ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра прикладной математики и информатики

Л.С. Красниченко, Э. Сейдакмат кызы

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Бишкек 2021

УДК 519.6
ББК 22.18
К 78

Рецензенты:
А. Керимбеков, д-р физ.-мат. наук, проф. КРСУ,
Е.Ю. Савченко, канд. техн. наук, проф. УНПК МУК,
Ж.А. Мусакулова, канд. техн. наук, доцент УНПК МУК

Рекомендовано к изданию Ученым советом КРСУ

Красниченко Л.С., Сейдакмат кызы Э.
К 78 МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ: учебное пособие. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2021. 110 с.

ISBN 978-9967-19-813-5

Учебное пособие содержит основной теоретический материал по основным методам оптимальных решений, а также рекомендации по использованию этого материала для решения практических задач, приведено большое количество решенных задач. Для самостоятельного решения предложены типовые задачи по всем разделам.

Круг вопросов и задач настоящего пособия определяется действующей программой подготовки бакалавров по направлению «Экономика».

Для студентов, аспирантов и преподавателей вузов.

УДК 519.6
ББК 22.18
ISBN 978-9967-19-813-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методы оптимальных решений – математическая дисциплина, занимающаяся изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения.

В общем виде математическая постановка экстремальной задачи состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ при условиях $g(x_1, x_2, \ldots, x_m) = b_i, (i = 1, m)$, где f и g – заданные функции, а b – некоторые действительные числа. В зависимости от свойств функций f и g, методы оптимальных решений можно рассматривать как ряд самостоятельных дисциплин, занимающихся изучением и разработкой методов решения определенных классов задач.

Прежде всего, задачи делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции f и g_i линейные, то соответствующая задача является *задачей линейного программирования*. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является *задачей нелинейного программирования*.

Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ. В пособии рассматриваются графический и Симплекс-метод для решения исходных и двойственных задач линейного программирования. Включены различные формы математического моделирования задач линейного программирования и процедуры применения Симплекс-метода различных модификаций – как с искусственным базисом, так и модифицированный.

В разделе «Транспортные задачи» рассматриваются задачи, решаемые распределенным Симплекс-методом, применяемым к двойственной задаче. В качестве альтернативного способа нахождения оптимального плана перевозок применяется метод «Дифференциальные ренты».

Выделяется отдельный класс задач динамического программирования, процесс нахождения решения которых является многоэтапным. В главе «Методы динамического программирования» представлены вводные определения и вывод функциональных выражений для проведения итерационного процесса с целью определения экстремума целевой функции. Ядро этой темы составляют уравнения Беллмана, адаптированные для задач «распределения ресурсов».

Приведены основные методы, используемые в настоящее время в теоретических и прикладных работах по решению экономических задач.

При подготовке методического пособия использован опыт преподавания общего курса «Методы оптимальных решений» для студентов второго курса экономического факультета Кыргызско-Российского Славянского университета.

Весь приведенный основной теоретический материал сопровождается большим количеством примеров с решениями. В конце каждой темы предложены примеры для самостоятельного решения.

При составлении задач был использован ряд известных опубликованных источников.

Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. Сведения из линейной алгебры

Координатная форма записи СЛАУ

Будем рассматривать системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными переменными (m может быть равно n) вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; a_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots, n$ – коэффициенты, некоторые действительные числа; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены.

Матричная форма записи СЛАУ

AX = B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – основная матрица;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица – столбец переменных системы;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – матрица – столбец свободных членов.}$$

Если к матрице A добавить в качестве *(n+1)-го* столбца матрицу-столбец свободных членов, то получим так называемую ***расширенную матрицу*** системы линейных уравнений:

$$D = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ – расширенная матрица.}$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений называют набор значений неизвестных переменных, обращающий все уравнения системы в тождества.

1. Если система уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***.
2. Если система уравнений решений не имеет, то она называется ***несовместной***.
3. Если СЛАУ имеет единственное решение, то ее называют ***определенной***; если решений больше одного, то – ***неопределенной***.
4. Решение системы линейных уравнений называется базисным, если свободные переменные ($n > m$) обращаются в ноль.

Векторы-столбцы базисного решения представляют собой единичные векторы и образуют ***базис***, а соответствующие им переменные называются ***базисными***. Для расчета единичных векторов используют метод Жордана–Гаусса.

Опорным решением называется базисное неотрицательное решение.

Метод Жордана–Гаусса – это метод полного исключения неизвестных. Он состоит в том, что на каждом шаге неизвестная $x_i, (i = 1,...,n)$ исключается из всех уравнений, расположенных как выше, так и ниже ключевого (разрешающего). В результате расширенная матрица системы приводится к виду, содержащему некоторое количество столбцов, состоящих из всех нулей, кроме одного элемента, равного единице.

Алгоритм метода:

1) на каждом шаге выбирается ключевая (разрешающая) строка (чаще всего на первом шаге – первая, на втором – вторая и т. д.) и в ней – разрешающий элемент, не равный нулю (выбор произволен, но чаще всего – элемент главной диагонали) (рисунок 1.1)

2) элементы разрешающей строки делят на разрешающий элемент;

3) в разрешающем столбце, кроме разрешающего элемента, равного единице, пишут нули;

4) строки с нулями в разрешающем столбце и столбцы с нулями в разрешающей строке переписывают без изменения;

5) пересчет всех остальных элементов матрицы ведут по правилу (прямоугольника) (рисунок 1.2).

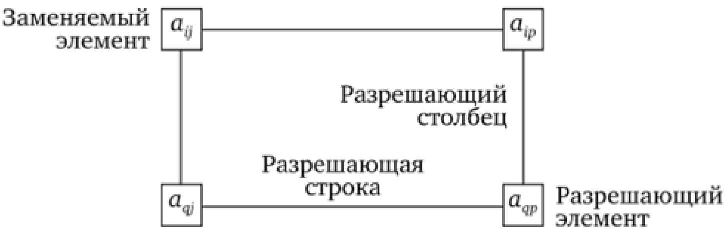


Рисунок 1.1 – Выбор разрешающего элемента

$$a'_{kl} = \frac{\begin{array}{|cc|} \boxed{a_{ij}} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{array}}{\boxed{a_{ij}}} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj}}{a_{ij}}$$

Рисунок 1.2 – Схема пересчета элементов матрицы

При решении системы из m линейных уравнений с n неизвестными могут быть следующие случаи:

1) $rang\,A \neq rang\,D$, где A – матрица системы; B – расширенная матрица.

В этом случае ***система несовместна***. Несовместность системы в ходе гауссовских преобразований обнаруживается в том случае, когда в расширенной преобразованной матрице получается противоречивая строка – слева от вертикальной черты получены нули, а справа – число, отличное от нуля;

2) $rang\,A = rang\,D = m < n,$ где n – число неизвестных системы.

В этом случае ***система совместна, но не определена*** (имеет бесконечное множество решений). В такой системе m неизвестных будут базисными, а (*n-m*) – свободными. Разрешая систему относительно *m* базисных неизвестных, получают общее решение системы. В качестве *m* базисных неизвестных системы можно взять любые m неизвестных, но только такие, чтобы определитель матрицы из коэффициентов при них (т. е. базисный минор) был отличен от нуля;

3) $rang\,A = rang\,D = m = n.$

В этом случае ***система совместна и определена***, т. е. имеет единственное решение.

1.2. Постановки задач линейного программирования

Задача минимизации функции n переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на некотором множестве $U \in E_n$, не совпадающем со всем пространством E_n и заданном с помощью ограничений (равенств и (или) неравенств) на координаты x_j точки $x \in E_n$, называется задачей *математического программирования*. При этом функцию $f(x)$ называют *целевой функцией*, а множество U – *доступным множеством*.

Частным случаем задачи математического программирования является *задача линейного программирования*, состоящая в минимизации линейной целевой функции $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ на множестве $U \in E_n$, заданной системой линейных ограничений (равенств и/или неравенств) на координаты x_j, $j = 1, 2, \dots, n$.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом.

Среди точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$, *удовлетворяющих ограничениям*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \; ; \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \ell + 1, \dots, \mathrm{m}; \tag{1.2}$$

$$x_j \ge 0 \;, \tag{1.3}$$

найти те, в которых функция $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ *принимает минимальное значение, и определить это значение.*

Отметим, что в условии задачи линейного программирования могут содержаться неравенства и противоположного, чем в (1.2), знака, однако такие неравенства легко сводятся к виду (1.2) умножением на –1.

Если в условии задачи линейного программирования не содержится ограничения-неравенства (1.2), т. е. в (1.1) $l = m$, то она называется *задачей линейного программирования в каноническом виде*.

Вводя дополнительные переменные $x_{n+i} \geq 0$, $i = \ell + 1, \ldots, \mathrm{m}$, ограничения-неравенства (1.2) можно записать в виде равенств: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$, $i = \ell + 1, \ldots, \mathrm{m}$.

Таким образом, любая задача линейного программирования может быть записана в каноническом виде:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}, \tag{1.5}$$

$$x_j \geq 0. \tag{1.6}$$

Часто используется *векторная запись* задачи (1.4)–(1.6):

$$f(x) = (c, x) \to \min, \tag{1.7}$$

$$AX = B, \tag{1.8}$$

$$X \geq 0, \tag{1.9}$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор неизвестных; $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор коэффициентов целевой функции из (1.4); $A = (a_{ij})$ – прямоугольная матрица размера $m \times n$; $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ – вектор правых частей системы (1.5) а $X \geq 0$ – краткая запись условия не отрицательности (1.6).

Математические модели многих важных для практики задач оптимизации представляют собой задачи линейного программирования.

Определение 1.1. Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.10)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=1,\ldots,\mathrm{k} \;, \qquad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=k+1,\ldots,\mathrm{m} \;, \qquad (1.12)$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\ldots \ell, \ell+1,\ldots,n \;, \qquad (1.13)$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины и $k \le m$.

Определение 1.2. Функция (1.10) называется *целевой функцией* (или *линейной формой)* задачи (1.10)–(1.13), а условия (1.11)–(13) – *ограничениями* данной задачи.

Определение 1.3. Стандартной (или симметричной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.10) при выполнении условий (1.11) и (1.13), где $k = m$ и $l = n$.

Определение 1.4. Канонической (или основной) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1.10) при выполнении условий (1.12) и (1.13), где $k = 0$ и $l = n$.

Определение 1.5. Совокупность чисел $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\in E_n$, удовлетворяющих ограничениям задачи (1.11)–(1.13), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 1.6. План $X^*=\left(x_1^*,x_n^*,\ldots,x_n^*\right)$, при котором целевая функция задачи (1.10) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным.*

Значение целевой функции (1.10) при плане X будем обозначать через $F\left(X\right)$. Следовательно, X^* – оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F\left(X\right) \leq F\left(X^{*}\right)$ (соответственно $F\left(X\right) \geq F\left(X^{*}\right)$).

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно уметь:

Во-первых, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации.

Решение. В том случае, когда требуется найти минимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$, поскольку $\min F = -\max\left(-F\right)$.

Во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот.

Решение. Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид "$\leq$", можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида "$\geq$" – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

преобразуется в ограничение-равенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+1} \geq 0,$$

а ограничение-неравенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

– в ограничение-равенство:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1, \quad x_{n+1} \geq 0.$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

В-*третьих*, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Решение. Если переменная x_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k, приняв $x_k = u_k - v_k$.

Пример 1.1. Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу:
найти максимум функции

$$F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \quad (*)$$

при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 .$$

Решение. В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида "$\leq$" соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида "$\geq$" вычитается. В результате, ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6 \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8 \end{cases} \quad (**)$$

$x_1, \ldots, x_9 \geq 0$.

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию (*) при условиях (**).

Пример 1.2. Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 6,5x_1 - 7,5x_3 + 23,5x_4 - 5x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12 \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$.

Решение. Методом последовательного исключения неизвестных сведем данную задачу к следующей:
найти максимум функции $F = 6,5x_1 - 7,5x_3 + 23,5x_4 - 5x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26 \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20 \end{cases}$$

$x_1, \ldots, x_5 \geq 0$.

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = x_3 + 2x_4$ при условиях:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \le 6 \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26 \\ x_3 + 11x_4 \le 20 \end{cases}$$

$x_3, x_4 \ge 0$.

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Преобразовать следующие задачи линейного программирования в каноническую форму:

$$z = 4x_1 + 2x_2 \to \min$$

1. $$\begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 4x_2 \ge 7 \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 5 \end{cases}$$

$x_1 \le 0, \quad x_2 \le 0.$

$$z = 2x_1 - 2x_2 \to \min$$

2. $$\begin{cases} -4x_1 = 5 \\ -2x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 4x_2 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

$$F = x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 \to \min$$

$$3.\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Преобразовать следующие задачи линейного программирования в стандартную форму:

$$F = -x_1 - 3x_4 + 4x_5 \to \max$$

$$4.\ \begin{cases} 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 8 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

$$F = -4x_1 - 4x_2 - 4x_4 \to \max$$

$$5.\ \begin{cases} 4x_2 - 2x_3 = 5 \\ -2x_2 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 + 4x_4 \to \min$$

6. $$\begin{cases} -2x_1 + x_3 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_2 + x_4 - 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$$F = 4x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min$$

7. $$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

1.3. Свойства основной задачи линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Она состоит в определении максимального значения функции:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n, \ .$$

Перепишем эту задачу в векторной форме:
найти максимум функции:

$$F = CX \tag{1.14}$$

при условиях:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0\ , \tag{1.15}$$

$$X \geq 0\ , \tag{1.16}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,; CX – скалярное произведение; $P_1, \ldots, P_n$ и P_0 – m-мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};\quad P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ldots;P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *опорным планом* основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j, входящих в разложение (1.15) с положительными коэффициентами x_j, линейно независима.

Так как векторы P_j являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m.

Определение 1.8. Опорный план называется *невырожденным,* если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным.*

Свойства основной задачи линейного программирования (1.14)–(1.16) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 1.9. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – произвольные точки евклидова пространства E_n. Выпуклой линейной комбинацией этих точек называется сумма: $a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + \ldots a_n\overline{X}_n$, где a_i – произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1: $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ a_i \geq 0,\ \left(i = \overline{1,n}\right).$

Определение 1.10. Множество называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 1.11. Точка X выпуклого множества называется *угловой,* если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Определение 1.12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений,* а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной.*

Теорема 2. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 3. Если система векторов $P_1, P_2, \ldots, P_k$ $(k \leq n)$ в разложении (1.15) линейно независима и такова, что

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0,$$

где все $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 4. Если $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вершина многогранника решений, то векторы P_j, соответствующие положительным x_j в разложении (1.15), линейно независимы.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

1.4. Графический метод решения

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{1.17}$$

при условиях:

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \quad \left(i = \overline{1, k}\right), \tag{1.18}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2. \tag{1.19}$$

Каждое из неравенств (1.18), (1.19) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми: $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$, $\left(i = \overline{1, k}\right)$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. В том случае, если система неравенств (1.18), (1.19) совместна, то область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то областью допустимых решений задачи (1.17)–(1.19) является выпуклое множество, которое называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин «многогранник решений» обычно употребляется, если $n \ge 3$). Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня: $a_1x_1 + a_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через ее последнюю общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (1.17)–(1.19), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, показанные на рисунках 1.3–1.6.

На рисунке 1.3 показан случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *A*. На рисунке 1.4 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *AB*. На рисунке 1.5 показан случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рисунке 1.6 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.

Следует отметить, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $a_1x_1 + a_2x_2 = h$ передвигается не

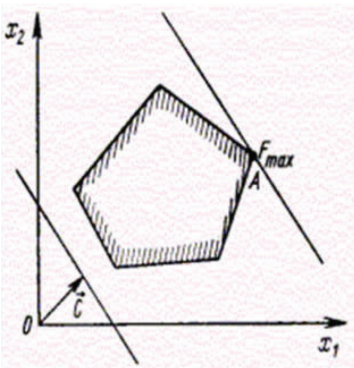


Рисунок 1.3

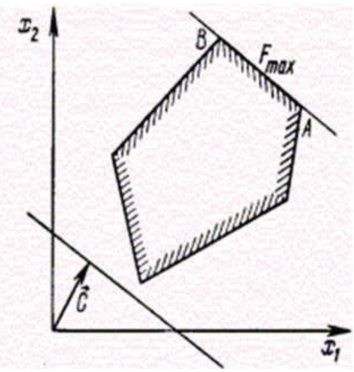


Рисунок 1.4

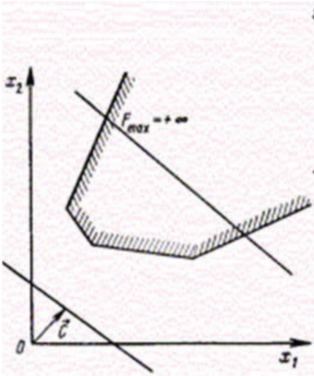
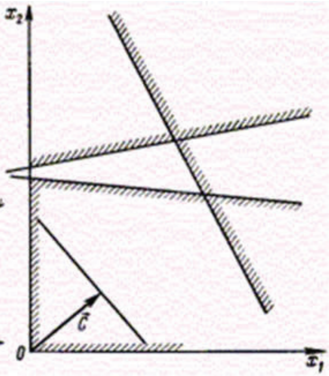


Рисунок 1.5



Риснок 1.6

в направлении вектора $\vec{C}=\left(c_1;c_2\right)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи (1.17)–(1.19) на основе ее геометрической интерпретации, включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения, которых получаются в результате замены в ограничениях (1.18) и (1.19) знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор $\vec{C}=\left(c_1;c_2\right)$.

5. Строят прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$, проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую $c_1x_1+c_2x_2=h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате, находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума функции, и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 1.3. Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в таблице 1.1. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 1.1 – Нормы расхода сырья

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия *A* и *B* могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной.

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида *A* и x_2 – изделий вида *B*. Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида, и количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида *A* и x_2 изделий вида *B* составит: $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств, и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300 & \text{(I)} \\ 4x_1 + 4x_2 = 120 & \text{(II)} \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 & \text{(III)} \\ x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ x_2 = 0 & \text{(V)} \end{cases}$$

Эти прямые приведены на рисунке 1.7. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рисунке 1.7 эта прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку $O(0; 0)$. Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \times 0 + 4 \times 0 < 300$, значит, полуплоскость, которой принадлежит точка 0 (0; 0), определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \le 300$. Это и показано стрелками на рисунке 1.7.

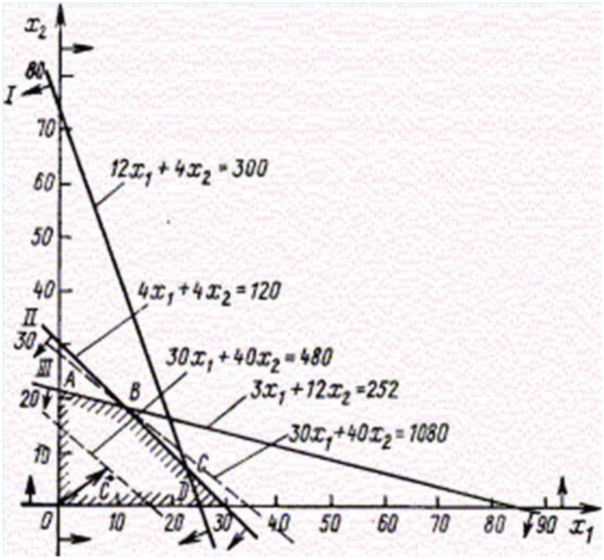


Рисунок 1.7 – Определение многоугольника решений

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно на рисунке 1.7, многоугольником решений является пятиугольник *OABCD*. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику *OABCD*, в которой функция *F* принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{C}=(30;40)$ и прямую $30x_1+40x_2=h$, где h – некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1+40x_2=h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h = 480$ и построим прямую: $30x_1+40x_2=480$ (рисунок 1.7).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации равна 480 руб. Далее, полагая *h* равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий *A* и *B*, при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1+40x_2=480$ в направлении вектора $\vec{C}$ видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка *B*. Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий *A* и *B*, при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки *B* как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120 \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases}.$$

Решив эту систему уравнений, получим: $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида *A* и 18 изделий вида *B*, то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{\max} = 30 \times 12 + 40 \times 18 = 1080$ руб.

Пример 1.4. Решить задачу примера, выделив базис (x_3, x_4, x_5, x_6) и решить геометрически задачу в области допустимых решений переменных (x_1, x_2,). Сравнить результат.

$$F = x_1 + 3x_2 - 1 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0.$$

Решение в области допустимых решений переменных *(x_1, x_2):*

$$\left(\begin{array}{|cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 25 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & [1] & 1 & 0 & 0 & 36 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{|cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & [1] & 0 & 1 & 25 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 27 \\ 0 & 6 & [1] & 1 & 0 & 0 & 36 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{|cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 0 & [1] & 0 & 1 & 25 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & [1] & 0 & 27 \\ -2 & 4 & [1] & 0 & 0 & -1 & 11 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{|cccccc|c} 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & [1] & -17 \\ 2 & 2 & 0 & [1] & 0 & 1 & 25 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & [1] & 0 & 27 \\ -2 & 4 & [1] & 0 & 0 & -1 & 11 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{|cccccc|c} 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & [1] & -17 \\ 2 & 6 & 0 & [1] & 0 & 0 & 42 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & [1] & 0 & 27 \\ -2 & 0 & [1] & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} -4x_2 + x_6 = -17 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 42 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 27 \\ -2x_1 + x_3 = -6 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x_2 \le -17 \\ 2x_1 + 6x_2 \le 42 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 27 \\ -2x_1 \le -6 \end{cases}$$

1. $-4x_2 = -17 \qquad x_2 = 4\frac{1}{4} \qquad x_2 \ge 4\frac{1}{4}$

2. $2x_1 + 5x_2 = 42$

x_1	0	3
x_2	7	6

$2x_1 + 5x_2 \le 42$

3. $2x_1 + 3x_2 = 27$

x_1	0	6
x_2	9	5

$2x_1 + 3x_2 \le 27$

4. $-2x_1 \le -6$ $\quad x_1 = 3$ $\quad x_1 \ge 3$

Целевая функция:

$$x_1 + 3x_2 - 1 \to \max,$$

$$x_1 + 3x_2 - 1 = 5\ .$$

$x_1 + 3x_2 = 6 \quad \vec{C} = (1;3)$

x_1	0	6
x_2	2	0

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 42 \\ 2x_1 + 3x_2 = 27 \end{cases}$$

$L(X) = 20$

$X = (3,6).$

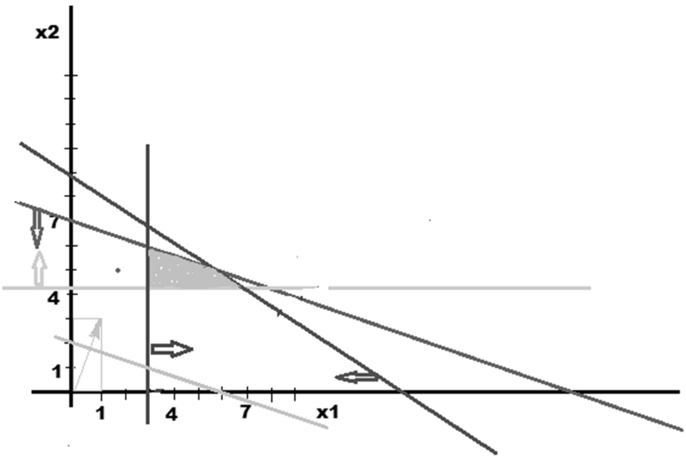


Рисунок 1.8 – Геометрическая интерпретация примера 1.4

$$\begin{cases} -4x_2 + x_6 = -17 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 42 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 27 \\ -2x_1 + x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\cdot 6 + x_6 = -17 \\ 2\cdot 3 + 6\cdot 6 + x_4 = 42 \\ 2\cdot 3 + 3\cdot 6 + x_5 = 27 \\ -2\cdot 3 + x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_6 = 7 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 3 \\ x_3 = -6 \end{cases}$$

$$X^* = (3,6,0,0,3,7)$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить графическим методом:

$$F = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min$$

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 1 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 2 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

Решить графическим методом, предварительно приведя к стандартному виду:

$$F = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \min$$

$$4.\ \begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6 \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$$F = -40x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 3x_5$$

$$5.\ \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 55 \\ -17x_1 + 16x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 46 \\ -33x_1 + 26x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 66 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

1.4. Симплекс-метод

Решение любой задачи линейного программирования можно найти *симплексным методом*. Прежде чем применять симплекс-метод, следует записать исходную задачу в ***форме основной задачи линейного программирования***, если она не имеет такой формы записи.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, при котором значение целевой функции *возрастает* (при условии, что данная задача имеет оптимальный план, и каждый ее опорный план является невырожденным). Указанный переход возможен, ***если известен какой-нибудь исходный опорный план***. Рассмотрим задачу, для которой этот план можно непосредственно записать.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $\left(j = \overline{1, n}\right)$.

Здесь a_{ij}, b_i, c_j $\left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right)$ – заданные постоянные числа $\left(m < n, b_i > 0\right)$.

Векторная форма данной задачи имеет следующий вид: найти максимум функции:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad , \tag{1.20}$$

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + \ldots + x_nP_n = P_0 \quad , \tag{1.21}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1, n}\right) \quad , \tag{1.22}$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}; \ldots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Так как $b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_mP_m = P_0$, то по определению опорного плана $X = \left(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0\right)$ является опорным планом данной задачи (последние $n-m$ компонент вектора X равны нулю). Этот план определяется системой единичных векторов: $P_1, P_2, \ldots, P_m$ которые образуют базис m-мерного пространства. Поэтому каждый из векторов: $P_1, P_2, \ldots, P_m$, а также вектор P_0 могут быть представлены в виде линейной комбинации векторов данного базиса. Пусть:

$$P_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i \quad \left(j = \overline{0, n} \right).$$

Положим:

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \quad \left(j = \overline{0, n} \right); \quad \Delta_j = z_j - c_j \quad \left(j = \overline{0, n} \right).$$

Так как векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – единичные, то $x_{ij} = a_{ij}$ и $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$, а $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$.

Теорема 5 (признак оптимальности опорного плана). Опорный план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*, 0, \ldots, 0 \right)$ задачи (1.20)–(1.22) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для любого $j \; (j = \overline{1, n})$.

Теорема 6. Если $\Delta_k < 0$ для некоторого j = k, и среди чисел $a_{ik} \left(i = \overline{1, m} \right)$ нет положительных $\left(a_{ik} \leq 0 \right)$, то целевая функция (1.20) задачи (1.20)–(1.22) не ограничена на множестве ее планов.

Теорема 7. Если опорный план X задачи (1.20)–(1.22) невырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X' такой, что $F\left(X' \right) > F\left(X \right)$.

Сформулированные теоремы позволяют проверить, является ли найденный опорный план оптимальным, и выявить целесообразность перехода к новому опорному плану.

Нахождение оптимального плана симплексным методом включает следующие этапы:

1. Находят опорный план.
2. Составляют симплекс-таблицу (таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Макет симплекс-таблицы

i	Базис	$C_б$	P_0	c_1	c_2	…	c_r	…	c_m	c_{m+1}	…	c_k	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_r	…	P_m	P_{m+1}	…	P_k	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1k}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2k}	…	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
r	P_r	c_r	b_r	0	0	…	1	…	0	a_{rm+1}	…	a_{rk}	…	a_{rn}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	P_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	a_{mm+1}	…	a_{mk}	…	a_{mn}
$m+1$			F_m	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_k	…	Δ_n

3. После заполнения таблицы исходный опорный план проверяют на оптимальность. Для этого просматривают элементы (m+1)-й строки таблицы. В результате может иметь место один из следующих трех случаев:

1) $\Delta_j \geq 0$ для $j = m+1, m+2, \ldots, n$ (при $j = \overline{1, m}, z_j = c_j$). Поэтому в данном случае числа $\Delta_j \geq 0$ для всех j от 1 до n; ***исходный опорный план является оптимальным;***

2) $\Delta_j < 0$ для некоторого j (остальные $\Delta > 0$), и все соответствующие этому индексу величины a_{ij} $\left(i = \overline{1, m}\right) \leq 0$, ***целевая функция не ограничена сверху на множестве планов;***

3) $\Delta_j < 0$ для некоторых индексов j, и для каждого такого j , по крайней мере, одно из чисел a_{ik} положительно, ***можно перейти от исходного плана к новому опорному плану, при котором значение целевой функции увеличится.*** Этот переход от одного опорного плана к другому осуществляется исключением из исходного базиса какого-нибудь из векторов и введением в него нового вектора.

4. Находят направляющие столбец и строку. Направляющий столбец определяется наибольшим по абсолютной величине отрицательным числом Δ_j, а направляющая строка – минимальным из отношений компонент столбца вектора P_0 к положительным компонентам направляющего столбца.

5. Методом Жордана–Гаусса определяют положительные компоненты нового опорного плана, коэффициенты разложения векторов P_j по векторам нового базиса и числа F_0', Δ_j'. Все эти числа записываются в новой симплекс-таблице.

6. Проверяют найденный опорный план на оптимальность. Если план не оптимален и необходимо перейти к новому опорному плану, то возвращаются к этапу 4, а в случае получения оптимального плана или установления неразрешимости, процесс решения задачи заканчивают.

При нахождении решения задачи линейного программирования мы предполагали, что эта задача имеет опорные планы, и каждый такой план является невырожденным. Если же задача имеет вырожденные опорные планы, то на одной из итераций одна или несколько переменных опорного плана могут оказаться равными нулю. Таким образом, при переходе от одного опорного плана к другому, значение функции может остаться прежним. Более того, возможен случай, когда функция сохраняет свое значение в течение нескольких итераций, а также возможен возврат к первоначальному базису. В последнем случае обычно говорят, что произошло *зацикливание.*

Пример 1.5. Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели A, B, C использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида приведены в таблице 2. В ней же указано общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано фабрикой, а также приведена прибыль от реализации 1 т карамели данного вида (таблица 1.3).

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от производства.

Таблица 1.3 – Нормы расхода сырья

Вид сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1 т карамели			Общее количество сырья (т)
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	-	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции (д. е.)	108	112	126	

Решение.

Составим математическую модель задачи. Искомый выпуск изделий *A* обозначим через x_1, изделий *B* – через x_2, изделий *C* – через x_3. Поскольку имеются ограничения на выделенный предприятию фонд сырья каждого вида, переменные x_1, x_2, x_3 должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800 \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600. \\ \quad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 200 \end{cases}$$

Общая стоимость произведенной предприятием продукции при условии выпуска x_1 изделий *A*, x_2 изделий *B* и x_3 изделий *C*, составляет:

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 \to \max.$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1, x_2, x_3 могут принимать только лишь неотрицательные значения:

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Таким образом, приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений системы неравенств требуется найти такое, при котором функция принимает максимальное значение.

Запишем эту задачу в форме основной задачи линейного программирования. Для этого перейдем от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Введем три дополнительные переменные, в результате чего ограничения запишутся в виде системы уравнений. Эти дополнительные переменные по экономическому смыслу означают не используемое при данном плане производства количество сырья того или иного вида:

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 + x_4 = 800 \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + x_5 = 600 \\ \quad 0,1x_2 + 0,1x_3 + x_6 = 200 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 .$$

Запишем условия в векторной форме:

$$\begin{pmatrix}0,8\\0,4\\0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}0,5\\0,4\\0,1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0,6\\0,3\\0,1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_5+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_6=\begin{pmatrix}800\\600\\200\end{pmatrix}$$

Заполним Симплекс-таблицу (таблица 1.4) и следуя алгоритму определим оптимальное решение и значение целевой функции

Ответ: **X* = (100, 0 1200), F$_{\max}$ = 162000,0.**

Следовательно, план выпуска продукции, включающий изготовление 100 изделий *A* и 1200 изделий – *C*, является оптимальным. При данном плане выпуска изделий полностью используется сырье I и III видов и остается неиспользованным 200 кг сырья II вида, а стоимость производимой продукции равна **162000** д. е.

1.5 Метод искусственного базиса

Для задачи, записанной в форме основной задачи линейного программирования, можно непосредственно указать ее опорный план, если среди векторов Pj, компонентами которых служат коэффициенты при неизвестных в системе уравнений данной задачи, имеется т единичных. Однако для многих задач линейного программирования, записанных в форме основной задачи и имеющих опорные планы, среди векторов Pj не всегда есть m единичных. Рассмотрим такую задачу.

Пусть требуется найти максимум функции.

Пусть требуется найти максимальное значение функции

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{1.23}$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1+a_{1m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ x_2+a_{2m+1}x_{m+1}+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_m+a_{mm+1}x_{m+1}+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{1.24}$$

Таблица 1.4 – Решение табличным симплекс-методом

i	Базис	Коэффициенты целевой функции при базисе c_i	Решение, соответствующее текущему базису $b_i (P_0)$	Коэффициенты целевой функции при переменных $x\ c_j$						Отношения
				108	112	126	0	0	0	
				x_1 (P_1)	x_2 (P_2)	x_3 (P_3)	x_4 (P_4)	x_5 (P_5)	x_6 (P_6)	$\alpha = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right)$
1	x_4	0,0	800,0	0,8	0,5	0,6	1,0	0,0	0,0	1333,3
2	x_5	0,0	600,0	0,4	0,4	0,3	0,0	1,0	0,0	2000,0
3	x_6	0,0	120,0	0,0	0,1	**0,1**	0,0	0,0	1,0	1200,0
$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$			$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i = 0$	–108	–112	–126	0	0	0	
1	x_4	0	80,00	**0,80**	–0,10	0,00	1,00	0,00	–6,00	100,0
2	x_5	0	240,00	0,40	0,10	0,00	0,00	1,00	–3,00	600,0
3	x_3	126	1200,00	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	10,00	-
			151200,0	-108,0	14,0	0,0	0,0	0,0	1260,0	
1	x_1	108	**100,0**	1,0	–0,1	0,0	1,3	0,0	–7,5	
2	x_5	0	**200,0**	0,0	0,2	0,0	–0,5	1,0	0,0	
3	x_3	126	**1200,0**	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	10,0	
			Fmax = 162000,0	0,0	0,5	0,0	135,0	0,0	450,0	

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1, n} \right) , \tag{1.25}$$

где $m < n,\ b_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}$. Среди векторов:

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots \quad P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

нет m единичных.

Определение 1.13. Задача, состоящая в определении максимального значения функции:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n - M x_{n+1} - \ldots - M x_{n+m} \tag{1.26}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{1.27}$$

$$x_j \geq 0, \left(j = \overline{1, n+m} \right) , \tag{1.28}$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется расширенной задачей по отношению к задаче (1.23)–(1.25).

Расширенная задача имеет опорный план:

$$X = (\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n\ нулей}\ b_1; b_2; \ldots; b_m),$$

который определяется системой единичных векторов P_{n+1}, $P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$, образующих базис m-го векторного пространства, который называется *искусственным*. Сами векторы, так же как и переменные $x_{n+i}, \left(i=\overline{1, m}\right)$ называются *искусственными*. Так как расширенная задача имеет опорный план, то ее решение может быть найдено симплексным методом.

Теорема. Если в оптимальном плане $X^* = \left(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*; x_{n+1}^*; \ldots; x_{n+m}^*\right)$ расширенной задачи (1.26)–(1.28) значения искусственных переменных $x_{n+i}^* = 0 \left(i=\overline{1, m}\right)$, то $X^* = \left(x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*\right)$ является оптимальным планом задачи (1.23)–(1.25).

Таким образом, если в найденном оптимальном плане расширенной задачи значения искусственных переменных равны нулю, то тем самым получен оптимальный план исходной задачи. Поэтому остановимся более подробно на нахождении решения расширенной задачи.

При опорном плане $X = (0; 0; \ldots; 0; b_1; b_2; \ldots; b_m)$ расширенной задачи значение линейной формы есть $F_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$, а значения

$\Delta_j = z_j - c_j$ равны $\Delta_j = -M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$. Таким образом, F_0 и Δ_j состоят из двух независимых частей, одна из которых зависит от M, а другая – нет.

После вычисления F_0 и Δ_j их значения, а также исходные данные расширенной задачи заносят в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. При этом в $(m+2)$-ю строку помещают коэффициенты при M, а в $(m+1)$-ю – слагаемые, не содержащие M.

При переходе от одного опорного плана к другому в базис вводят вектор, соответствующий наибольшему по абсолютной величине отрицательному числу в $(m+2)$-й строке. Искусственный вектор, исключенный из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не имеет смысла вводить ни в один из последующих базисов и, следовательно, преобразование столбцов этого вектора излишне.

Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производят по общим правилам симплексного метода.

Итерационный процесс по ($m+2$)-й строке ведут до тех пор, пока:

1) все искусственные векторы исключены из базиса. *Базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи, и определение ее оптимального плана продолжают по ($m+1$)-й строке;*

2) не все искусственные векторы исключены, но ($m+2$)-ая строка не содержит больше отрицательных элементов в столбцах векторов P_1, P_2, ..., P_{n+m}. *Если элемент, стоящий в ($m+2$)-й строке столбца вектора P_0 отрицателен, исходная задача не имеет решения; если же он равен нулю, то найденный опорный план исходной задачи является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.*

Следовательно, процесс нахождения решения задачи (1.23)–(1.25) методом искусственного базиса включает следующие основные этапы:

1. Составляют расширенную задачу (1.26)–(1.28).
2. Находят опорный план расширенной задачи.
3. С помощью обычных вычислений симплекс-метода исключают искусственные векторы из базиса. В результате либо находят опорный план исходной задачи (1.23)–(1.25), либо устанавливают ее неразрешимость.
4. Используя найденный опорный план задачи (1.23)–(1.25) либо находят симплекс-методом оптимальный план исходной задачи, либо устанавливают ее неразрешимость.

Пример 1.6. Решить методом искусственного базиса:

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_3 + 6x_4 - 5x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 28 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 + x_5 = 31 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 118 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 .$$

Запишем условия в векторной форме:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}-2\\1\\-8\end{pmatrix}x_5=\begin{pmatrix}28\\31\\118\end{pmatrix}$$

1. $\quad F=8x_1-3x_2+x_3+6x_4-5x_5-Mx_6-Mx_7-Mx_8\to\max,$

$$\begin{cases}2x_1+4x_2+x_3+x_4-2x_5+x_6=28\\ x_1-2x_2+x_4+x_5+x_7=31\\ -x_1+3x_2+5x_3+4x_4-8x_5+x_8=118\end{cases}$$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\ge 0$

Запишем условия расширенной задачи в векторной форме:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}-2\\1\\-8\end{pmatrix}x_5+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x_6+\left|\begin{matrix} & & \\ 1 & 0 & 31\\ 0 & 1 & 118\end{matrix}\right.$$

$$+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}x_7+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}x_8=\begin{pmatrix}28\\31\\118\end{pmatrix}$$

Ответ: $X^*=(0,0,6,28,3),\ F^*=159$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить симплекс-методом, сравнивая с решением, полученным графическим способом:

1. $F=2x_1-6x_2\to\max$

$$\begin{cases}x_1+x_2\ge 2\\ -x_1+2x_2\le 4\\ x_1+2x_2\le 8\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

2. $F=x_1+x_2\to\max$

$$\begin{cases}x_1-4x_2-4\le 0\\ 3x_1-x_2\ge 0\\ x_1+x_2-4\ge 0\end{cases}$$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$

Таблица 1.5 – Решение задачи методом искусственного базиса

				8	-3	1	6	-5	-M	-M	-M	
i	Базис	c_i	(P_0)	$x_1\ (P_1)$	$x_2\ (P_2)$	$x_3\ (P_3)$	$x_4\ (P_4)$	$x_5\ (P_5)$	$x_6\ (P_6)$	$x_7\ (P_7)$	$x_8(P_8)$	α
1	x_6	-M	28	2	4	1	**1**	-2	1	0	0	28
2	x_7	-M	31	1	-2	0	1	1	0	1	0	31
3	x_8	-M	118	-1	3	5	4	-8	0	0	1	29,5
	m+1		0	-8	3	-1	-6	5	0	0	0	
	m+2		-177	-2	-5	-6	-6	9	0	0	0	
1	x_4	6	28	2	4	1	1	-2	1	0	0	-
2	x_7	-M	3	-1	-6	-1	0	**3**	-1	1	0	1
3	x_8	-M	6	-9	-13	1	0	0	-4	0	1	-
	m+1		168	4	27	5	0	-7	6	0	0	
	m+2		-9	10	19	0	0	-3	5	0	0	
1	x_4	6	30	1 1/3	0	1/3	1	0	1/3	2/3	0	60
2	x_5	-5	1	- 1/3	-2	- 1/3	0	1	- 1/3	1/3	0	-
3	x_8	-M	6	-9	-13	**1**	0	0	-4	0	1	6
	m+1		175	1 2/3	13	2 2/3	0	0	3 2/3	2 1/3	0	
	m+2		-6	9	13	-1	0	0	4	0	0	
1	x_4	6	28	20/3	13/3	0	1	0	5/3	2/3	-1/3	
2	x_5	-5	3	- 10/3	- 6 1/3	0	0	1	-5/3	1/3	1/3	
3	x_3	1	6	-9	-13	1	0	0	-4	0	1	
	m+1		159	43/3-8	23+3	0	0	0	43/3+M	17/3+M	-8/3+M	

$$F = x_1 + x_2 \to \max$$

3. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - 2x_2 \le -8 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$F = 2x_1 - x_2 \to \min$$

4. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решить симплекс-методом:

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \min$$

1. $$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,$$

$$F = -6x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 8x_4 \to \min.$$

2. $$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 \le -1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

$$F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$$

3. $$\begin{cases} x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

$F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

$F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

5. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 1 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

6. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6 \\ -x_1 + x_3 \leq 2 \\ -2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

$F = 2x_1 - 13x_2 - 6x_3 \to \max.$

7. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$

$$F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \min$$

8. $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_2 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

ГЛАВА 2. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

2.1. Прямая и двойственная задачи

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом сопоставить некоторую другую задачу (линейного программирования), называемую двойственной или сопряженной по отношению к исходной или прямой. Дадим определение двойственной задачи по отношению к общей задаче линейного программирования, состоящей в нахождении максимального значения функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (2.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ . \qquad (2.3)$$

Определение 2.1. Задача, состоящая в нахождении минимального значения функции:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \qquad (2.4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_1 \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \qquad (2.5)$$

Таблица 2.1 – Правила приведения к двойственной задаче

		Исходная задача (ИсхЗ)	Двойственная задача (ДвЗ)	Пояснения
Количество переменных		n	m	Количество ограничений (m) ИсхЗ равно количеству переменных ДвЗ
Количество ограничений		m	n	
Симметричные задачи	I	$F = CX \to \max$ $AX \le B$ $X \ge 0$	$Z = BY \to \min$ $A^T Y \ge C$ $Y \ge 0$	1) если целевая функция ИсхЗ стремится к *max*, то целевая функция ДвЗ – к *min*, и наоборот; 2) матрица А в ДвЗ транспонируется; 3) свободные члены $b_i, i = \overline{1,m}$ ИсхЗ являются коэффициентами при переменных в целевой функции, а $c_j, j = \overline{1,n}$ в ИсхЗ являются свободными членами в ДвЗ; 4) переменные $x_j \ge 0$, соответствуют ограничениям «≤» при $F \to max$ или «≥», если $F \to min$; 5) если F или $Z \to max$, то все ограничения «≤», если F или $Z \to min$, то все ограничения «≥»; 6) если существует неравенство, не удовлетворяющее п.5, то неравенство надо умножить на –1; 7) каждой переменной x_j не ограниченной по знаку, т. е. $\forall Y$ или $\forall X$, соответствует ограничение вида «=», в ДвЗ
	II	$F = CX \to \min$ $AX \ge B$ $X \ge 0$	$Z = BY \to \max$ $A^T Y \le C$ $Y \ge 0$	
Не симметричные задачи	III	$F = CX \to \max$ $AX = B$ $X \ge 0$	$Z = BY \to \min$ $A^T Y \ge C$ $\forall Y$	
	IV	$F = CX \to \min$ $AX = B$ $X \ge 0$	$Z = BY \to \max$ $A^T Y \le C$ $\forall Y$	

Формулировка задач	Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов	Найти такой набор оценок ресурсов $Y = (y_1, y_2,\ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы, при производстве каждого вида продукции, будут не менее выручки от реализации этой продукции	

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,\mathrm{m}} \quad , \tag{2.6}$$

называется ***двойственной*** по отношению к задаче (2.1)–(2.3).

Задачи (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) образуют пару задач, называемую в линейном программировании ***двойственной парой***.

Двойственная задача по отношению к исходной, составляется согласно следующим правилам (таблица 2.1).

Задачи для самостоятельного решения

Составить двойственную задачу по отношению к задаче, состоящей в максимизации функции:

$Z = 18y_1 + 20y_2 - 19y_3 \to \min$

1. $\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 - 5y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq -2 \\ 4y_1 - 3y_2 - 6y_3 \geq 5 \end{cases}$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

$Z = y_1 + y_2 + y_3 \to$

2. $\begin{cases} y_1 + \quad y + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \end{cases}$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

$Z = y_1 + y_2 + y_3 \to$

3. $\begin{cases} y_1 + \quad y + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \end{cases}$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

$Z = y_1 + y_2 + y_3 \to$

4. $\begin{cases} y_1 + \quad y + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \\ y_1 + \quad y_2 + \quad y_3 \end{cases}$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

2.2. Связь между решениями прямой и двойственной задач

Рассмотрим пару двойственных задач, образованную основной задачей линейного программирования и двойственной к ней. Исходная задача (2.1)–(2.3). Двойственная задача (2.4)–(2.6).

Каждая из задач двойственной пары является самостоятельной задачей линейного программирования и может быть решена независимо одна от другой. Однако при определении симплексным методом оптимального плана одной из задач, находится решение и другой задачи.

Существующие зависимости между решениями прямой и двойственной задач характеризуются сформулированными ниже леммами н теоремами двойственности.

Лемма 2.1. Если X – некоторый план исходной задачи (2.1)–(2.3), а Y – произвольный план двойственной задачи (2.4)–(2.6), то значение целевой функции исходной задачи при плане X всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане Y, т. е. F(X)≤ F*(Y).

Лемма 2.2. Если F(X*) = F*(Y*) для некоторых планов X* и Y* задач (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6), то X* – оптимальный план исходной задачи, а Y* – оптимальный план двойственной задачи.

Теорема 2.1 *(первая теорема двойственности).* Если одна из пары двойственных задач (2.1)–(2.3) или (2.4)–(2.6) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.

$$F_{\max} = F^*_{\min}$$

Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена для исходной (2.1)–(2.3) сверху, для двойственной (2.4)–(2.6) – снизу, то другая задача вообще не имеет планов.

Теорема 2.2 *(вторая теорема двойственности).* План $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ задачи (2.1)–(2.3) и планы $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*\right)$ задачи (2.4)–(2.6) являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого $j\left(j = \overline{1,n}\right)$ выполняется равенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0\,. \tag{2.7}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0\,. \tag{2.8}$$

Г е о м е т р и ч е с к а я и н т е р п р е т а ц и я д в о й с т в е н н ы х з а д а ч . Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач. При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев:

1) обе задачи имеют планы;

2) планы имеет только одна задача;

3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

2.3. Нахождение решения двойственных задач

В качестве исходной задачи рассмотрим экономико-математическую модель использования ресурсов.

Исходная задача:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.10}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\,. \tag{2.11}$$

Двойственная задача:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_1 \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases} \tag{2.13}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, m} . \qquad (2.14)$$

Содержательная интерпретация исходной задачи:

Составить такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.

В приведенной модели:

$b_i\,(i = 1, 2, \ldots, m)$ обозначает запас ресурса S;

a_{ij} – число единиц ресурса S_i, потребляемого при производстве единицы продукции $P_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$;

c_j – прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая организация решила закупить ресурсы $S_1, \ldots, S_m$ предприятия, и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы: $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Очевидно, что покупающая организация заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах $b_1\ b_2, \ldots, b_m$ по ценам соответственно $y_1, y_2, \ldots, y_m$ были минимальны, т. е.

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min$$

В то же время, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была не менее той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_1 расходуется:

a_{11} единиц ресурса S_1, по цене y_1;

a_{21} единиц ресурса S_2, по цене y_2;

…

a_{m1} единиц ресурса S_m, по цене y_m.

Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_j, должны быть не менее ее цены c_j т. е.

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1 .$$

Аналогично можно составить ограничения в виде неравенств по каждому виду продукции: $P_1, P_2, ..., P_n$.

Экономико-математическая модель и содержательная интерпретация полученной таким образом двойственной задачи:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_1 \ge c_1 \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{m2} y_1 \ge c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \ge c_n \end{cases}$$

$$y_i, i = \overline{1, \mathrm{m}}.$$

Найти такой набор оценок ресурсов $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции, будут не менее выручки от реализации этой продукции.

Такой набор оценок условно называют *ценой.* Цена ресурсов $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в экономической литературе имеет различные названия: *учетные, неявные, теневые.* Смысл этих названий состоит в том, что это *условные*, «не настоящие» цены. В отличие от «внешних» цен $c_1, c_2, \ldots, c_n$ на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов являются $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ***внутренними***, ибо они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их называют ***оценками ресурсов***.

Объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т. е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные – нулевые оценки.

Рассмотрим на примере экономическую интерпретацию двойственных задач и двойственных оценок.

Пример 2.1. Пусть требуется найти оптимальный производственный план выпуска четырех видов продуктов, при изготовлении которых используют три вида сырьевых ресурсов А, Б и В из условия получения максимума товарной продукции.

Все необходимые исходные данные указаны в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Нормы расхода сырья и цена продукции

Вид сырья	Ресурсы в кг	Расход на 1 кг продукции				Цена 1 кг сырья
		I	**II**	**III**	**IV**	
А	35	4	2	2	1	y_1
Б	30	1	1	2	3	y_2
В	40	3	1	2	1	y_3
Цена за 1 кг		14	10	14	11	

Через x_1, x_2, x_3, x_4 обозначим количество кг каждого из вида продуктов, подлежащих выпуску. Математическая модель задачи выражается так:

Найти оптимальный производственный план

$$\overline{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right),$$

удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, i =1, 2, 3, 4,

суммарная стоимость которого $F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4$ достигает максимума.

Построим двойственную задачу. Допустим, что надо оценить каждую единицу используемых ресурсов, которые определяют максимальные производственные возможности предприятия. Пусть речь идет об относительной оценке этих ресурсов, которая должна учесть их лимитированность и интенсивность расходования при изготовлении продукции.

Пусть для рассматриваемого производства оценки 1 кг сырья А, Б, В соответственно равны: y1, y2, y3. Для определения этих цен (оценок) будем исходить из следующих естественных соображений:

1. Стоимость сырья, затрачиваемого на производство единицы конечного продукта, должна быть не меньше стоимости единицы продукта. Для рассматриваемой задачи это означает, что оценки y1, y2, y3, должны удовлетворять следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 14 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 10 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 14 \\ y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 11 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

2. Суммарная стоимость всего сырья, которым располагает производство, должно быть минимальной, т. е.

$$Z = 35y_1 + 30y_2 + 40y_3 \to \min.$$

Таким образом, можно сформулировать следующую задачу: *Найти цены (оценки) y1, y2 и y3 единицы сырья А, Б и В, которые удовлетворяли бы неравенствам, и для которых целевая функция достигла бы минимума.*

Табличный симплекс метод

Рассмотрим пару двойственных задач – основную задачу линейного программирования (2.9)–(2.11) и двойственную к ней задачу (2.12), (2.13).

Предположим, что с помощью симплексного метода найден оптимальный план X* задачи (2.9)–(2.11), и этот план определяется базисом, образованным векторами P_{i1}, P_{i2},..., P_{im} (таблица 2.3).

Таблица 2.3– Соответствие переменных

Исходная задача (в каноническом виде)	
Первоначальные переменные	Дополнительные переменные
$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_4 \quad y_5 \quad y_6 \quad y_7$	$x_5 \quad x_6 \quad x_7$ $\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$ $y_1 \quad y_1 \quad y_3$
Дополнительные переменные	Первоначальные переменные
Двойственная задача (в каноническом виде)	

Обозначим через $C_б = \{c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})$ вектор-строку, составленную из коэффициентов при неизвестных в целевой функции (2.9) задачи (2.9)–(2.11), а через P^{-1} – матрицу, обратную матрице P, составленной из компонент векторов $P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im}$ базиса. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план X^*, то $Y^* = C_б P^{-1}$ является оптимальным планом двойственной задачи.

Таким образом, если найти симплексным методом оптимальный план задачи (2.9)–(2.11), то, используя последнюю симплекс-таблицу, можно определить $C_б$ и P^{-1}, и с помощью соотношения $Y^* = C_б P^{-1}$ найти оптимальный план двойственной задачи (2.12), (2.13).

В том случае, когда среди векторов $P_i, P_2, ..., P_n$, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений (2.9), имеется m единичных, указанную матрицу P^{-1} образуют числа первых m строк последней симплекс-таблицы, стоящих в столбцах данных векторов. Тогда нет необходимости определять оптимальный план двойственной задачи умножением $C_б$ на P^{-1}, поскольку компоненты этого плана совпадают с соответствующими элементами (m+1)-ой строки столбцов единичных векторов, если данный коэффициент $C_j = 0$, и равны сумме соответствующего элемента этой строки и C_j если $C \neq 0$.

Сказанное выше имеет место и для симметричной пары двойственных задач. При этом, поскольку система ограничений исходной задачи содержит неравенства вида ≤, то компоненты оптимального плана двойственной задачи совпадают с соответствующими числами (m+1)-й строки последней симплекс-таблицы решения исходной задачи. Указанные числа стоят в столбцах векторов, соответствующих дополнительным переменным.

Применим симплексный метод к решению исходной задачи (таблица 2.4):

Таблица 2.4 – Решение исходной задачи

i	Базис	$C_б$	P_0	14	10	14	11	0	0	0	a	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
1	x5	0	35	4	2	2	1	1	0	0	17,5	
2	x6	0	30	1	1	2	3	0	1	0	15	
3	x7	0	40	3	1	2	1	0	0	1	20	
			0	-14	-10	-14	-11	0	0	0		
1	x5	0	5	3	1	0	-2	1	-1	0	5	
2	x3	14	15	0,5	0,5	1	1,5	0	0,5	0	30	
3	x7	0	10	2	0	0	-2	0	-1	1	-	
			210	-7	-3	0	10	0	7	0		
1	x2	10	**5**	3	1	0	-2	1	-1	0		4
2	x3	14	**12,5**	-1	0	1	2,5	-0,5	1	0		13,5
3	x7	0	**10**	2	0	0	-2	0	-1	1		9
			225	2	0	0	4	**3**	**4**	**0**		229

По этой таблице определяем оптимальный производственный план:

$X^* = \left(0,5,\dfrac{25}{2},0,0,0,0\right)$, при котором достигается максимум товарной продукции $F_{max} = 225$.

Обратимся к экономическому смыслу переменных обеих взаимно двойственных задач (таблица 2.5).

Таблица 2.5 – Результат исходной и двойственной задач

Оптимальное решение исходной задачи $F_{max} = 225$						
Число единиц продукции				Остатки ресурсов		
P_1	P_2	P_3	P_4	S_1	S_2	S_3
$x_1 = 0$ $\updownarrow$ $y_4 = 2$	$x_2 = 5$ $\updownarrow$ $y_5 = 0$	$x_3 = 12,5$ $\updownarrow$ $y_6 = 0$	$x_4 = 0$ $\updownarrow$ $y_7 = 4$	$x_5 = 0$ $\updownarrow$ $y_1 = 3$	$x_6 = 0$ $\updownarrow$ $y_2 = 4$	$x_7 = 10$ $\updownarrow$ $y_3 = 0$
Дополнительные переменные				Первоначальные переменные		
Оптимальное решение двойственной задачи $Z_{min} = 225$						

Таким образом,

- положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность;
- величина двойственной оценки показывает, насколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Так, увеличение количества сырья приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции возрастет.

Решение двойственной задачи из решения прямой, с использованием теоремы двойственности

Согласно первой теореме двойственности, оптимальное значение целевой функции равно: $F_{max} = Z_{min} = 225$.

$$X^* = \left(0, 5, \frac{25}{2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Применим вторую теорему двойственности:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^* - b_i\right) y_i^* = 0.$$

Подставим оптимальные значения переменных X^* в систему ограничений прямой задачи:

$$\begin{cases} 4\cdot 0+2\cdot 5+2\cdot \dfrac{25}{2}+0\le 35 \\ 0+5+2\cdot \dfrac{25}{2}+3\cdot 0\le 30 \\ 3\cdot 0+5+2\cdot \dfrac{25}{2}+0\le 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35=35 \\ 30=30 \\ 30<40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1\ne 0 \\ y_2\ne 0 \\ y_3=0 \end{cases}$$

Поскольку третья строка является строгим неравенством (не являются равенствами), то $y_3 = 0$.

Найдем оптимальные значения переменных Y^* из системы ограничений двойственной задачи, *применим вторую теорему двойственности:*

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}y_i^*-c_j\right)x_j^*=0$$

$$X^*=\left(0,5,\frac{25}{2},0,0,0,0\right).$$

Учитывая, что $x_2\ne 0$, $x_3\ne 0$ то 2-я и 3-я строки двойственной задачи являются равенствами:

$$\begin{cases} 4y_1+y_2+3y_3\ge 14 \\ 2y_1+y_2+y_3\ge 10 \\ 2y_1+2y_2+2y_3\ge 14 \\ y_1+3y_2+y_3\ge 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1+y_2+0=10 \\ 2y_1+2y_2+2\cdot 0=14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2=4 \\ y_1=3 \end{cases}$$

$Y^* = (3, 4, 0)$.

Итак, если исходная задача заключается в определении *оптимального плана выпуска продукции* при данных ограниченных ресурсах сырья, обеспечивающего *максимум товарной продукции*, то двойственная задача заключается в определении *оценок* *единицы каждого ресурса* из условия *минимальной их суммарной стоимости*. Чтобы найти решение этих задач, следует сначала отыскать решение какой-либо одной из них.

2.4. Анализ устойчивости двойственных оценок

Предположим, что задача (2.9)–(2.11) имеет невырожденные опорные планы и хотя бы один из них является оптимальным.

Максимальное значение целевой функции (2.9) задачи (2.9)–(2.11) будем рассматривать как функцию свободных членов системы линейных уравнений (2.10):

$$F_{\max} = (b_1, b_2, \ldots b_m)$$

Теорема. *В оптимальном плане двойственной задачи (2.12), (2.13) значение переменной* y_i** *численно равно частной производной функции* $F_{\max} = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ *по данному аргументу, т. е.*

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*.$$

Последнее равенство означает, что изменение значений величин b_i приводит к увеличению или уменьшению $F_{\max} = (b_1, b_2, \ldots b_m)$. Это изменение $F_{\max} = (b_1, b_2, \ldots b_m)$ определяется величиной | y_i* | и может быть охарактеризовано лишь тогда, когда при изменении величин *bi* значения переменных y_i* в оптимальном плане соответствующей двойственной задачи (2.12), (2.13) остаются неизменными. Поэтому представляет интерес определить такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы линейных уравнений (2.10), в которых оптимальный план двойственной задачи (2.12), (2.13) не меняется. Это имеет место для всех тех значений $b_i + \Delta b_i$, при которых столбец вектора P_0 последней симплекс-таблицы решения задачи (1)–(3) не содержит отрицательных чисел, т. е. тогда, когда среди компонент вектора нет отрицательных:

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1+\Delta b_1 \\ b_2+\Delta b_2 \\ \dots \\ b_n+\Delta b_n \end{pmatrix}.$$

Здесь B^{-1} – матрица, обратная матрице B, составленной из компонент векторов базиса, который определяет оптимальный план задачи (2.9)–(2.11).

Таким образом, если найдено решение задачи (2.9)–(2.11), то нетрудно провести анализ устойчивости двойственных оценок относительно изменений b_i. Это, в свою очередь, позволяет проанализировать устойчивость оптимального плана задачи (2.12), (2.13) относительно изменений свободных членов системы линейных уравнений (2.10), оценить степень влияния изменения b_i на максимальное значение целевой функции задачи (2.9)–(2.11), и дает возможность определить наиболее целесообразный вариант возможных изменений $b_{i.}$

Анализ устойчивости двойственных оценок можно найти из двойного неравенства:

$$\max_{k_{ij}>0}\left(\frac{-x_j^*}{k_{ij}}\right) \le \Delta b_i \le \min_{k_{ij}<0}\left(\frac{-x_j^*}{k_{ij}}\right),$$

где Δb_i – величина изменения i-го типа сырья; k_{ij} – коэффициенты структурных сдвигов.

Пример 2.2. Пусть требуется найти оптимальный производственный план выпуска четырех видов продуктов, при изготовлении которых используют три вида сырьевых ресурсов А, Б и В из условия получения максимума товарной продукции.

Все необходимые исходные данные указаны в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Нормы расхода ресурсов и цена продукции

Вид сырья	Ресурсы в кг	Расход на 1 кг продукции				Цена 1 кг сырья
		I	**II**	**III**	IV	
А	35	4	2	2	1	y_1
Б	30	1	1	2	3	y_2
В	40	3	1	2	1	y_3
Цена за 1 кг		14	10	14	11	

Найти оценки для всех видов сырья и провести анализ устойчивости двойственных оценок.

Решение.

Через x_1, x_2, x_3, x_4 обозначим количество кг каждого из вида продуктов, принадлежащих выпуску. Математическая модель задачи выражается так:

Найти оптимальный производственный план

$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 35 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 30 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40 \end{cases}$$

$x_i \ge 0$, i =1, 2, 3, 4,

суммарная стоимость которого $F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 11x_4$ достигает максимума.

Применим симплексный метод к решению исходной задачи (таблица 2.7).

Из последней таблицы определяем оптимальный производственный план

$$X^* = \left(0, 5, \frac{25}{2}, 0\right),$$

при котором достигается максимум товарной продукции $F_{max} = 225$.

Таблица 2.7 – Решение исходной задачи

i	Ба-зис	$С_б$	P_0	14	10	14	11	0	0	0	a	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
1	x5	0	35	4	2	2	1	1	0	0	17,5	
2	x6	0	30	1	1	2	3	0	1	0	15	
3	x7	0	40	3	1	2	1	0	0	1	20	
			0	-14	-10	-14	-11	0	0	0		
1	x5	0	5	3	1	0	-2	1	-1	0	5	
2	x3	14	15	0,5	0,5	1	1,5	0	0,5	0	30	
3	x7	0	10	2	0	0	-2	0	-1	1	-	
			210	-7	-3	0	10	0	7	0		
1	x2	10	5	3	1	0	-2	**1**	-1	0		4
2	x3	14	12,5	-1	0	1	2,5	**-0,5**	1	0		13,5
3	x7	0	10	2	0	0	-2	**0**	-1	1		9
			225	2	0	0	4	**3**	4	0		229

Для двойственной задачи: $Z_{min} = 225$, $Y^* = (3, 4, 0)$.

Проведем анализ устойчивости двойственных оценок.

Из первой симплекс-таблицы определяем матрицу B, составленную из единичных векторов P_5, P_6,: P_7:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

определяем матрицу B^{-1} из последней симплекс-таблицы, составленную из векторов P_5, P_6,: P_7:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зададим исходным значениям b_j, $j = 1,n,$ приращение:

$$\begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \cdots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 + \Delta b_1 \\ 30 + \Delta b_2 \\ 40 + \Delta b_3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \cdots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 35 + \Delta b_1 \\ 30 + \Delta b_2 \\ 40 + \Delta b_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccccc} 35 & & 30 & & 0 \\ 17{,}5 & 0{,}5 & & 30 & 0 \\ 30 & & 40 & & 0 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 35 + \Delta b_1 - 30 - \Delta b_2 \geq 0 \\ -17{,}5 - 0{,}5\Delta b_1 + 30 + \Delta b_2 \geq 0 \\ -30 - \Delta b_2 + 40 + \Delta b_3 \geq 0 \end{pmatrix}.$$

В последней матрице применим условие неотрицательности. Итоговая система:

$$\begin{cases} \Delta b_1 - \Delta b_2 + 5 \geq 0 \\ 0{,}5\Delta b_1 + \Delta b_2 + 12{,}5 \geq 0 \\ -\Delta b_2 + \Delta b_3 + 10 \geq 0 \end{cases}$$

Если $\Delta b_1, \Delta b_2, \Delta b_3$ изменяются одновременно, то исследование устойчивости двойственных оценок усложняется, поскольку в данном случае нужно найти многогранник решений системы линейных неравенств. Точки этого многогранника определяют количество ресурсов каждого типа, при которых двойственные оценки остаются прежними.

1) $\Delta b_2, \Delta b_3 = 0$;

$\Delta b_1 \geq -5,$

$\Delta b_1 \leq 25,$

$-5 \leq \Delta b_1 \leq 25,$

$35 - 5 \leq b_1 \leq 35 + 25,$

$30 \leq b_1 \leq 60.$

Вывод: при изменении запасов сырья А от 30 до 60 кг его оценка равна 3 и оно будет использоваться полностью (т. е. сохраняется его дефицитность).

$Y^* = (3,4,0);$

2) $\Delta b_1, \Delta b_2 = 0$;

$\Delta b_3 \geq -10,$

$30 \leq b_3.$

Вывод: при запасе сырья В от 30 кг его оценка равна 0 и оно не будет использоваться полностью (т. е. сохраняется его избыточность).

3) $\Delta b_1, \Delta b_3 = 0$;

$\Delta b_2 \geq -12{,}5,$

$\Delta b_2 \leq 5,$

$\Delta b_2 \leq 10,$

$-12{,}5 \leq \Delta b_2 \leq 5,$

$17{,}5 \leq b_2 \leq 40.$

Вывод: при изменении запасов сырья Б от 17,5 до 40 кг его оценка равна 4 и оно будет использоваться полностью (т. е. сохраняется его дефицитность).

Применим неравенства:

$$\max_{k_{ij}>0}\left(\frac{-x_j^*}{k_{ij}}\right) \le \Delta b_i \le \min_{k_{ij}<0}\left(\frac{-x_j^*}{k_{ij}}\right),$$

где Δb_i – величина изменения i-го типа сырья; k_{ij} – коэффициенты структурных сдвигов.

1	x2	10	**5**	3	1	0	-2	**1**	**-1**	**0**		4
2	x3	14	**12,5**	-1	0	1	2,5	**-0,5**	**1**	**0**		13,5
3	x7	0	**10**	2	0	0	-2	**0**	**-1**	**1**		9
			225	2	0	0	4	3	4	0		229

i = (1, 2, 3) – номер ресурса; j = *(2, 3, 7)* – номер изделия.

1) Для первого типа сырья (y_1):

$k_{12} = 1$, $k_{15} = -0{,}5$, $k_{17} = 0$ (в вычислении не участвует);

$$\max_{k_{12}=1}\left(\frac{-5}{1}\right) \le \Delta b_1 \le \min_{k_{15}=-0,5}\left(-\frac{12,5}{-0,5}\right)$$

$$-5 \le \Delta b_1 \le 25.$$

2) Для второго типа сырья (y_2) :

$k_{22} = -1$, $k_{25} = 1$, $k_{27} = -1$,

$$\max_{k_{25}=1}\left(-12,5\right) \le \Delta b_2 \le \min_{\substack{k_{22}=-1\\ k_{27}=-1}}\left(5;10\right)$$

$$-12,5 \le \Delta b_2 \le 5.$$

3) Для третьего типа сырья (y_3) :

$$-10 \le \Delta b_3.$$

Ответы на контрольные вопросы:

1. Определите изменения величины прибыли при увеличении второго вида сырья на 1 кг: F = 225+4, X = (0, 4, 13,5, 0).

2. Определите оптимальное решение задачи для случая, когда вектор ресурсов задан в виде B = (40, 20, 30).

$$Y^* = (3, 4, 0);$$

Z = $35y_1+30y_2+40y_3$;
$Z^/ = 40*3+20*4+30*0 = 200$.

2.5. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в форме основной задачи, для которой среди векторов Pi, составленных из коэффициентов при неизвестных в системе уравнений, имеется т единичных. Вместе с тем, двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными). Такую задачу и рассмотрим теперь, предварительно предположив, что единичными являются векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$, т. е. рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \tag{2.15}$$

$$x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_mP_m + x_{m+1}P_{m+1} + \ldots + x_nP_n = P_0, \tag{2.16}$$

$$x_j \geq 0, \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{2.17}$$

где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \ldots; P_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$P_{m+1}=\begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix};\ldots;P_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\quad P_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

и среди чисел $b_{i\,(}i = l, m)$ имеются отрицательные.

В данном случае $X=(b_1;b_2;\ldots;b_m;0;\ldots;0)$ есть решение системы линейных уравнений (2.16). Однако это решение не является планом задачи (2.15)–(2.17), так как среди его компонент имеются отрицательные числа.

Поскольку векторы $P_l, P_2,\ldots,P_m$ – единичные, каждый из векторов $P_j(j = 1,2\ldots,n)$ можно представить в виде линейной комбинации данных векторов, причем коэффициентами разложения векторов P_j по векторам $P_l, P_2,\ldots,P_m$ служат числа: $x_{ij} = a_{ij}\, (i = l, 2,\ldots,m; j = l, 2,\ldots,n)$. Таким образом, можно найти:

$$\Delta_j = z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Определение. Решение $X=(b_1;b_2;\ldots;b_m;0;\ldots;0)$ системы линейных уравнений (2.16), определяемое базисом $P_l, P_2,\ldots,P_m$, называется псевдопланом задачи (2.15)–(2.17), если $\Delta_j \geq 0$ для любого $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Теорема 1. Если в псевдоплане $X=(b_1;b_2;\ldots;b_m;0;\ldots;0)$, определяемом базисом P_l, $P_{2,\ldots,Pm}$, есть хотя бы одно отрицательное число bi<0 такое, что все $a_{ij} \geq 0$, $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то задача (2.15)–(2.17), вообще не имеет планов.

Теорема 2. Если в псевдоплане $X=(b_1;b_2;\ldots;b_m;0;\ldots;0)$, определяемом базисом $P_1, P_2,\ldots,P_m$, имеются отрицательные числа bi<0 такие, что для любого из них существуют числа $a_{ii} < 0$, то можно перейти к новому псевдоплану, при котором значение целевой функции задачи (2.15)–(2.17) не уменьшится.

Сформулированные теоремы дают основание для построения алгоритма двойственного симплекс-метода.

Отыскание решения задачи двойственным симплекс-методом включает следующие этапы:

1. Находят псевдоплан задачи (т. е. $\Delta_j \geq 0$ для любого $\left(j = \overline{1,n}\right)$, а вектор P_0 содержит отрицательные переменные).

2. Проверяют этот псевдоплан на оптимальность. Если псевдоплан оптимален, то найдено решение задачи. В противном случае либо устанавливают неразрешимость задачи, либо переходят к новому псевдоплану.

3. Выбирают разрешающую строку с помощью определения ***наибольшего*** по абсолютной величине отрицательного числа столбца вектора P_0 и разрешающий столбец с помощью нахождения ***наименьшего*** по абсолютной величине отношения элементов (m+1)-й строки к соответствующим отрицательным элементам разрешающей строки: $\min\left(-\dfrac{\Delta_j}{a_{ij}}\right), \quad a_{ij} < 0.$

4. Находят новый псевдоплан, повторяют все действия, начиная все действия с п. 2.

Пример 2.3. Найти решение задачи, используя двойственный симплекс-метод:

$$F = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

С учетом того, что основная задача имеет базис, составим симплекс-таблицу и, применяя двойственный симплекс метод, найдем решение задачи (таблица 2.8).

Ответ: $X = \left(3;0;0;1/2\right), \quad F = -14{,}5.$

Таблица 2.8 – Решение задачи двойственным симплекс-методом

				-4	-7	-8	-5	0	0
i	Базис	c_i	(P_0)	$x_1\ (P_1)$	$x_2\ (P_2)$	$x_3\ (P_3)$	$x_4\ (P_4)$	$x_5\ (P_5)$	$x_6\ (P_6)$
1	x5	0	-4	-1	-1	0	-2	1	0
2	x6	0	-6	**-2**	-1	-2	0	0	1
m+1			0	4	7	8	5	0	0
$\alpha = \min\left(-\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right), a_{ij} < 0$				2	7	4			
1	x5	0	-1	0	-1/2	1	**-2**	1	-1/2
2	x1	-4	3	**1**	1/2	1	0	0	-1/2
			-12	0	5	4	5	0	2
$\alpha = \min\left(-\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right), a_{ij} < 0$					10		2,5		4
	x4	-5	1/2	0	1/4	-1/2	1	-1/2	1/4
	x1	-4	3	1	1/2	1	0	0	-1/2
			-14,5	0	3 ,75	6,5	0	2,5	3/4

Глава 3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим одну из важнейших задач линейного программирования – так называемую транспортную задачу. Сформулируем задачу в общем виде.

На m станциях отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$ сосредоточено соответственно $a_1, a_2, \ldots a_m$ единиц однородного груза. Груз следует перевезти в n пунктов назначения $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причём в каждый из пунктов нужно завести соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j задана и равна c_{ij}. Считается, что общий запас груза на всех станциях отправления равен суммарной потребности груза на всех станциях назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{3.1}$$

Требуется составить такой план перевозок, при котором общая стоимость всех перевозок окажется минимальной.

Все данные сведём в таблицу 3.1.

Таблица 3.1 – Таблица стоимости тарифов перевозок

Пункты отправления	Пункты назначения						
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	Запасы
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	$\sum b_j = \sum a_i$

Если условие (3.1) выполняется, то транспортную задачу называют транспортной задачей ***закрытого типа***, в противном случае ***открытой.***

Любая транспортная задача имеет допустимое решение (матрицу перевозок $\left\| x_{ij} \right\|$), если условие (3.1) выполняется.

В случае повышения запаса над потребностью, т. е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный *(n+1)*-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{in+1} = 0, \left(i = \overline{1,m}\right)$. Полученная задача является транспортной задачей, для которой выполняется равенство (3.1).

Аналогично, при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводится фиктивный *(m+1)*-й пункт назначения с потребностью $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $c_{m+1j} = 0, \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Обозначим через x_{ij} количество единиц груза, предназначенного к отправке из пункта A_i в пункт B_j. Тогда количество груза, которое планируется к доставке в пункт B_j из всех пунктов отправления, составляет:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad 1 \le j \le n..$$

Так как потребность в грузе пункта назначения B_j составляет b_j единиц, то должно быть выполнено равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad 1 \le j \le n..$$

В развёрнутом виде последние равенства представляют собой систему n линейных уравнений с m неизвестными:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n. \end{cases} \tag{3.2}$$

С другой стороны, общее количество груза, отправленного из пункта A_i во все пункты B_j, составляет сумму:

$$x_{i1} + x_{i2} + \cdots x_{in} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad 1 \le i \le m .$$

Таким образом, аналогично системе уравнений (3.2) получаем систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m. \end{cases} \tag{3.3}$$

Полученные системы уравнений (3.2) м (3.3) объединим и запишем в виде системы из $n + m$ линейных уравнений с nm неизвестными:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad 1 \le j \le n, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad 1 \le i \le m. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если величины x_{ij} свести в таблицу (таблица 3.2), то получим матрицу перевозок, по которой соотношения (3.4) легко проверяются: сумма элементов x_{ij}, расположенных в i-й строке, равна запасу a_i на пункте A_i; сумма элементов x_{ij} из столбца j равна потребности b_j пункта B_j.

Таблица 3.2 – Определение плана перевозок

Пункты отправления	Пункты назначения						Запасы
	B_1	B_2	...	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
	x_{11}	x_{12}		x_{1j}		x_{1n}	
A_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
	x_{21}	x_{22}		x_{2j}		x_{2n}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
	x_{i1}	x_{i2}		x_{ij}		x_{in}	
…	…	…	…	…	…	…	
A_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
	x_{m1}	x_{m2}		x_{mj}		x_{mn}	
Потребности	b_1	b_2	...	b_j	…	b_n	$\sum b_j = \sum a_i$

Из условий задачи следует, что стоимость F всех перевозок равна сумме:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \,. \qquad (3.5)$$

Поскольку стоимость F должна быть минимальной, то естественным образом приходим к следующей задаче линейного программирования: *среди всех неотрицательных решений системы уравнений (3.4) найти такое, при котором форма F достигает наименьшего значения*.

Сформулированная задача и является транспортной задачей по определению критерия стоимости перевозок.

Рангом матрицы системы (3.4) называют число $r = m + n - 1$, т. е. количество строк плюс количество столбцов и минус единица.

Количество ***базисных неизвестных*** x_{i1} ($i = 2, 3, \ldots, m$) и x_{1j} ($j = 2, 3, \ldots, n$) равно $m + n - 1$, остальные $mn - (m + n - 1)$ неизвестных называются ***свободными***.

Если число заполненных клеток в распределительной таблице равно рангу матрицы, то полученный план называется ***невырожденным***. В противоположном случае – ***вырожденным***.

Решение транспортной задачи сводится к отысканию допустимого базисного решения (опорного плана для транспортной задачи) и приближению опорного плана к оптимальному решению построением последовательных итераций.

Допустимое решение транспортной задачи называют планом перевозок.

3.2. Определение исходного базисного решения для транспортной задачи

Пример 3.1. Проиллюстрируем построение исходного базисного решения на примере транспортной задачи, заданной матрицей данных (таблица 3.3). В левом верхнем углу каждой клетки таблицы указаны стоимости c_{ij} перевозок единиц груза. Проверив выполнение условия (1), добавим фиктивный пункт назначения $B_{5,}$ тем самым приведем «открытую» задачу к «закрытой» (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Стоимость перевозок

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	3	0	180
A_2	5	5	1	2	0	60
A_i	*2*	*2*	4	*2*	*0*	80
Потребности	*120*	*40*	*60*	*80*	***20***	$\sum b_j = \sum a_i = 320$

Метод северо-западного угла

Заполнение распределительной таблицы начинают с клетки (1; 1), при этом $x_{11} = \min(a_1; b_1)$. Далее смещаются или по строке вправо или по столбцу вниз до клетки $(a_m; b_n)$. Заполненные клетки должны распространяться так, чтобы их можно было соединить ломаной линией, звенья которой взаимно перпендикулярны (таблица 3.4).

Таблица 3.4 – Построение решения методом северо-западного угла

Пункты отправления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	*2* **120**	*3* **40**	*4* **20**	*3*	*0*	180
A_2	*5*	*5*	*1* **40**	*2* **20**	*0*	60
A_i	*2*	*2*	*4*	*2* **60**	*0*	80
Потребности	120	40	60	80	20	320

Стоимость перевозок при найденном плане вычисляется по формуле:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{ij}x_{ij} + \cdots + c_{mn}x_{mn} .$$

$$\mathrm{F} = 240 + 120 + 80 + 40 + 40 + 120 = 640.$$

Метод наименьшего элемента

Строим распределительную таблицу и начинаем ее заполнять с той клетки, в которой наименьший тариф, нулевые тарифы фиктивного пункта назначения не рассматриваются как наименьшие (таблица 3.5).

Таблица 3.5 – Построение решения методом наименьшего элемента

Пункты отправ-ления	Пункты назначения					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	3	0	180
	80			**80**	**20**	
A_2	5	5	1	2	0	60
			60			
A_3	*2*	*2*	4	*2*	*0*	80
	40	**40**				
Потребности	120	40	60	80	20	320

Стоимость перевозок при найденном плане равна: F = 580.

Сравнивая значение F, видим, что, учитывая стоимости перевозок, затраты при втором методе значительно меньше.

Метод аппроксимации Фогеля

На каждой иттерации по всем столбцам и строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами. Эти разности записывают в специально отведенных для этого дополнительных в таблице условий строке и столбце таблице условий задачи. Среди разностей выбирают максимальную разность и в соответствуюшей строке (столбце), выбрав минимальный тариф, заполняют ячейку. Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке) (таблица 3.6).

Таблица 3.6 – Построение решения методом аппроксимации Фогеля

Пункт отправления	Пункты назначения					Запасы	Разность между минимальными тарифами, выбирается максимальный результат			
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5					
A_1	2	3	4	3	0	180	1	1	1	1
	120		40		20					
A_2	5	3	1	2	0	60	1	-	-	-
			60							
A_3	2	1	4	2	0	80	1	1	1	0
		40		40						
Потребности	120	40	60	80	20	300				
Разность между минимальными тарифами, выбирается максимальный результат	3	2	3	1						
	3	2	-	1						
	-	2	-	1						
	-	-	-	1						

Стоимость перевозок при найденном плане равна: F = 540.

3.3. Определение критерия оптимальности

С помощью рассмотренных методов построения первоначального опорного плана можно получить вырожденный или невырожденный опорный план. Построенный план транспортной задачи, как задачи линейного программирования, можно было бы довести до оптимального с помощью симплексного метода. Однако из-за громоздкости симплексных таблиц, содержащих *mn* неизвестных, и большого объема вычислительных работ, для получения оптимального плана используют более простые методы.

Наиболее часто применяются метод потенциалов (модифицированный распределительный метод) и метод дифференциальных рент.

Метод потенциалов

Этот первый точный метод решения транспортной задачи был предложен в 1949 г. А.В. Канторовичем и М.К. Гавуриным По существу он является детализацией метода последовательного улучшения плана применительно к транспортной задаче. Метод потенциалов позволяет определить, отправляясь от некоторого опорного плана перевозок, построить решение транспортной задачи за конечное число шагов (итераций).

Общий принцип определения оптимального плана транспортной задачи этим методом аналогичен принципу решения задачи линейного программирования симплексным методом, а именно: сначала находят опорный план транспортной задачи, а затем его последовательно улучшают до получения оптимального плана.

Составим двойственную задачу:

1) $u_i \left(i=\overline{1,m}\right),\ v_i \left(j=\overline{1,n}\right)$ – любые;

2) $u_i + v_j \le c_{ij}, \quad j=\overline{1,n}, i=\overline{1,m}$;

3) $Z(u,v)=\sum\limits_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j v_j \to \max$.

Пусть есть план $X^* = \left\{x_{ij}^*\right\}, \quad \left(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}\right)$.

Потенциалами данного плана называется набор из $m+n$ действительных чисел $u_i \left(i=\overline{1,m}\right)$ и $v_i \left(j=\overline{1,n}\right)$, удовлетворяющих условиям $u_i + v_j = c_{ij}, \quad j=1,n, i=1,m$, где c_{ij} – тариф занятой клетки.

Поскольку число занятых клеток равно $m+n-1$, то для однозначного определения потенциалов один из них можно брать произвольно, например, $u_k = 0$.

Полученная система потенциалов позволяет проверить полученный план на оптимальность. Составляем разности $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ для всех клеток таблицы. Поскольку для занятых клеток $\Delta_{ij} = 0$ (по определению), то остается найти Δ_{ij} для незанятых клеток. Эти величины (числа) называются оценками клеток распределительной таблицы, или плана.

Теорема (теорема оптимальности). Опорный план X оптимален в том и только в том случае, если среди оценок Δ_{ij} – этого плана нет отрицательных.

Если среди оценок Δ_{ij} – есть отрицательные, то план не оптимален и его улучшают методом перераспределения поставок по циклу. Отметим клетку с наименьшей отрицательной оценкой и построим цикл с начальной вершиной в этой клетке.

Циклом с начальной вершиной в данной клетке называется замкнутая ломаная, обладающая следующими свойствами:

1) все ее вершины, кроме начальной, расположены в занятых клетках;

2) звенья (стороны) цикла расположены в строках и столбцах таблицы;

3) в каждой вершине звенья соединяются под прямым углом;

4) на звеньях цикла могут быть занятые клетки, но они не являются

вершинами цикла;

5) два звена могут пересекаться в какой-либо клетке, но эта клетка не должна быть занятой (иначе она является вершиной).

На рисунке 3.1 показано несколько циклов с началом в незанятой клетке (именно такие циклы встречаются при исследовании плана на оптимальность).

На рисунке 3.2 показано несколько замкнутых ломаных, не являющихся циклами: «так нельзя». Штриховыми линиями обозначены возможности сокращения цикла или распада цикла на объединение (сумму) нескольких циклов.

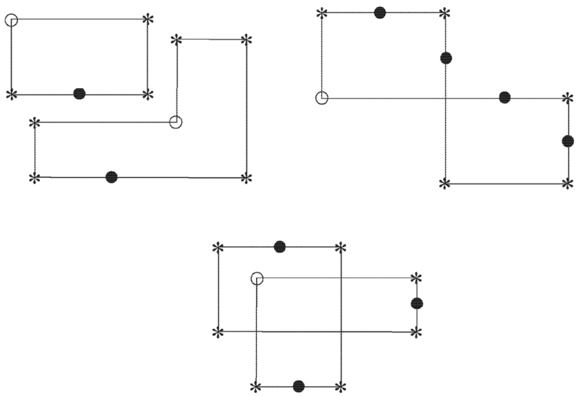


Рисунок 3.1 – Примеры циклов пересчета. Принятые обозначения:
○ – незанятая клетка (начало цикла); ⁎ – занятая клетка;
● – возможные места расположения занятых клеток на звеньях

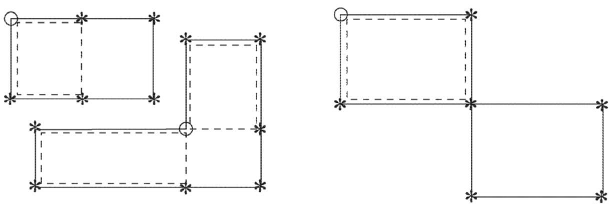


Рисунок 3.2 –Примеры неправильно построенных циклов

После того как для выбранной свободной клетки цикл построен, следует перейти к новому опорному плану. Для этого необходимо переместить грузы в пределах клеток, связанных с данной свободной клеткой. Это перемещение производят по следующим правилам:

1) каждой из клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке – знак плюс, а всем остальным клеткам – поочередно знаки минус и плюс (будем называть эти клетки минусовыми и плюсовыми);

2) в данную свободную клетку переносят меньшее из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. Одновременно это число прибавляют к соответствующим числам, стоящим в плюсовых клетках, и вычитают из чисел, стоящих в минусовых клетках. Клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а минусовая клетка, в которой стояло минимальное из чисел x_{ij}, считается свободной.

В результате указанных выше перемещений грузов в пределах клеток, связанных циклом с данной свободной клеткой, определяют новый опорный план транспортной задачи.

Описанный выше переход от одного опорного плана транспортной задачи к другому, называется сдвигом по циклу пересчета.

Улучшение новых планов проводят до тех пор, пока очередной план не станет оптимальным. Для него все оценки клеток должны быть неотрицательными.

Таким образом, процесс нахождения решения транспортной задачи методом потенциалов включает следующие этапы:

1. Находят опорный план. При этом число заполненных клеток должно быть равным $m+n-1$.

2. Находят потенциалы $u_i \left(i=\overline{1,m}\right)$ и $v_i \left(j=\overline{1,n}\right)$ соответственно пунктов назначения и отправления.

3. Для каждой свободной клетки определяют число: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Если среди чисел Δ_{ij} нет отрицательных, то получен оптимальный план транспортной задачи; если же они имеются, то переходят к новому опорному плану.

4. Среди отрицательных чисел Δ_{ij} выбирают максимальное, строят для свободной клетки, которой оно соответствует, цикл пересчета и производят сдвиг по циклу пересчета.

5. Полученный опорный план проверяют на оптимальность, т. е. снова повторяют все действия, начиная с этапа 2.

Примечание. При определении опорного плана или в процессе решения задачи может быть получен вырожденный опорный план. Чтобы избежать в этом случае зацикливания, следует соответствующие нулевые элементы опорного плана заменить нулем (или сколь угодно малым положительным числом ε).

Пример 3.2. Найти решение транспортной задачи методом потенциалов

Решение транспортной задачи методом потенциалов приведём на примере транспортной задачи, в которой уже внесено предварительно найденное методом наименьшей стоимости допустимое базисное решение. В таблице 3.7 базисное решение рассматриваемой транспортной задачи заполняет $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ клеток.

Таблица 3.7 – Пример базисного решения задачи

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	3	4	1	50
	5	**25**		**20**	
A_2	2	3	1	5	40
	25		**15**		
A_3	*3*	*2*	4	*4*	20
			20		
Потребности	30	25	35	20	110

Найдём потенциалы пунктов отправления A_i и пунктов назначения B_j. Для этого составляем систему $m + n - 1 = 6$ уравнений по базисным неизвестным:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3, \\ u_1 + v_2 = 2, \\ u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_3 = 4. \end{cases}$$

Далее полагаем $u_1 = 0$, и из последней системы уравнений находим потенциалы: $v_1 = 3$, $v_2 = 2$, $v_4 = 1$, $u_2 = -1$, $v_3 = 2$, $u_3 = 2$ (таблица 3.8).

Таблица 3.8 – Построение цикла пересчета

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1 3	B_2 2	B_3 2	B_4 1	
0 A_1	2 + **5**	3 - **25**	4 2	1 **20**	50
-1 A_2	2 - **25**	3 2	1 + **15**	5 5	40
2 A_3	3 -2	2 + -2	4 - **20**	4 1	20
Потребности	30	25	35	20	110

По найденным потенциалам вычисляем оценки тарифов свободных клеток:

$$\Delta_{13} = c_{13} - v_1 - u_3 = 4 - 0 - 2 = 2,$$

$$\Delta_{22} = c_{22} - v_2 - u_2 = 3 + 1 - 2 = 2,$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - v_2 - u_4 = 5 + 1 - 1 = 5,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - v_3 - u_1 = 3 - 2 - 3 = -2,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - v_3 - u_2 = 2 - 2 - 2 = -2,$$

$$\Delta_{34} = c_{34} - v_3 - u_4 = 4 - 2 - 1 = 1.$$

Так как вычисленные Δ_{ij} содержат отрицательные значения, то план перевозок не является оптимальным. Поэтому необходимо построить цикл пересчета. За базисную переменную следует выбрать либо x_{31}, либо x_{32}. Остановимся на неизвестном x_{32} (таблица 3.8). Среди «отрицательных» ячеек выберем минимальное значение:

$x_{32} = \min(x_{12}, x_{21}, x_{33}) = \min(25, 25, 20) = 20.$

После пересчета по циклу (число 20 прибавляется к текущему значению плана, если ячейка положительная и отнимается, если ячейка отрицательная), x_{33} – свободная переменная, а переменная $x_{32} = 20$ становится базисной. При этом базисные переменные меняют свои значения:

$x_{11} = 25, x_{12} = 5, x_{14} = 20, x_{21} = 5$, м$_{23} = 35$.

Заполним новый план перевозок (таблица 3.9) и, вычислив потенциалы, проверим его на оптимальность.

Таблица 3.9 – Новый план перевозок

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	3	4	1	50
	25	**5**		**20**	
A_2	2	3	1	5	40
	5		**35**		
A_3	*3*	*2*	4	*4*	20
		20			
Потребности	30	25	35	20	110

Для определения потенциалов пунктов отправления A_i и пунктов назначения B_j по новому базисному решению составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3, \\ u_1 + v_2 = 2, \\ u_1 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_3 + v_2 = 2. \end{cases}$$

Полагая $u_1 = 0$, находим:

$v_1 = 3,\ v_2 = 2,\ v_4 = 1,\ u_2 = -1,\ v_3 = 2,\ v_3 = 0.$

$$\Delta_{13} = c_{13} - v_1 - u_3 = 4 - 0 - 2 = 2,$$

$$\Delta_{22} = c_{22} - v_2 - u_2 = 3 + 1 - 2 = 2,$$

$$\Delta_{24} = c_{24} - v_2 - u_4 = 5 + 1 - 1 = 5,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - v_3 - u_1 = 3 - 0 - 3 = 0,$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - v_3 - u_3 = 4 - 0 - 2 = 2,$$

$$\Delta_{34} = c_{34} - v_3 - u_4 = 4 - 0 - 1 = 3.$$

Таким образом, оценки тарифов для всех свободных клеток не отрицательны. Поэтому в таблице 3.9 записано требуемое оптимальное решение рассматриваемой транспортной задачи.

Оптимальная суммарная стоимость перевозок:

$F_{опт} = 25 * 3 + 5 * 2 + 20 * 1 + 5 * 2 + 35 * 1 + 20 * 2 = 190.$

Метод дифференциальных рент

При нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое условно оптимальное распределение) и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок.

[1] *Условно оптимальное распределение*

Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных транспортной задачи находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в кружки, а клетки, в которых стоят указанные числа, заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи. Поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной.

[2] *Избыточные и недостаточные строки*

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, считаются недостаточными (отрицательными). Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, считаются избыточными (положительными).

[3] *Определение промежуточной ренты*

Для каждого из столбцов находят разности между найденным минимальным тарифом (числом в кружке), и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в кружке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее, называемое промежуточной рентой.

[4] *Переход к новой таблице*

Таблица получается из предыдущей таблицы прибавлением к соответствующим тарифам, стоящим в отрицательных строках, промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободными. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь уже число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в кружки. Заключены в кружки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

Поскольку в новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, то при заполнении клеток следует пользоваться *специальным правилом*, которое состоит в следующем.

- Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку).
- После этого берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенным в ней кружком. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец).
- Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены кружки с заключенными в них числами. Если к тому же удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице.
- Находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту и на основе этого строят новую таблицу. При этом могут возникнуть некоторые затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных выше итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Описанный выше метод решения транспортной задачи имеет более простую логическую схему расчетов, чем рассмотренный выше метод потенциалов. Поэтому в большинстве случаев для нахождения решения конкретных транспортных задач с использованием ЭВМ применяется метод дифференциальных рент.

Пример 3.3. Найти решение транспортной задачи методом «Дифференциальных рент».

На первом этапе распределим между пунктами назначения часть груза с минимальными тарифами (таблица 3.10), определим избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту, равную «2», и при переходе к новой таблице тарифы отрицательных строк увеличим на величину «ренты», составим новый план (таблица 3.11).

Таблица 3.10 – Условно оптимальное распределение

A \ B	**B**$_1$	**B**$_2$	**B**$_3$	**B**$_4$	**B**$_5$	$\boldsymbol{a_i}$	Избыточные и недостаточные строки
A$_1$	5	4	**3** 60	4	0 60	160	+40
A$_2$	3	**2** 80	5	5	0	140	+60
A$_3$	**1** 60	6	3	**2** 0	0	60	–100
b_j	80	80	60	80	60	400	
Разность между минимальным тарифом (числом в кружке) и ближайшим к нему тарифом	**2**	-	-	2	0		

Таблица 3.11 – Определение оптимального распределения

A \ B	**B**$_1$	**B**$_2$	**B**$_3$	**B**$_4$	**B**$_5$	$\boldsymbol{a_i}$	Избыточные и недостаточные строки
A$_1$	5	4	**3** **60**	4 **80**	0 **20**	160	0
A$_2$	**3** **20**	**2** **80**	5	5	0 40	140	0
A$_3$	**3** **60**	8	5	**4**	2	60	0
$\boldsymbol{b_j}$	80	80	60	80	60		

Ответ: план перевозок: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 60 & 80 \\ 20 & 80 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Минимальная стоимость перевозки:
F(X) = 60+60+160+180+320 = 780.

Глава 4. МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

4.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Динамическое программирование (ДП) – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются *многошаговыми*. Начало развития ДП относится к 50-м годам XX в. Оно связано с именем Р. Беллмана (1920) – американский математик).

Если модели линейного программирования можно использовать в экономике для принятия крупномасштабных плановых решений в сложных ситуациях, то модели ДП применяются:

- при решении задач значительно меньшего масштаба, например, при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа;
- при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию;
- при распределении дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т. п.

В реально функционирующих больших экономических системах еженедельно требуется принимать микроэкономические решения. Модели ДП ценны тем, что позволяют на основе стандартного подхода с использованием при минимальном вмешательстве человека принимать такие решения. И если каждое взятое в отдельности такое решение малосущественно, то в совокупности эти решения могут оказать большое влияние на прибыль.

Приведем общую постановку задачи ДП

Рассматривается управляемый процесс, например, экономический процесс распределения средств между предприятиями, использования ресурсов в течение ряда лет, замены оборудования, пополнения запасов и т. п. В результате управления система (объект управления) S переводится из начального состояния s_0 в состояние $\hat{s}$. Предположим, что управление можно разбить на п шагов, т. е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему S из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность п пошаговых управлений.

Обозначим через X_k управление на k-м шаге $(k = 1, 2, n)$. Переменные $X_к$ удовлетворяют некоторым ограничениям, и в этом смысле называются допустимыми (X_k может быть числом, точкой в n-мерном пространстве, качественным признаком).

Пусть X $(X_1, X_{2, \ldots,} X_n)$ – управление, переводящее систему S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$. Обозначим через s_k состояние системы после k-го шага управления. Получаем последовательность состояний: $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n = \hat{s},$ которую изобразим кружками (рисунок 4.1).

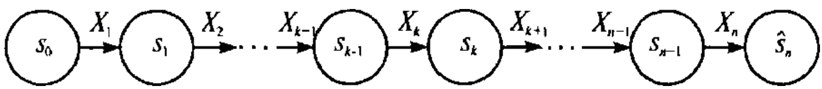


Рисунок 4.1 – Последовательность состояний

Показатель эффективности рассматриваемой управляемой операции – целевая функция – зависит от начального состояния и управления:

$$Z = F(s_0, X).$$

Сделаем несколько предположений.

1. Состояние s_k системы в конце к-го шага зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления на к-м шаге $X_к$ (и не зависит от предшествующих состояний и управлений). Это требование называется *«отсутствием последействия»*. Сформулированное положение записывается в виде уравнений:

$$s_k = \varphi_k\left(s_{k-1}, X_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

которые называются *уравнениями состояний*.

2. Целевая функция (4.1) является аддитивной от показателя эффективности каждого шага. Обозначим показатель эффективности k-о шага через

$$Z_k = f_k\left(s_{k-1}, \mathrm{X}_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4.2}$$

тогда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k\left(s_{k-1}, \mathrm{X}_k\right) \quad . \tag{4.3}$$

Задача пошаговой оптимизации (задача ДП) формулируется так: *определить такое допустимое управление X, переводящее систему S из состояния s_0 в состояние $\hat{s}$, при котором целевая функция (4.3) принимает наибольшее (наименьшее) значение.*

Выделим особенности модели ДП:

1. *Задача оптимизации интерпретируется как n-шаговый процесс управления.*

2. Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.

3. Выбор управления на k-м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4. Состояние s_k после к-го шага управления зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления $X_к$ (отсутствие последействия).

5. На каждом шаге управление $X_к$ зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние s_k – от конечного числа параметров.

Следует вспомнить, что существуют различные способы решения подобных задач, применяемые в зависимости от вида функций, ограничений, размерности и т. п. Рассмотрим вычислительную схему ДП, которая окажется безразличной к способам задания функций и ограничений. Вычислительная схема связана с принципом оптимальности и использует рекуррентные соотношения.

4.2 Принцип оптимальности и уравнения Беллмана

Принцип оптимальности впервые был сформулирован Р. Беллманом в 1953 г. *Каково бы ни было состояние s системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.* Беллманом были четко сформулированы и условия, при которых принцип верен. Основное требование – процесс управления должен быть без обратной связи, т. е. управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Принцип оптимальности утверждает, что для любого процесса без обратной связи оптимальное управление таково, что оно является оптимальным для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса. Поэтому решение на каждом шаге оказывается наилучшим с точки зрения управления в целом. Если изобразить геометрически оптимальную траекторию в виде ломаной линии, то любая часть этой ломаной будет являться оптимальной траекторией относительно начала и конца.

Уравнения Беллмана. Вместо исходной задачи ДП с фиксированным числом шагов п и начальным состоянием s_0 рассмотрим последовательность задач, полагая последовательно $n = 1, 2, \ldots$ при различных s – одношаговую, двухшаговую и т. д. – используя принцип оптимальности.

Введем ряд новых обозначений. Обозначения в ДП несут большую информационную нагрузку, поэтому очень важно их четко усвоить.

На каждом шаге любого состояния системы s_{k-1} решение нужно выбирать «с оглядкой», так как этот выбор влияет на последующее состояние s_k и дальнейший процесс управления, зависящий от s_k. Это следует из принципа оптимальности.

Но есть один шаг, последний, который можно для любого состояния s_{n-1} планировать локально-оптимально, исходя только из соображений этого шага.

Рассмотрим п-й шаг: s_{n-1} – состояние системы к началу *n-го* шага; $s_n = \hat{s}$ – конечное состояние; Xn – управление на *n-м* шаге; $f_n\left(s_{n-1}, X_n\right)$ – целевая функция (выигрыш) *n-го* шага.

Согласно принципу оптимальности, $X_п$ нужно выбирать так, чтобы для любых состояний s_{n-i} получить максимум целевой функции на этом шаге.

Обозначим через $Z_n^*(s_{n-1})$ максимум целевой функции – показателя эффективности *n-го* шага при условии, что к началу последнего шага система S была в произвольном состоянии s_{n-1}, а на последнем шаге управление было оптимальным.

$Z_n^*(s_{n-1})$ *называется условным максимумом целевой функции на п-м шаге*. Очевидно, что

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{X_n\}} f_n\left(s_{n-1}, X_n\right). \tag{4.4}$$

Максимизация ведется по всем допустимым управлениям X_n.

Решение X_n, при котором достигается $Z_n^*(s_{n-1})$, также зависит от s_{n-1} и *называется условным оптимальным управлением на п-м шаге*. Оно обозначается через $X_n^*(s_{n-1})$.

Условно оптимальный выигрыш на *п-м* шаге (рисунок 4.2).

Решив одномерную задачу локальной оптимизации по уравнению (4.5), найдем для всех возможных состояний s_{n-1} две функции: $Z_n^*(s_{n-1})$ и $X_n^*(s_{n-1})$.

Рассмотрим теперь двухшаговую задачу: присоединим к *n*-му шагу (n–1)-й (рисунок 4.2).

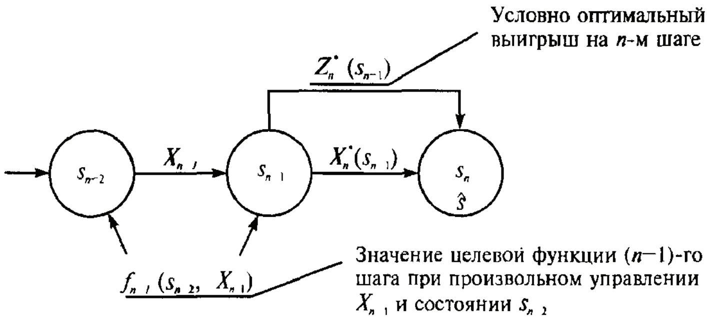


Рисунок 4.2 – Пример двухшаговой задачи

Для любых состояний s_{n-2}, произвольных управлений X_{n-1} и оптимальном управлении на n-м шаге, значение целевой функции на двух последних шагах равно:

$$f_{n-1}\left(s_{n-2}, X_{n-1}\right) + Z_n^*\left(s_{n-1}\right). \tag{4.5}$$

Согласно принципу оптимальности для любых s_{n-2} решение нужно выбирать так, чтобы оно вместе с оптимальным управлением на последнем (n-м) шаге приводило бы к максимуму целевой функции на двух последних шагах. Следовательно, нужно найти максимум выражения (4.5) по всем допустимым управлениям X_{n-1}. Максимум этой суммы зависит от s_{n-2}, обозначается через $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$ и *называется условным максимумом целевой функции при оптимальном управлении на двух последних шагах*. Соответствующее управление X_{n-1} на (n–1)-м шаге обозначается через $X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$, и называется *условным оптимальным управлением на (n-1)-м шаге*:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) = \max_{\{X_{n-1}\}}\left\{f_{n-1}\left(s_{n-2}, X_{n-1}\right) + Z_n^*(s_{n-1})\right\}. \tag{4.6}$$

Далее рассматривается трехшаговая задача: к двум последним шагам присоединяется (n-2)-й и т. д. (рисунок 4.3).

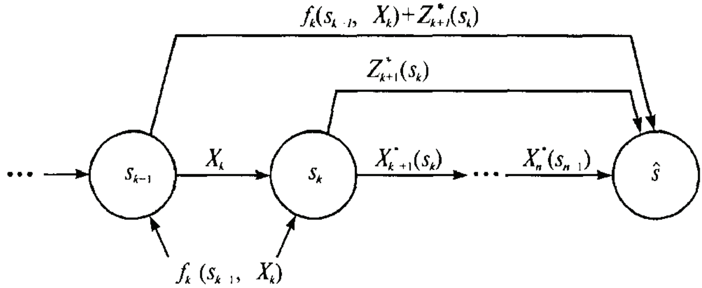


Рисунок 4.3 – Многоэтапная задача условной оптимизации

Обозначим через $Z_k^*(s_{k-1})$ *условный максимум целевой функции, полученный при оптимальном управлении на n–k+l шагах, начиная с к-го до конца, при условии, что к началу k-го шага система находилась в состоянии* s_{k-1}. Фактически эта функция равна:

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{x_k,\dots,x_n\}} \sum_{i=k}^{n} f_i\left(s_{i-1}, X_i\right).$$

Тогда

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{x_{k+1},\dots,x_n\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i\left(s_{i-1}, X_i\right).$$

Целевая функция на *n–k* последних шагах при произвольном управлении $X_к$ на *k*-м шаге и оптимальном управлении на последующих *n–k* шагах равна:

$$f_k\left(s_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^*(s_k) .$$

Согласно принципу оптимальности, $X_к$ выбирается из условия максимума этой суммы, т. е.

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \left\{\max_{\{X_k\}} f_k\left(s_{k-1}, X_k\right) + Z_{k+1}^*(s_k)\right\}. \tag{4.7}$$

$k = n-1,\ n-2, \dots\ 2,\ 1.$

Управление $X_к$ на шаге, при котором достигается максимум в (4.7), обозначается через $X_k^*(s_{k-1})$ и называется *условным оптимальным управлением на k-м шаге*.

Уравнения (4.7) называют *уравнениями Беллмана*. Это рекуррентные соотношения, позволяющие найти предыдущее значение функции, зная последующие. Если из (4.6) найти $Z_n^*\left(s_{n-1}\right)$, то при к = п–1 из (4.7) можно определить, решив задачу максимизации для всех возможных значений s_n-$_2$, выражения для $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$ и соответствующее $X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$ Далее, зная $Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right)$, находим, используя (4.7) и (4.1), уравнения состояний.

Процесс решения уравнений (4.6) и (4.7) называется *условной оптимизацией.*

В результате условной оптимизации получаются две последовательности:

$$Z_n^*\left(s_{n-1}\right), Z_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right), \ldots, Z_2^*\left(s_1\right), Z_1^*\left(s_0\right),$$

условные максимумы целевой функции на последнем, на двух последних, на *...п* шагах и

$$X_n^*\left(s_{n-1}\right), X_{n-1}^*\left(s_{n-2}\right), \ldots, X_2^*\left(s_1\right), X_1^*\left(s_0\right),$$

условные оптимальные управления на *п-м, (п-1)-м,..., 1-м* шагах.

Используя эти последовательности, можно найти решение задачи ДП при данных *п* и s_0.

$Z_1^*\left(s_0\right)$ – условный максимум целевой функции за *п* шагов при условии, что к началу 1-го шага система была в состоянии S_0, т. е.

$$Z_{\max} = Z_1^*\left(s_0\right). \tag{4.8}$$

Далее следует использовать последовательность условных оптимальных управлений и уравнения состояний (4.1).

При фиксированном s_0 получаем: $\tilde{O}_1^* = X_1^*\left(s_0\right)$. Далее из уравнений (4.1) находим: $s_1^* = \varphi_1\left(s_0, X_1^*\right)$ и подставляем это выражение в последовательность условных оптимальных управлений: $\tilde{O}_2^* = X_2^*\left(s_1^*\right)$ и т. д. по цепочке:

$$X_1^* = X_1^*(s_0) \to s_1^* = \varphi_1(s_0, X_1^*) \to X_2^* = X_2^*(s_1^*) \to$$

$$\to s_2^* = \varphi_2(s_1, X_2^*) \to X_3^* = X_3^*(s_2^*) \to \ldots \to$$

$$\to s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, X_{n-1}^*) \Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*).$$

Получаем оптимальное решение задачи ДП:

$$X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*).$$

(Стрелка $\to$ означает использование уравнений состояния, а стрелка $\Rightarrow$ – последовательности условных оптимальных управлений).

Пример 4.1

Планируется деятельность трех промышленных предприятий (системы) на очередной год. Начальные средства: $s_0 = 6$ усл. ед. Размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 усл. ед. Средства $\boldsymbol{x}$, выделенные k-му предприятию ($k = 1, 2, 3$), приносят в конце года прибыль $f_k(x)$. Функции $f_k(x)$ заданы таблично. Принято считать, что:

а) прибыль $f_k(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;

б) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;

в) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	5	9	12	14	15
$f_2(x)$	6	9	11	13	16
$f_3(x)$	7	10	13	15	16

Основные рекуррентные соотношения и уравнения состояний:

1. Уравнения состояний:

$$s_k = s_{k-1} - X_k, \quad k = 1,2,3.$$

2. Условный максимум целевой функции на 3-м шаге:

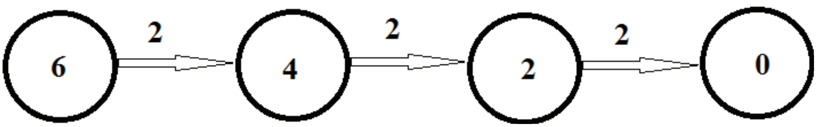
$$k = 3, \quad s_3 = 0, \quad Z_3^*(s_2) = \max_{\{X_3\}} f_3\left(X_3\right); \quad \Rightarrow \quad Z_3^*, X_3^*.$$

3. Условный максимум целевой функции на k-м шаге:

$$k = 2, \quad Z_2^*(s_1) = \max_{\{X_2\}}\left\{f_2\left(X_2\right) + Z_3^*(s_2)\right\} \quad \Rightarrow \quad Z_2^*, X_2^*;$$

$$k = 1, \quad Z_1^*(s_0) = \max_{\{X_1\}}\left\{f_1\left(X_1\right) + Z_2^*(s_1)\right\} \quad \Rightarrow \quad Z_1^*, X_1^*.$$

Решение примера 4.1 представлено а таблице (4.1).



Ответ: $\boldsymbol{Z_{max} = 28, X^* = (2, 2, 2)}$.

Таблица 4.1 – Процесс условной оптимизации

$s_k = s_{k-1} - X_k$			$k = 2$			$k = 1$		
s_{k-1}	X_k	s_k	$f_2(X_2) + Z_3^*(s_2)$	Z_2^*	X_2^*	$f_1(X_1) + Z_2^*(s_1)$	Z_1^*	X_1^*
0	**0**	**0**	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0+7=7	7	0	0+7=7	**7**	**0**
	1	0	6+0=6			5+0=5		
2	0	2	0+10=10	13	1	0+13=13	12	1
	1	1	6+7=13			5+7=12		
	2	0	9+0=9			9+0=9		
3	0	3	0+13=13	16	2	0+16=16	18	**1**
	1	2	6+10=16			5+13=18		
	2	1	9+7=16			9+7=16		
	3	0	11+0=11			12+0=12		
4	0	4	0+15=15	19	2	0+19=19	**22**	**2**
	1	3	6+13=19			5+16=21		
	2	2	9+10=19			9+13=22		
	3	1	11+7=18			12+7=19		
	4	0	13+0=13			14+0=14		

5	0	5	0+16=16	22	2	0+22=22	**25**	**3**
	1	4	6+15=21			5+19=24		
	2	3	9+13=22			9+16=25		
	3	2	11+10=21			12+13=25		
	4	1	13+7=20			14+7=21		
	5	0	16+0=16			15+0=15		
6	0	6	0+16=16	24	3	0+24=24	**28**	**2**
	1	5	6+16=22			5+22=27		
	2	4	9+15=24			9+19=28		
	3	3	11+13=24			12+16=28		
	4	2	13+10=23			14+13=27		
	5	1	16+7=23			15+7=22		
	6	0	0+16=16			15+0=15		

Глава 5. ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Задачи линейного программирования

Вариант 1

Задание № 1

Используя геометрическую интерпретацию, решить задачу линейного программирования:

$$F(X) = x_1 - 3x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1, \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Задание № 2

- Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
- привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
- построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
- пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
- провести его экономический анализ и сделать выводы.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Вариант 2

Задание № 1

Используя геометрическую интерпретацию, решить задачу линейного программирования:

$$F(X) = 2x_1 + 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Задание № 2

- Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
- привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
- построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
- пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
- провести его экономический анализ и сделать выводы.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

Вариант 3

Задание № 1

Используя геометрическую интерпретацию, решить задачу линейного программирования:

$$F(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 16, \\ 2x_1 + 8x_2 \ge 20 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задание № 2

- Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
- привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
- построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
- пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
- провести его экономический анализ и сделать выводы.

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Цена изделия	10	14	12	

Вариант 4

Задание № 1

Используя геометрическую интерпретацию решить задачу линейного программирования:

$$F(X) = 3x_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Задание № 2

- Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
- привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
- построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
- пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
- провести его экономический анализ и сделать выводы.

Ресурс	Виды продукции				Запас ресурса
	1	**2**	**3**	**4**	
A	6	8	4	7	2650
B	5	6	2	10	350
C	8	12	10	14	4700
Цена изделия, долл.	16	12	16	14	

Вариант 5

Задание № 1

Используя геометрическую интерпретацию, решить задачу линейного программирования:

$$F(X) = 4x_1 - 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 3x_1 - x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Задание № 2

- Составить математическую модель задачи (сформировать систему ограничений и целевую функцию);
- привести систему ограничений к каноническому виду, обозначив и введя дополнительные переменные;
- построить симплексную таблицу и заполнить её первоначальным опорным планом;
- пользуясь алгоритмом симплексного метода, найти оптимальное решение задачи;
- провести его экономический анализ и сделать выводы.

Ресурс	Виды продукции				Запас ресурса
	1	**2**	**3**	**4**	
A	6	8	4	7	2650
B	5	6	2	10	350
C	8	12	10	14	4700
Цена изделия, долл.	6	7	5	8	

Двойственные задачи

Вариант 1

Задание 1. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач:

$F(X)=8x_1+6x_2+5x_3\to\max,$ $\begin{cases}3x_1+3x_2+9x_3\le 1053,\\ 10x_1+9x_2+15x_3\le 1170,\\ 5x_1+5x_2+x_3\le 325\end{cases}$ $x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$	$F(X)=x_1+2x_2\to\min,$ $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=11,\\ 3x_1+2x_2+15x_3\ge 11,\\ 2x_1-2x_2\le 7\end{cases}$ $x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$

Задание 2. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения *максимальной прибыли* при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Сырье	Продукция			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	3	3	-	18
II	-	1	1	4
III	1	2	-	10
Прибыль, ден. ед.	2	5	1	

Требуется

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Определить, производство какой продукции нерентабельно.

4. Составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать результат двойственной задачи

5. Применяя теоремы двойственности проверить правильность решения и полученного результата

6. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть

7. Проанализировать устойчивость полученных оценок

8. Проверить интервалы устойчивости с помощью двойного неравенства

9. Определить, на сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли

10. Предложите новое количество ресурсов, при котором их оценки не изменятся, вычислите при новом составе значение целевой функции.

Вариант 2

Задание 1. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач:

$F(X)=2x_1-x_2+3x_4+2x_5+4\to\max,$ $\begin{cases} x_1-2x_3+2x_4-3x_5=2, \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_5=6, \\ -x_1+2x_2+3x_4=4 \end{cases}$ $x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,5}.$	$F(X)=2x_1+5x_2\to\min,$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2\le 25, \\ 2x_1-x_2\ge 1, \\ x_1+x_3=5 \end{cases}$ $x_j\ge 0,\quad j=\overline{1,3}.$

Задание 2. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения *максимальной прибыли* при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Сырье	Продукция			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	1	3	1	14
II	3	3	1	28
III	-	1	1	4
Прибыль, ден. ед.	4	10	2	

Требуется

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Определить, производство какой продукции нерентабельно.
4. Составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать результат двойственной задачи
5. Применяя теоремы двойственности проверить правильность решения и полученного результата.
6. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть.
7. Проанализировать устойчивость полученных оценок.
8. Проверить интервалы устойчивости с помощью двойного неравенства.
9. Определить, на сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.
10. Предложите новое количество ресурсов, при котором их оценки не изменятся, вычислите при новом составе значение целевой функции.

Вариант 3

Задание 1. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач:

$$F(X) = -2x_1 - 8x_2 - x_3 + 5x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

$$F(X) = 10x_1 - x_3 - 13x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 \le -2, \\ 2x_1 - 2x_4 \le 2, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 \le -5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0.$$

Задание 2. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения *максимальной прибыли* при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Сырье	Продукция			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	2	1	3	18
II	2	-	1	10
III	4	2	3	24
Прибыль, ден. ед.	6	3	9	

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Определить, производство какой продукции нерентабельно.

4. Составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать результат двойственной задачи.

5. Применяя теоремы двойственности проверить правильность решения и полученного результата.

6. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть.

7. Проанализировать устойчивость полученных оценок.

8. Проверить интервалы устойчивости с помощью двойного неравенства.

9. Определить, на сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.

10. Предложите новое количество ресурсов, при котором их оценки не изменятся, вычислите при новом составе значение целевой функции.

Вариант 4

Задание 1. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач:

$$F(X) = 10x_1 + 8x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 13 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

$$F(X) = 2x_1 - 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 - 2x_3 \le -8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

Задание 2. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения *максимальной прибыли* при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Сырье	Продукция			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	4	1	3	28
II	2	-	3	14
III	6	1	6	42
Прибыль, ден. ед.	12	2	18	

Требуется

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Определить, производство какой продукции нерентабельно.
4. Составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать результат двойственной задачи.
5. Применяя теоремы двойственности проверить правильность решения и полученного результата.

6. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть.

7. Проанализировать устойчивость полученных оценок.

8. Проверить интервалы устойчивости с помощью двойного неравенства.

9. Определить, на сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.

10. Предложите новое количество ресурсов, при котором их оценки не изменятся, вычислите при новом составе значение целевой функции.

Вариант 5

Задание 1. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, найти решение обеих задач:

$$F(X) = 3x_2 - 5x_3 - 8x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_4 \le -8 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \le -6 \\ -2x_3 + x_4 \le 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}.$$

$$F(X) = 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Задание 2. Для производства трех видов продукции используются три вида сырья. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида, запасы сырья, а также прибыль с единицы продукции приведены в таблице. Определить план выпуска продукции для получения *максимальной прибыли* при заданном дополнительном ограничении. Оценить каждый из видов сырья, используемых для производства продукции.

Сырье	Продукция			Запасы сырья, ед.
	A	B	C	
I	2	1	1	8
II	1	2	-	5
III	3	2	4	12
Прибыль, ден. ед.	4	5	2	

1. Построить математическую модель задачи.
2. Решить задачу симплекс-методом.
3. Определить, производство какой продукции нерентабельно.
4. Составить к данной задаче двойственную и, используя соответствие переменных, выписать результат двойственной задачи.
5. Применяя теоремы двойственности проверить правильность решения и полученного результата.
6. Дать экономическую интерпретацию двойственных оценок, указать наиболее дефицитный и избыточный ресурс, если он есть.
7. Проанализировать устойчивость полученных оценок.
8. Проверить интервалы устойчивости с помощью двойного неравенства.
9. Определить, на сколько можно снизить запас каждого из ресурсов, чтобы это не привело к уменьшению прибыли.
10. Предложите новое количество ресурсов, при котором их оценки не изменятся, вычислите при новом составе значение целевой функции.

Транспортные задачи

Вариант 1

Задание 1. Требуется перевезти товар с трех складов в пять магазинов. Данные о наличии товара на складе, спрос на него в магазинах, стоимость перевозки единицы груза между складами и магазинами приведены в таблице:

Склады		Магазины			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		30	10	30	30
A_1	25	27	36	28	21
A_2	45	25	35	26	25
A_3	30	23	21	27	21

- Проверить задачу на закрытость.
- Составить опорный план методом «Северо-западного угла», «Минимального элемента», «Аппроксимации Фогеля».
- Проверить опорный план на вырожденность.
- Применяя результат распределения методом «Северо-западного угла», составить план перевозки «Методом потенциалов».
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задание 2. Решить задачу методом «Дифференциальных рент»

Пункты отправ-ления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	15	21	11	240
A_2	14	8	15	20	190
A_3	19	16	26	19	190
Потребности	140	190	170	120	

- Составить план перевозки, чтобы затраты были минимальными.
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Вариант 2

Задание 1. Требуется перевезти товар с трех складов в пять магазинов. Данные о наличии товара на складе, спрос на него в магазинах, стоимость перевозки единицы груза между складами и магазинами приведены в таблице

Базы	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	7	9	15	4	18	200
A_2	13	25	8	15	5	250
A_3	5	11	6	20	12	250
Потребности	80	260	100	140	120	700

- Проверить задачу на закрытость.
- Составить опорный план методом «Северо-западного угла», «Минимального элемента», «Аппроксимации Фогеля».
- Проверить опорный план на вырожденность.
- Применяя результат распределения методом «Северо-западного угла», составить план перевозки «Методом потенциалов».
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задание 2. Решить задачу методом «Дифференциальных рент»

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	15	21	14	7	350
A_2	8	15	11	9	330
A_3	16	26	12	13	270
Потребности	160	390	250	150	

- Составить план перевозки, чтобы затраты были минимальными.
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Вариант 3

Задание 1. Требуется перевезти товар с трех складов в пять магазинов. Данные о наличии товара на складе, спрос на него в магазинах, стоимость перевозки единицы груза между складами и магазинами приведены в таблице:

Базы	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	5	8	15	20	9	240
A_2	8	7	6	12	14	160
A_3	16	11	19	10	5	200
Потребности	180	40	160	120	100	600

- Проверить задачу на закрытость.
- Составить опорный план методом «Северо-западного угла», «Минимального элемента», «Аппроксимации Фогеля».
- Проверить опорный план на вырожденность.
- Применяя результат распределения методом «Северо-западного угла», составить план перевозки «Методом потенциалов».
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задание 2. Решить задачу методом «Дифференциальных рент»

Пункты от-правления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	14	17	11	290
A_2	15	11	21	12	240
A_3	26	12	20	13	190
Потребности	200	260	140	120	

- Составить план перевозки, чтобы затраты были минимальными.
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Вариант 4

Задание 1. Требуется перевезти товар с трех складов в пять магазинов. Данные о наличии товара на складе, спрос на него в магазинах, стоимость перевозки единицы груза между складами и магазинами приведены в таблице:

Базы	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	15	8	5	21	15	150
A_2	4	12	7	8	10	200
A_3	11	20	13	4	56	200
Потребности	100	180	40	120	110	550

- Проверить задачу на закрытость.
- Составить опорный план методом «Северо-западного угла», «Минимального элемента», «Аппроксимации Фогеля».
- Проверить опорный план на вырожденность.
- Применяя результат распределения методом «Северо-западного угла», составить план перевозки «Методом потенциалов».
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задание 2. Решить задачу методом «Дифференциальных рент»

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12	21	9	8	450
A_2	13	15	11	15	300
A_3	19	26	12	13	400
Потребности	340	290	370	150	

- Составить план перевозки, чтобы затраты были минимальными.
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Вариант 5

Задание 1. Требуется перевезти товар с трех складов в пять магазинов. Данные о наличии товара на складе, спрос на него в магазинах, стоимость перевозки единицы груза между складами и магазинами приведены в таблице:

Базы	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	19	8	14	5	9	150
A_2	6	10	5	25	11	200
A_3	7	13	8	12	14	150
Потребности	60	140	100	80	120	500

- Проверить задачу на закрытость.
- Составить опорный план методом «Северо-западного угла», «Минимального элемента», «Аппроксимации Фогеля».
- Проверить опорный план на вырожденность.
- Применяя результат распределения методом «Северо-западного угла», составить план перевозки «Методом потенциалов».
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задание 2. Решить задачу методом «Дифференциальных рент»

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	21	9	10	14	180
A_2	15	11	13	13	230
A_3	26	12	17	21	180
Потребности	220	160	120	90	

- Составить план перевозки, чтобы затраты были минимальными.
- Вычислить общие затраты на перевозку груза.
- Построить граф перевозок.

Задачи динамического программирования

Вариант 1

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70
Подразделение 1	17	41	55	69	76	84	93
Подразделение 2	19	30	38	58	69	89	90
Подразделение 3	25	33	58	66	70	83	98
Подразделение 4	16	42	45	68	71	81	91
V = 130 тыс. сом.							

Вариант 2

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	39	42	58	69	79	83	93	100
Подразделение 2	22	24	41	64	74	82	97	101
Подразделение 3	33	44	46	49	79	83	84	95
Подразделение 4	38	49	55	60	68	87	92	109
V = 120 тыс. сом.								

Вариант 3

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	13	45	52	55	61	75	97	104
Подразделение 2	38	46	52	63	79	81	98	99
Подразделение 3	15	34	54	64	78	87	95	98
Подразделение 4	39	46	50	55	77	79	85	102
V = 110 тыс. сом.								

Вариант 4

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	16	46	55	62	75	85	89	103
Подразделение 2	35	42	53	56	69	72	80	88
Подразделение 3	34	39	40	63	68	78	91	99
Подразделение 4	13	26	37	47	77	80	92	107
V = 110 тыс. сом.								

Вариант 5

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	39	49	52	64	65	75	90	99
Подразделение 2	18	39	52	54	59	78	97	109
Подразделение 3	23	30	50	62	65	76	93	105
Подразделение 4	17	33	40	60	64	86	88	92
V = 120 тыс. сом.								

Вариант 6

Требуется распределить V тыс. сом. между четырьмя подразделениями предприятия таким образом, чтобы предприятие в целом получило наибольшую прибыль. Зависимость получаемой прибыли от объёма выделенных денежных средств, приведена в таблице:

Объём	10	20	30	40	50	60	70	80
Подразделение 1	15	39	45	58	75	88	92	106
Подразделение 2	23	35	56	66	76	80	84	103
Подразделение 3	18	45	48	66	77	83	98	109
Подразделение 4	12	26	54	63	65	66	80	98
V = 110 тыс. сом.								

ПЕРЕЧЕНЬ ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах: учеб. пособие. 3-е изд., стер. СПб.: Лань, 2011. 352 с.
2. *Палий И.А.* Линейное программирование: учеб. пособие / И.А. Палий. М.: Эксмо, 2008. 256 с.
3. *Шикин Е.В., Шикина Г.Е.* Исследование операций: учеб. М.: ТК Велди, Изд-во Проспект, 2006. 280 с.
4. *Лю Б.* Теория и практика неопределенного программирования / Б. Лю; пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 416 с.
5. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Дрофа. 2004. 208 с.
6. *Карманов В.Г.* Математическое программирование: учеб. пособие. 5-е изд., стер. М.: Физматлит, 2004. 264 с.
7. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2000. 208 с.
8. *Волков И.К., Загоруйко Е.А.* Исследование операций: учеб. для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. 436 с.
9. *Банди Б.* Основы линейного программирования / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 176 с.

Любовь Сергеевна Красниченко,
Эркеаим Сейдакмат кызы

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *И.С. Волоскова*
Компьютерная верстка *М.Р. Фазлыевой*

Подписано в печать 25.06.2021.
Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Объем 8,0 п.л. Тираж 100 экз. Заказ 11.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Анкара, 2а