,ds +$$
$$+2\int_{t_0}^{t}\alpha(s)U(s,t_0)\{b_2(s)u(s) + b_1(s)y(s) + b_0(s)x(s) + \int_{t_0}^{s}[P_0(s,r)x(r) + P_1(s,r)y(r) +$$
$$+P_2(s,r)u(r)]dr\}\,ds, \qquad (12)$$

где $A(t) \equiv \beta(t) + R(t,t_0)$, $B(t) \equiv R_t'(t,t_0) + \beta'(t) + 2b_3(t)R(t,t)$.

ТЕОРЕМА. Пусть 1) выполняются условия (a_2), $\lambda_k > 0$, $W_k(t) > 0$ $(k = 1,2)$, (W_1, W_2), (b_3), $\varphi_k(t) > 0$ $(k = 1,2)$; $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$, $A_1(t) > 0$, $A_2(t) \geq 0$; 2) $\Delta_k \geq 0$ $(k = 1,2)$; 3) $b_2(t) \geq b_{21} > 0$, существует функция $b^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $b_2'(t) \leq b^*(t)b_2(t)$; 4) существует $const = s \in (0,1)$ такая, что $(\alpha(t))^2 \leq (1 - s)A_2(t)$; 5) существует функция $B^*(t) \in L^1(J, R_+)$ такая, что $B(t) \leq B^*(t)A_1(t)$; 6) $R_c'(t,r) \geq 0$, $R_{tc}''(t,r) \leq 0$, $(b_3(t)R_c'(t,t_0))' \leq 0$, $R_{cc}''(t,r) \geq 0$, $(b_3(t)R_c'(t,r))_{tc}'' \leq 0$; 7) $[W_1(t)(\varphi_1(t))^{\frac{1}{2}} + W_2(t)\varphi_2(t)(b_2(t))^{-\frac{1}{2}}](\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}} + |\alpha(t)|(A_1(t))^{-\frac{1}{2}} \times$
$\times (b_2(t))^{\frac{1}{2}} + [1 + |\alpha(t)|(A_1(t))^{-\frac{1}{2}}]\{|b_1(t)|(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}} + |b_0(t)|(\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}} +$
$+ \int_{t_0}^{t}[|P_0(t,r)|(\varphi_1(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(t,r)|(\varphi_2(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_2(t,r)|(b_2(r))^{-\frac{1}{2}}]dr\} \in L^1(J, R_+)$.

Тогда для любого решения $(x(t), y(t), u(t))$ системы (8) справедливы следующие утверждения:

$$x(t) = (\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (13)$$
$$\Delta_1(t)(x(t))^2 \in L^1(J, R_+), \qquad (14)$$
$$y(t) = (\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}O(1), \qquad (15)$$
$$\Delta_2(t)(y(t))^2 \in L^1(J, R_+), \qquad (16)$$
$$u^{(k)}(t) = O(1) \quad (k = 0,1). \qquad (17)$$
$$U(t;t_0) = (A_1(t))^{-\frac{1}{2}}O(1) \qquad (18)$$

Отметим, что идея введения условия 5) содержится в [9].

Сформулированную нами теорему можно доказать аналогично теореме 3.1 [5, с. 116 — 117], теореме из [10] или теореме 1 [8]. Приведем краткое доказательство нашей теоремы согласно схеме доказательства теоремы из [10]. Введем следующее обозначение:

$$V(t) \equiv \varphi_1(t)(x(t))^2 + \int_{t_0}^{t}\Delta_1(s)(x(s))^2 ds + \varphi_2(t)(y(t))^2 +$$
$$+\int_{t_0}^{t}\Delta_2(s)(y(s))^2 ds + b_2(t)(u(t))^2 + s(u'(t))^2 + A_1(t)(U(t,t_0))^2. \qquad (19)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Тогда в силу условий 1) —4) теоремы имеем, что $V(t) \geq 0$, и из (19) вытекают следующие неравенства:

$$|x(t)| \leq (\varphi_1(t))^{-\frac{1}{2}}(V(t))^{\frac{1}{2}}, \ \int_{t_0}^{t} \Delta_1(s)(x(s))^2 ds \leq V(t), \ |y(t)| \leq$$
$$\leq (\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}}(V(t))^{\frac{1}{2}}, \ \int_{t_0}^{t} \Delta_2(s)(y(s))^2 ds \leq V(t), |u(t)| \leq (b_2(t))^{-\frac{1}{2}}(V(t))^{\frac{1}{2}},$$
$$|u'(t)| \leq s^{-\frac{1}{2}}(V(t))^{\frac{1}{2}}, \ |U(t,t_0)| \leq (A_1(t))^{-\frac{1}{2}}(V(t))^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Из условий 1), 4) теоремы получаем, что

$$(1 - s)(u'(t))^2 - 2\alpha(t)u'(t)U(t,t_0) + A_2(t)(U(t,t_0))^2 \geq 0, t \geq t_0. \tag{21}$$

Учитывая тождественное представление: $(y'(t))^2 \equiv s(y'(t))^2 + +(1 - s)(y'(t))^2$, условий 1) — 6) теоремы, обозначение (19), соотношений (20), (21), из тождества (12) будем иметь следующее интегральное неравенство:

$$V(t) \leq c_* + 2\int_{t_0}^{t} \{[W_1(s)\,(\varphi_1(s))^{\frac{1}{2}} + W_2(s)\,\varphi_2(s)(b_2(s))^{-\frac{1}{2}}]\,(\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}V(s) +$$
$$+ \frac{1}{2}[b_2^*(s) + B^*(s)]V(s) + s^{-\frac{1}{2}}[|b_1(s)|(\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}} + |b_0(s)|(\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}]\,V(s) +$$
$$+s^{-\frac{1}{2}}(V(s))^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{s} [|P_0(s,r)|(\varphi_1(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s,r)|(\varphi_2(r))^{\frac{1}{2}} +$$
$$+|P_2(s,r)|(b_2(r))^{-\frac{1}{2}}]\,(V(r))^{\frac{1}{2}}dr + |\alpha(s)|(A_1(s))^{-\frac{1}{2}}\,[(b_2(s))^{\frac{1}{2}} +$$
$$+|b_1(s)|(\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}} + |b_0(s)|(\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}]\,V(s) +$$
$$+|\alpha(s)|(A_1(s))^{-\frac{1}{2}}(V(s))^{\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{s} [|P_0(s,r)|(\varphi_1(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s,r)|(\varphi_2(r))^{\frac{1}{2}} +$$
$$+|P_2(s,r)|(b_2(r))^{-\frac{1}{2}}]\,(V(r))^{\frac{1}{2}}dr\}\,ds. \tag{22}$$

К интегральному неравенству (22) применяем лемму 1 [7], учитываем условия 3), 5), 7) и получаем следующую оценку:

$$V(t) \leq c_{**}, \ t \geq t_0, \tag{23}$$

где

$$c_{**} \equiv \exp\Big(2\int_{t_0}^{\infty} \{[W_1(s)\,(\varphi_1(s))^{\frac{1}{2}} + W_2(s)\,\varphi_2(s)(b_2(s))^{-\frac{1}{2}}]\,(\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+ \frac{1}{2}[b_2^*(s) + B^*(s)] + s^{-\frac{1}{2}}[|b_1(s)|(\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}} + |b_0(s)|(\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}] +$$
$$+s^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{s}[|P_0(s,r)|(\varphi_1(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s,r)|(\varphi_2(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_2(s,r)|(b_2(r))^{-\frac{1}{2}}]\,dr +$$
$$+|\alpha(s)|(A_1(s))^{-\frac{1}{2}}\,[(b_2(s))^{\frac{1}{2}} + |b_1(s)|(\varphi_2(s))^{-\frac{1}{2}} + |b_0(s)|(\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}] +$$
$$+|\alpha(s)|(A_1(s))^{-\frac{1}{2}}\int_{t_0}^{s}[|P_0(s,r)|(\varphi_1(r))^{-\frac{1}{2}} + |P_1(s,r)|(\varphi_2(r))^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+|P_2(s,r)|(b_2(r))^{-\frac{1}{2}}]\,dr\}\,ds\Big) < \infty.$$

Из оценки (23) в силу неравенств (20) имеем все утверждения теоремы.

Из доказанной теоремы вытекают следующие предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются все условия теоремы, то для любого решения $x(t)$ ИДУ четвертого порядка (1) и его производных справедливы следующие оценки:

$$x^{(k)}(t) = \Phi_k(t)O(1) \quad (k = 0, 1, 2, 3), \qquad (24)$$

где $\Phi_0(t) \equiv (\varphi_1(s))^{-\frac{1}{2}}$, $\Phi_1(t) \equiv \Phi_0(t) + W_1(t)\,(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}}$,

$\Phi_2(t) \equiv \Phi_1(t) + |W_1'(t)|\,(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}} + W_1(t)W_2(t)$, $\Phi_3(t) \equiv \Phi_2(t) + |W_1''(t)|\,(\varphi_2(t))^{-\frac{1}{2}} + |(W_1(t)W_2(t))'| + |W_1'(t)|W_2(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются все условия теоремы и $\Phi_k(t) \to 0,\ t \to \infty$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, то любое решение ИДУ (1) является АУ.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполняются все условия теоремы и существуют $\lambda_k = const > 0$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ такие, что $\Phi_k(t) = e^{-\lambda_k t}O(1)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, то для любого решения $x(t)$ ИДУ (1) и его производных $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ справедливы оценки:

$$x^{(k)}(t) = e^{-\lambda_k t}O(1) \quad (k = 0, 1, 2, 3),$$

т. е. любое решение ИДУ (1) является ЭУ.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если выполняются все условия теоремы и при $t_0 = 0$ существуют постоянные $\eth_k, \mu_k > 0$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ такие, что $\Phi_k(t) == (t + \eth_k)^{-\mu_k}O(1)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, то для любого решения $x(t)$ и его $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ ИДУ (1) справедливы оценки:

$$x^{(k)}(t) = (t + \eth_k)^{-\mu_k}O(1) \quad (k = 0, 1, 2, 3),\ t \ge 0,$$

т. е. любое решение ИДУ (1) степенно АУ.

Отметим, что оценки (24) получаются из замен (2), (3) и из соотношений (4), (5) в силу утверждений (13), (15), (17). Из (24) непосредственно следуют следствия 1—4.

ПРИМЕР. Для ИДУ четвертого порядка:

$$x^{(4)}(t) - \frac{1}{t+1}x'''(t) - \left(\frac{25}{9} + \frac{2}{t+1} - \frac{t+1}{t+2}\right)x''(t) -$$
$$- \left(\frac{20}{9} + \frac{11}{9(t+1)} - \frac{t+1}{t+2} - e^{-t}\right)x'(t) - \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{27(t+1)} - \frac{2(t+1)}{9(t+2)} - \frac{1}{3}e^{-t} -\right.$$
$$\left. - e^{-t}\sin t\right)x(t) + \int_1^t \left\{\left[\frac{e^{-t}}{t+c+1} - \frac{8}{27}Q_3(t,r) - \frac{2e^{-t+r}\cos(tc)}{9(t+c+5)^3} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-t+\frac{r}{3}}(\sin c)^{\frac{1}{3}}}{3(t+c+2)^2}\right]x(r) + \left[\frac{e^{-t+\frac{r}{3}}(\sin c)^{\frac{1}{3}}}{(t+c+2)^2} - \frac{1}{3}Q_3(t,r) - \frac{e^{-t+r}\cos(tc)}{(t+c+5)^3}\right]x'(r) +$$
$$\left. + \left[2Q_3(t,r) - \frac{e^{-t+r}\cos(tc)}{(t+c+5)^3}\right]x''(r) + Q_3(t,r)x'''(r)\right\}dr = 0,\ t \ge 1, \qquad (1_1)$$

где $Q_3(t,r) \equiv \frac{100e^{-t+13r}}{3t-c+2}$, выполняются все условия теоремы и следствий 1, 2 при $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $W_1(t) \equiv e^{-\frac{t}{3}}$, $W_2(t) \equiv e^{-\frac{2t}{3}}$, $\varphi_1(t) \equiv e^{\sqrt{t+1}}$,

$\varphi_2(t) \equiv t + 2$, здесь $t_0 = 1$, $b_3(t) \equiv \frac{1}{t+1} + 3$, $b_2(t) \equiv \frac{t+1}{t+2}$, $b_1(t) \equiv e^{-\frac{t}{3}}$,

$b_0(t) \equiv \sin t$, $P_0(t,r) \equiv \frac{1}{t+r+1}$, $P_1(t,r) \equiv \frac{(\sin r)^{1/3}}{(t+r+2)^2}$, $P_2(t,r) \equiv$

$\equiv \frac{\cos(tr)}{(t+r+5)^3}$, $K(t,r) \equiv \frac{100e^{12c}}{3t-r+2}$, $f_2(t) \equiv e^{12t}$, $R(t,r) \equiv \frac{100e^{-12t}}{3t-r+2}$,

$\alpha(t) \equiv \left(\frac{1}{t+1} + 3\right)e^{-12t}$, $\beta(t) \equiv -3\left(\frac{1}{t+1} + 9\right)e^{-24t}$, $A(t) \equiv \frac{100e^{-12t}}{3t+1} -$

$-3\left(9 + \frac{2}{t+1}\right)e^{-24t}$, $A_1(t) \equiv \frac{99e^{-12t}}{3t+1} - 3\left(9 + \frac{2}{t+1}\right)e^{-24t} \ge \frac{e^{-12t}}{3t+1}$,

$A_2(t) \equiv \frac{e^{-12t}}{3t+1}$, $s = \frac{1}{2}$, $B^*(t) \equiv 722e^{-11t}$, и для любого решения $x(t)$ и его $x^{(k)}(t)$ $(k = 1, 2, 3)$ этого ИДУ справедливы следующие оценки:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{t+1}}O(1),\quad x'(t) = \left[e^{-\frac{1}{2}\sqrt{t+1}} + (t+2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{3}}\right]O(1),$$

$$x^{(k)}(t) = \Phi_2(t)O(1)\ (k = 2, 3),\ \text{где}\ \Phi_2(t) \equiv e^{-\frac{1}{2}\sqrt{t+1}} + (t+2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{3}} + e^{-t}.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Значит, любое решение ИДУ (1_1) и его первая, вторая, третья производные стремятся к нулюпри $t \to \infty$, т. е. АУ.

Заключение. Установлены достаточные условия асимптотической устойчивостилюбого решения линейного однородного ИДУ четвертого порядка типа Вольтерра с положительным коэффициентом третьей производной искомой функции.

Построен иллюстративный пример, показывающий естественность налагаемыхусловий.

Список литературы

1. Иманалиев М.И. Искандаров С. Специфический признак устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Докл. РАН. – 2009. – Т. 425, №4. – С. 447 - 451.

2. Искандаров С., Жапарова З. А. Специфическая экспоненциальная устойчивость решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Вестник КНУ им. Ж. Баласагына. Сер. 3. Естественно-техн. науки. Математика. Информатика. Кибернетика. – Бишкек: КНУ, 2010. – Вып.4. – С. 27-37.

3. Искандаров С. Метод нестандартного сведения к системе и экспоненциальная устойчивость линейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка //Дифференц. уравнения. – М., 2010. – Т.46, №6.– С. 898-899. (О семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений в Московском университете).

4. Iskandarov S., Japarova Z.A. On specific asymptotic stability of solutions of Volterra fourth order linear homogeneous integro-differential equations // Abstracts of the Fourth Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Baku, July 1-3, 2011. – Baku, 2011. – P. 383.

5. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных и интегральных уравнений типа Вольтерра – Бишкек: Илим, 2002. – 216 с.

6. Искандаров С. Метод весовых и срезывающих функций и асимптотические свойства решений уравнений типа Вольтерра: Автореф. дисс… докт. физ.-мат.наук: 01.01.02 / С. Искандаров. – Бишкек, 2003. – 34 с.

7. Ведь Ю.А. Достаточные признаки ограниченности решений линейных интегро- дифференциальных уравнений // Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям в Киргизии. – Фрунзе: Илим,1973. – Вып.9. – С.68-103.

8. Искандаров С. Асимптотическая устойчивость двух классов интегро-дифференциальных уравнений второго порядка типа Вольтерры // Дифференц. уравнения. – М., 2008. – Т. 44, №7. – С. 883-895.

9. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Специфическая оценка решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения первого порядка // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. матем., мех., информ. – Алматы, 2008. – №3. – Спец. выпуск. – С. 110-115.

10. Искандаров С., Шабданов Д.Н. Об одном специфическом

признаке устойчивости решений линейного однородного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Исслед.по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.34. – С. 44-48.