

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ МЕТОДОМ РОТЕ

Роте ыкмасы менен тайыз суу теңдемелеринин аналитикалык чечими The analytical solution of shallow water equations by the Rothe's method

Аннотация: Для одномерной системы нелинейных уравнений гиперболического типа – уравнений мелкой воды в дивергентной форме получено доказательство однозначной разрешимости методом Роте. Дифференциально-разностная задача метода Роте приведена в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в дивергентной форме, аналогичной исходным нелинейным уравнениям мелкой воды. Поскольку поведение системы определяется собственными числами, то исследуется однородная система ОДУ (без правой части). Из нее следует квадратное уравнение, характеризующее неустойчивое поведение системы в особых точках. Результаты представлены теоремой и доказательством, подтверждающими справедливость выводов. Выведена формула, обобщающая критерий Куранта-Фридрихса-Леви на нелинейные уравнения мелкой воды. Интервал времени ограничен неравенством из-за сингулярности, но расстояние до центра неустойчивого узла рассчитывается по полученной формуле.

Аннотация: Сызыктуу эмес бир өлчөмдүү гиперболалык түрдөгү теңдемелеринин тутуму үчүн – дивергент түрүндөгү тайыз суу теңдемелери, Роте ыкмасы менен уникалдуу маанилештик далили алынат. Роте методунун дифференциалдык-айырма маселеси, кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы алынгандай болуп өзгөрүлөт, ал сызыктуу эмес тайыз суулардын теңдемелеринин баштапкы системасына окшош, дивергент формасын алат. Системанын жүрүм-туруму, өздүк маанилер менен аныкталгандыктан, кадимки дифференциалдык теңдемелердин бир тектүү тутуму (оң жагы жок) иликтенет. Мындай тутумдан, өзгөчө чекиттердеги туруксуз жүрүм-турумун мүнөздөөчү, квадраттык теңдеме келип чыгат. Алынган жыйынтыктар, теорема жана далилдөөлөр аркылуу көрсөтүлүп, негиздүүлүгүн ырастоочу далил менен келтирилген. Курант-Фридрихс-Леви критерийин кенейтүүчү, сызыктуу эмес, тайыз суунун теңдемелерине, жалпылаган формула алынган. Убакыт аралыгы, сингулярдуулукка байланыштуу барабарсыздык менен чектелген, бирок туруксуз түйүндүн борборуна чейинки аралык, алынган формула аркылуу эсептелет.

Abstract: For a one-dimensional system of nonlinear hyperbolic partial differential equations – the shallow water equations in conservative form, a proof of unique solvability by the Rothe's method is obtained. The differential-difference problem of the Rothe's method is transformed so that a system of ordinary differential equations is obtained, which has a conservative form similar to the system of nonlinear shallow water equations. Since the behavior of the system is determined by eigenvalues, a homogeneous system of ordinary differential equations (without the right part) is investigated. From such a system follows a square equation that characterizes its unstable behavior at singular points. The results are presented by a theorem and a proof is given confirming the validity of the conclusions. An formula is derived that generalizes the Courant-Friedrichs-Lewy condition on the nonlinear shallow water equations. The time interval is limited by the inequality due to the singularity, but the distance to the center of the unstable node calculated by the formula.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, формула Куранта-Фридрихса-Леви, цунами, волна-убийца.

Урунттуу сөздөр: тайыз суунун теңдемелери, Курант-Фридрихс-Леви формуласы, цунами, ачуулану толкундары.

Keywords: shallow water equations, formula of Courant-Friedrichs-Lewy, tsunami, rogue wave.

Уравнения мелкой воды описывают длинные волны, цунами, волны-убийцы и являются исходными для вывода уравнений Кортевега-де Фриза, Бюргерса с солитонным решением. Проблема интегрируемости таких уравнений освещена в [1], [2] и обзоре А. Константина [3]. Групповой анализ 1D модифицированных [4] и стационарных [5] уравнений носит вспомогательный характер, как и уравнение Камассы-Холма [6], так как не продвигает аналитическое решение исходных уравнений.

Из-за нелинейности уравнения мелкой воды решают численными методами. Солитон, наблюдаемый в опыте [7], воспроизведен численным решением регуляризованных уравнений [8], [9]. При числе Куранта $\beta \sim 0.05-0.1$ отделено 16% солитонных решений. Данный подход применен в [10] для одномерной (1D) модели двухслойной мелкой воды с числом Куранта $\beta=0.1$. Поверхность солитона в [11] исследовалась в точках перегиба, поэтому найдем связь точек перегиба с числом Куранта β .

В данной работе с целью получения аналитического решения уравнения мелкой воды в дивергентной форме исследуются методом Рунге для выявления особенностей в точках перегиба, аналогично схеме [11].

В области $G=\{(t,x): t \in [0,T]; x \in [0,\infty)$ необходимо определить глубину $h(t,x)$ и скорость $u(t,x)$ потока постоянной ширины, описываемых системой уравнений

$$\frac{\partial \partial h u u}{\partial \partial \partial \partial} + \frac{\partial \partial h u u^2}{\partial \partial \partial \partial} + g g^{-2} + h \partial \partial \partial \partial = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \partial h}{\partial \partial \partial \partial} + \frac{\partial \partial h u u}{\partial \partial \partial \partial} = f f(\partial \partial, \partial \partial) \quad (2)$$

с начальными и граничными условиями

$$h(0, \partial \partial) = h_0(\partial \partial), u u(0, \partial \partial) = u u_0(\partial \partial), \quad \partial \partial \in [0, \infty), \quad (3)$$

$$h(\partial \partial, 0) = \eta \eta(\partial \partial), u u(\partial \partial, 0) = \varphi \varphi(\partial \partial), \quad \partial \partial \in (0, T T], \quad (4)$$

$h_0(0)=\eta(0)$ и $u_0(0)=\varphi(0)$ – известные условия согласования, $V^2=C^2R$ – квадрат модуля скорости по формуле Шези, C – коэффициент сопротивления Шези, R – гидравлический радиус, $g=9.81$ м/с², $z(t, x)=h+I(x)$ – уровень свободной поверхности, $I(x)$ – уклон дна.

Преобразуем задачу (1)-(4) в дифференциально-разностную задачу с шагом времени $\Delta t=t_n-t_{n-1}$ и получим в $G_n=\{(\Delta t,x): \Delta t \in [t_{n-1},t_n]; x \in [0,\infty)\} \in G$

$$\frac{(h u u)_{m m}(\partial \partial) - (h u u)_{m m-1}(\partial \partial)}{\Delta \partial} + \frac{d d (h u u^2)_{m m} g g 2}{d d V_{m m-1}^2} = -g h \frac{d d}{d d} \quad (h u u) \quad (5)$$

;

$m-1$

$$\frac{h_{nn}(\partial\partial) - h_{nn-1}(\partial\partial)dd(huu)_{nn}}{\Delta\partial\partial} + \frac{dd\partial\partial}{dd\partial\partial} = ff_{nn}(\partial\partial); \quad (6)$$

$$h_{nn-1}(0,\partial\partial) = h_0(\partial\partial), \quad uu_{nn-1}(0, \partial\partial) = uu_0(\partial\partial), \quad nn = 1; \quad (7)$$

$$h(\partial\partial_{nn}, 0) = \eta\eta_{nn}, \quad uu(\partial\partial_{nn}, 0) = \varphi\varphi_{nn}, \quad nn = 1, \dots, NN. \quad (8)$$

В задаче (5)-(8) дополним уравнения (5)-(6) до дивергентной формы. В уравнении (5) $(hu)_n(x)/\Delta t$ умножим на $u_n(x)/u_n(x)$, но в уравнении (6) $h_n(x)/\Delta t$ умножим на $u_n(x)/u_n(x)$. Дифференциально-разностные уравнения (5)-(6) с неизвестными $p=(hu^2)_n(x)$ и $q=(hu)_n(x)$ превратились в линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{ddpp_{nn}}{dd\partial\partial} + \frac{gg}{VV_{nn-1}} + \frac{1}{uu_{nn}\Delta\partial\partial pp_{nn}(\partial\partial)} = \frac{\overline{qq_{nn-1}}}{\Delta\partial\partial} - gg h \frac{dd\partial\partial}{dd\partial\partial_{nn-1}}, \quad (9)$$

$$\frac{ddqq_{nn}qq_{nn}(\partial\partial)}{dd\partial\partial} + = ff_{nn}(\partial\partial) \frac{uu_{nn}\Delta\partial\partial}{h_{nn-1}(\partial\partial)} + \frac{\quad}{\Delta\partial\partial}, \quad (10)$$

с начальными условиями на границе $x=0$

$$pp_{nn}(\partial\partial_{nn}, 0) = (\eta\eta\varphi\varphi^2)_{nn}; \quad qq_{nn}(\partial\partial_{nn}, 0) = (\eta\eta\varphi\varphi)_{nn}, \quad (11)$$

где $n=1, \dots, N$, $(\eta\varphi^2)_n$ и $(\eta\varphi)_n$ получены из условий (7) и (8).

В уравнениях (1)-(2) и (9)-(10) искомые функции u и h , а не p и q . Коэффициенты уравнений (9)-(10) положительные, но уравнения (1)-(2) гиперболического типа. Поэтому искомым функциям $u_n(x)$ и $h_n(x)$ соответствует система ОДУ с иными коэффициентами. Чтобы решить этот вопрос, рассмотрим систему уравнений (9)-(10) без правой части. В таком случае задача (9) - (11) эквивалентна интегральным уравнениям

$$(huu^2)_{nn}(\partial\partial) \frac{g}{xx} + \frac{1}{\quad} = (\eta\eta\varphi\varphi^2)_{nn} e^{-\int_0^V V_{nn-1}^2(\xi\xi) uu_{nn}(\xi\xi)\Delta t dd\xi\xi}, \quad (12)$$

$$(huu)_{nn}(\partial\partial) \frac{\quad}{xx dd\xi\xi} - \frac{\quad}{-\int_0^V uu_{nn}(\xi\xi)\Delta t} = (\eta\eta\varphi\varphi)_{nn} e \quad (13)$$

Применим метод исключения к уравнениям (12) - (13) и получим

$$\begin{aligned}
 & uu_{nn}(\partial\partial) \\
 & \quad \quad \quad \frac{xx}{g} \frac{dd}{dd} \frac{\xi\xi}{\xi\xi} \\
 & = \varphi\varphi_{nn} e^{-\int 0VV_{nn-1}^2(\xi\xi)},
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 & h_{nn}(\partial\partial) \\
 & \quad \quad \quad \frac{xx}{\int} \frac{g}{g} \frac{1}{1} \\
 & = \eta\eta_{nn} e^{0VV_{nn-1}^2(\xi\xi)} uu_{nn}(\xi\xi) \Delta t \frac{dd}{dd} \frac{\xi\xi}{\xi\xi},
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Поскольку интегральные уравнения (14) - (15) выписаны для искомым $u_n(x)$ и $h_n(x)$, то им соответствует следующая система линейных ОДУ

$$\begin{aligned}
 & \frac{dduu_{nn}}{dd\partial\partial} + \frac{g}{VV_{nn-1}^2}(\partial\partial) uu_{nn}(\partial\partial) \\
 & \quad \quad \quad = 0,
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{ddh_{nn}}{dd\partial\partial} + uu_{nn}(\partial\partial) \Delta\partial\partial - \frac{g}{VV_{nn-1}^2}(\partial\partial) h_{nn}(\partial\partial) \\
 & \quad \quad \quad = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

В уравнении (15) экспоненциальный член меняет знак. По одну сторону от некоторой точки максимума $gV^{-2} > 1/u_n(x)\Delta t$, но по другую – $gV^{-2} < 1/u_n(x)\Delta t$, что обусловлено гиперболическим типом уравнений (1)-(2) и выражается переменной знака уравнения (17).

Формула Шези задана средним квадратом модуля скорости $V^2 = C^2 R$, поэтому момент t_{n-1} завершается осреднением: $V_{n-1} = \pm \text{const}$, $H = V^2/g = \text{const}$ с последующей подстановкой (14) в (15). Параметр β введен согласно осреднению, поэтому выражения (14)-(15) интегрируемые, а лагранжевая скорость $c = (gH)^{1/2}$ равна V в формуле Шези. Значит, в момент времени t_n

$$\begin{aligned}
 uu_{nn}(\partial\partial) & = \varphi\varphi_{nn} e^{-xx/HH_{nn-1}}, \\
 & \quad \quad \quad \frac{HH_{nn-1}xx}{-1-1-\beta\beta} \frac{HH_{nn-1}eexx/HH_{nn}}{HH_{nn-1}eexx/HH_{nn}} \\
 \partial\partial_{nn}(\partial\partial) & = \eta\eta_{nn} e^{\varphi\varphi_{nn}\Delta t} + II(\partial\partial).
 \end{aligned}$$

В случае, когда уклон дна $I=0$, уровень свободной поверхности $z_n(x)$ зависит только от экспоненциального члена

$$\begin{aligned}
 uu_{nn}(\partial\partial) & = e e^{HH_{nn-1}-\beta\beta} \frac{xx}{xx} \frac{HH_{nn-1}}{HH_{nn-1}} eexx/HH_{nn-1-1}, \quad II \\
 & \quad \quad \quad = \varphi\varphi_{nn} \Delta\partial\partial.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

С учетом переноса координат построим график функции $u_n(x)$, далее $y(x)$, варьируя H_{n-1} для трех значений $\beta=2$, $\beta=3$ и $\beta=4$ так, что $l=1$, $\beta=H_{n-1}$ (рис. 1).

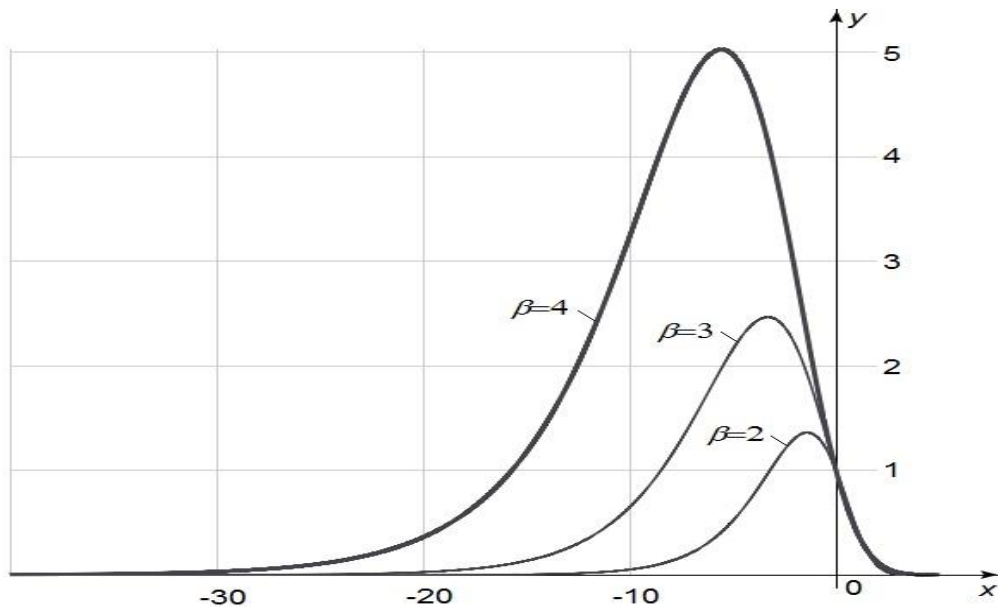


Рис. 1. График функции $y(x)$ для различных H_{n-1} при $l=1$.

Для сравнения на рис. 2 приведен график $y(x)$ для $\beta=1$, $\beta=3$ и $\beta=0.1$, где $\beta=H_{n-1}/l$, но $H_{n-1}=1$. Функция $y(x) \in G$, если $\beta < 1$, т.е. расположена справа от оси ординат и не закреплена условиями на границе $x=0$. Следовательно, поведение $y(x)$ зависит от параметра β , который предстоит определить. Функция $y(x)$ удовлетворяет закону сохранения энергии mV^2 (здесь m – масса), так как $H=V^2/g$. Ввиду того, что при $\beta < 1$ $y(x)$ проявляется, как одиночная волна, то она подходит для описания волн-убийц в силу связи с $c=(gH)^{1/2}$.

Решением является уединенная волна, максимум амплитуды и форма свободной поверхности которой порождены гиперболичностью. В произвольный момент времени t_n решение зависит от коэффициентов системы (16)-(17). Поэтому требуется найти такой шаг времени Δt в зависимости от параметра β , чтобы картина решения в момент t_n стыковалась с картиной предыдущего момента t_{n-1} . Тогда наблюдаемые картины следуют подряд, не прерываясь во времени, и последовательно развертывают бег волны по всей области G (см. рис. 3). Форму свободной поверхности в зависимости от параметра β устанавливает теорема.

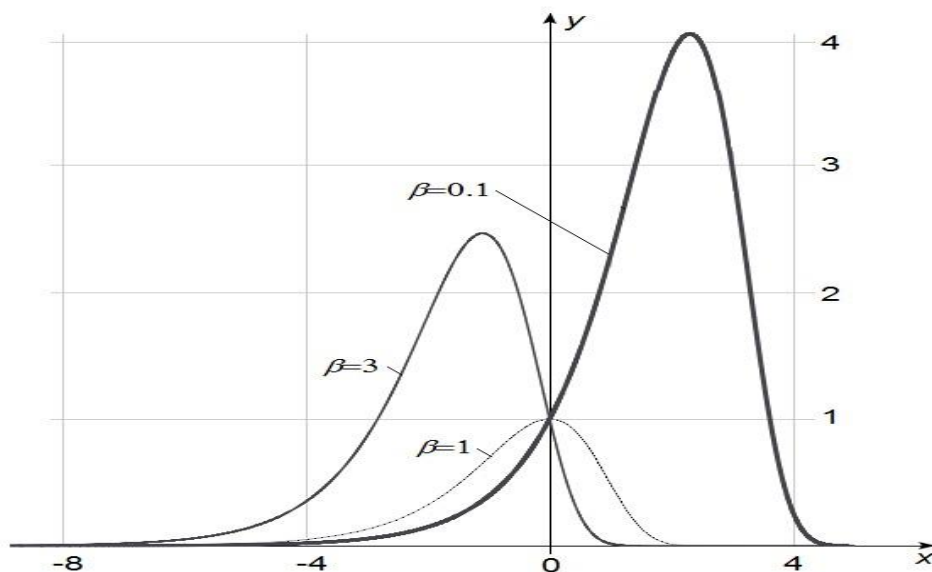


Рис. 2. График функции $y(x)$ для различных l при $H_{n-1}=1$.

Теорема. Заданная по (18) функция $y(x)$ – солитон в G , если параметр $\beta \leq (3 - \sqrt{5})/2$.
Доказательство. Найдем производную функции $y(x)$, т.е.

$$y y'(\partial \partial) = \frac{l - \beta \beta \beta_{nn-1} e^{x/H_{n-1}}}{\beta \beta_{nn-1} l l} y y(\partial \partial).$$

Выражение в скобках приравняем нулю и разложим $e^{x/H}$ в ряд Тейлора:

$$\frac{l}{\beta \beta \beta_{nn-1}} = e^{x/H_{n-1}}; \tag{19}$$

$$\frac{l}{\beta \beta \beta_{nn-1}} = 1 + \frac{\partial \partial}{\beta \beta_{nn-1}} + \frac{\partial \partial^2}{2 \beta \beta_{nn-1}} + \dots$$

В силу того, что $l = \phi_n \Delta t$, $H = V^2/g$, в первом приближении шаг времени $\Delta t < \beta V^2/g \phi_n$.
С учетом двух членов ряда получим неравенство

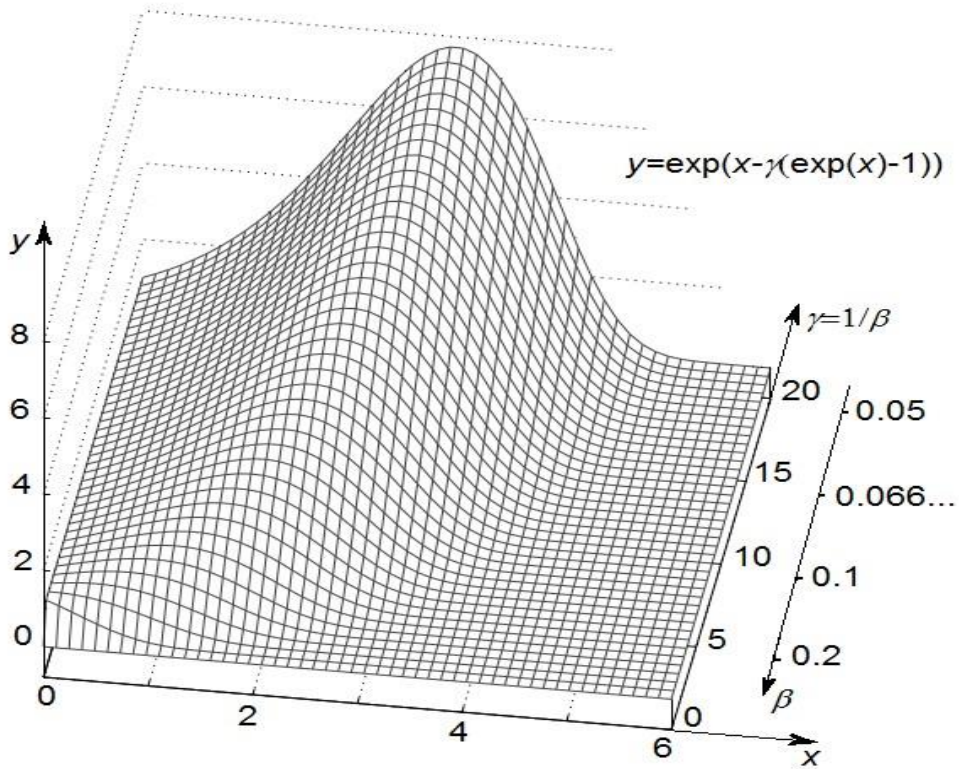


Рис. 3. Влияние параметра β на $y(x)$, где $H_{n-1}/l=1$.

$$\Delta \partial \partial < \frac{\beta \beta \partial \partial \beta \beta V V_{nn-12}}{\phi \phi_{nn} g g \phi \phi_{nn}} + \dots = k k \partial \partial + b b, \tag{20}$$

где первое слагаемое совпадает с условием Куранта $a\Delta x > |u|\Delta t$, ϕ_n – скорость, согласно условию (8), $a = \text{const}$ в условии Куранта.

Три члена ряда Тейлора дают уравнение эллипса, а замена $H = c^2/g$ – биквадратное уравнение для лагранжевой скорости длинных волн

$$4 + \frac{gg(\partial\partial - ll/\beta\beta)cc_{nn2-1} + 12gg2\partial\partial_2}{cc_{nn-1}} = 0, \quad \overline{cc_{12,2}} = 2gg\gamma\gamma (ll - \beta\beta\partial\partial) \pm ll_2 - 2\beta\beta ll\partial\partial - \beta\beta_2\partial\partial_2.$$

Если $l > \beta x$, то имеем два положительных корня c^2 . Пара скоростей $\pm c_{1,2}$ образуется в верхнем слое H_1 , но пара $\pm c_{3,4}$ – в нижнем слое H_2 . Причем, c_1 на поверхности и c_4 вблизи дна направлены в одну сторону, но между ними – c_2 и c_3 сонаправлены в другую сторону. Такое двухслойное течение выделено в отдельные уравнения мелкой воды [10].

Комплексно-сопряженные корни с отрицательной действительной частью $\forall \beta x > l$ означают появление волн. Тогда условие Куранта $a\Delta x > |u|\Delta t$ справедливо, если скорость u подверглась операции осреднения – $|u|$, т.е. сглаживанию волнового процесса $\forall \beta x > l$. Остается найти параметр β , который найдем с помощью второй производной $y''(x)$ в точке перегиба.

Максимум на куполе солитона и минимум на основании сопрягаются на его боковой поверхности в точке перегиба. Вторая производная с учетом максимума и точки перегиба

$$yy''(\partial\partial) = \frac{ll - \beta\beta ee_{xx}/HH_{nn-1}}{\beta\beta_{nn-1}ll} - \frac{2\beta\beta ee_{xx}/HH_{nn-1}}{\beta\beta_{nn-1}ll} - yy(\partial\partial) \leq 0.$$

Отметим, что исследуя точки перегиба, находим наименьший шаг Δx , где крутизна боковой поверхности наибольшая. Раскрыв формулу, в отличие от уравнения эллипса, получим уравнение вырожденной гиперболы для разыскания корней β :

$$ee_{xx}/HH_{nn-1} \beta\beta_{nn-1}^2 - \beta\beta_2 - 3 \frac{ee_{xx}/HH_{nn-1}}{2\beta\beta_{nn-1}} ll_2 = 0; \quad \beta\beta_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \beta\beta_{nn-1}$$

Переписывая решение в виде

$$\frac{ll}{\beta\beta_{nn-1}} = \frac{2}{3} \frac{ee_{xx}/HH_{nn-1}}{\beta\beta_{nn-1}}$$

и сравнивая с формулой (19), имеем $\beta_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$: $\beta_1 \cong 2.618$, $\beta_2 \cong 0.382$.

Функция $y(x)$ вне G , если $\beta \geq \beta_1$; на рис. 1 и 2 слева от оси ординат. Условие максимума $y''(x) < 0$ справедливо в G для неравенства (20), если $0 < \beta \leq \beta_2$; на рис. 2-3 справа от оси ординат. При $\beta = \beta_2$ имеем уравнение вырожденной гиперболы, поэтому $y(x)$ имеет точки перегиба, так как $y''(x) = 0$. Значит, при наличии точек перегиба решение существует в виде уединенной волны и выражает гиперболический тип уравнений мелкой воды, когда $\beta \leq (3 - \sqrt{5})/2 \cong 0.382$. ■

Список цитируемых источников:

1. Ньюелл А.С. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989, 324 с.

2. Birkhoff G. Numerical fluid dynamics // SIAM Rev., 1983, V.25. № 1. P. 1-34.
3. Constantin A. Nonlinear water waves: introduction and overview// Phil. Trans. R. Soc. A, 2018, V. 376, 20170310, Issue 2111. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.2017.0310>
4. Sekhar T. R., Bira B. Wave Features and Group Analysis for Axisymmetric Flow of Shallow Water // International J. of Nonlinear Science, 2012, V. 14, № 1. P. 23-30.
5. Черевко А.А., Чупахин А.П. Уравнения модели мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере 1. Вывод и общие свойства // Прикладная механика и техническая физика. 2009, Т. 50, № 2. С. 24-36.
6. Geyer A., Quirchmayr R. Traveling wave solutions of a highly nonlinear shallow water equation // Discrete and Continuous Dynamical Systems/ Series A, 2018. V. 38, Issue 3. P. 1567-1604.
7. Елизарова Т.Г., Истомина М.А., Шелковников Н.К. Формирование уединенной волны в кольцевом аэрогидроканале // Математ. Моделирование, 2012, Т. 24, № 4, С. 107-116.
8. Булатов О.В., Елизарова Т.Г. Регуляризованные уравнения мелкой воды и эффективный метод численного моделирования течений в неглубоких водоемах // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ., 2011, Т. 51, № 1, С. 170-184.
9. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
10. Елизарова Т.Г., Иванов А.В.. Квазигазодинамический алгоритм численного решения двухслойных уравнений мелкой воды // Препринт ИПМ им. М.Келдыша, 2016, № 69, 27 с.
11. Тукембаев Ч.А.. Решение уравнения Лъенара в особой точке // Исслед. по интегродифференциальным уравнениям. Вып.45. Бишкек: Илим, 2012, С. 113-122.

Рецензент: *Асанкулова М.- доктор физико-математических наук, доцент Института математики НАН КР.*