ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 517.968 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.4.609-614

УСЕНОВ И.А., КОСТЫРЕВА Ю.В., АЛМАМБЕТ КЫЗЫ С.
[1]Кыргызский Национальный Университет им. Ж. Баласагына,
Бишкек, Кыргызская Республика

USENOV L.A., KOSTYREVA YU.V., ALMAMBET KYZY S.
[1]Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic
e-mail: iausen@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА- КАНТОРОВИЧА

APPROXIMATE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION BY THE NEWTON-KANTOROVICH METHOD

Бул жумушта сызыктуу эмес биринчи тартиптеги интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселени чыгаруу методикасы сунушталат. Баштапкы маселе ордуна коюуу аркылуу сызыктуу эмес Урсондун операторун камтыган интегралдык теңдемеге алынып келинет. Алынган сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин чыгарылышын табуу үчүн Ньютон-Канторовичтин ыкмасы колдонулат.

Өзөк сөздөр. *баштапкы маселе, интегро-дифференциалдык теңдеме, Ньютон-Канторовичтин ыкмасы*

В настоящей работе предлагается методика изучения начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка. Начальная задача с помощью подстановки сводится к нелинейному интегральному уравнению с оператором Урсона. Для построения решения нелинейного интегрального уравнения используется метод Ньютона-Канторовича.

Ключевые слова: *начальная задача, интегро-дифференциальное уравнение, метод Ньютона-Канторовича*

In this paper, we propose a method for studying the initial value problem for a first-order nonlinear integro-differential equation. The initial problem is reduced by substitution to a nonlinear integral equation with the Urson operator. To construct a solution to a nonlinear integral equation, the Newton-Kantorovich method is used.

Key words: *initial problem, integro-differential equation, Newton-Kantorovich method*

В настоящей работе предлагается методика изучения начальной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка.

Итак, рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$u'(t)+\int_0^1 K(t,s,u'(s))ds=f(t) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(0)=b, \quad b=const\,, \qquad (2)$$

где $u(t)\in L_{2_{[0,1]}}$, $u'(t)\in C'_{[0,1]}$, $K(t,s,u'(s))\in L_{2_{[0,1]\times[0,1]\times R}}$ -ядро интегрального оператора, $f(t)\in L_{2_{[0,1]}}$ Введем подстановку

$$u'(t)=\varphi(t). \qquad (3)$$

Тогда интегрированием (3) от 0 до t

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$u(t)=\int_0^t \varphi(s)\,ds+c\,, \qquad (4)$$

где c - произвольная постоянная, с учетом начального условия (2) , имеем

$$u(0)=\int_0^0 \varphi(s)\,ds+c=b\Rightarrow\; b=c\,. \qquad (5)$$

Тогда из (4), получаем

$$u(t)=\int_0^t \varphi(s)\,ds+b\,. \qquad (6)$$

В силу (3) уравнение (1) приобретает вид

$$\varphi(t)+\int_0^1 K(t,s,\varphi(s))ds=f(t)\quad . \qquad (7)$$

Таким образом, получили нелинейное интегральное уравнение с оператором Урсона.

Пусть нелинейный оператор в уравнении (7) дифференцируем по Фреше в окрестности центра шара $S(\varphi^*,r)\equiv\rho(\varphi^*,r)$:

$$E+\int_0^1 K_\varphi(t,s,\varphi^*(s))ds\,. \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$K(\varphi)=\int_0^1 K(t,s,\varphi(s))ds$ - оператор Урсона;

$A(\varphi^*)\varphi=\int_0^1 K_\varphi(t,s,\varphi^*(s))\varphi(s)\,ds$ -линейный оператор, дифференциал нелинейного оператора.

Допустим, что линейный оператор A является непрерывным, положительным и самосопряженным оператором. Тогда имеет место лемма:

Лемма: Если оператор $A(\varphi^*)$ – линейный, непрерывный самосопряженный положительный оператор и единица является регулярным значением, то оператор $(E+A(\varphi^*))$ обратим и ограничен, причем имеет место неравенство

$$\left\|(E+A(\varphi^*))^{-1}\right\|\le 1\,. \qquad (9)$$

Сначала выводим одну оценку остаточного члена формулы Тейлора для функции вещественной переменной $f(t)$. Пусть существует $f^{(n)}(t)$, удовлетворяющая в промежутке (a,b) условию Гёльдера с фиксированной точкой a:

$$\left\|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(a)\right\|\le N\|t-a\|^{\beta},\ 0<\beta\le 1.$$

Тогда

$$\left\|f(t)-\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(t-a)^m\right\|\le\frac{N}{(1+\beta)(2+\beta)...(n+\beta)}\|t-a\|^{n+\beta}\,.$$

В дальнейших исследованиях мы будем использовать аналог данной оценки для функциональных операторов.

Лемма. Если $K(\varphi)$ - дифференцируемый по Фреше оператор из H в H и для $A(\varphi^*)$ выполнено ослабленное условие Гёльдера с фиксированным элементом $\varphi_2\equiv\varphi^*$, то

$$\left\|K(\varphi)-K(\varphi^*)-A(\varphi^*)(\varphi-\varphi^*)\right\|\le\frac{N}{1+\beta}\left\|\varphi-\varphi^*\right\|^{1+\beta}. \qquad (9.1)$$

При этом достаточно выполнение условия Гёльдера на отрезке $\varphi_\tau=\varphi^*+\tau(\varphi-\varphi^*),\ 0\le\tau\le 1$.

После использования метода Ньютона -Канторовича[1,2] уравнение (7) приобретает вид

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\varphi(t)=\varphi(t)-(E+A(\varphi^*))^{-1}(\varphi(t)+K(\varphi)-f(t)). \qquad (10)$$

Введем обозначение

$$R(\varphi,f)=\varphi(t)-(E+A(\varphi^*))^{-1}(\varphi(t)+K(\varphi)-f(t)) . \qquad (11)$$

Преобразуя (11), имеем

$$R(\varphi,f)=(E+A(\varphi^*))^{-1}(\varphi(t)+A(\varphi^*)\varphi-\varphi(t)-K(\varphi)+f(t)) =(E+A(\varphi^*))^{-1}(A(\varphi^*)\varphi-K(\varphi)+f(t)). \qquad (12)$$

С помощью обозначения (11) уравнение (10) перепишется в следующем виде

$$\varphi(t)=R(\varphi,f). \qquad (13)$$

Покажем, что оператор $R(\varphi,f)$ в шаре $S(\varphi^*,r)$ удовлетворяет условию Липшица.

Пусть для оператора $A(\varphi^*)$ выполнено условие Гёльдера

$$\left\|A(\varphi_1)-A(\varphi^*)\right\|\le N\left\|\varphi_1-\varphi^*\right\|^{\beta} \qquad (14)$$

с фиксированным элементом $\varphi_2\equiv\varphi^*$ и при любом φ_1 из области $\left\|\varphi-\varphi^*\right\|\le t\eta$, где $1<t\le\dfrac{2+\beta}{\beta}$.

Производная оператора $R(\varphi,f)$ в точке $\forall\varphi\in S(\varphi^*,r)$ имеет вид

$$R'_{\varphi}(\varphi)=(E+A(\varphi^*))^{-1}(A(\varphi^*)-A(\varphi)). \qquad (15)$$

Оценим норму оператора $R'_{\varphi}(\varphi)$

$$\left\|R'_{\varphi}(\varphi)\right\|=\left\|(E+A(\varphi^*))^{-1}(A(\varphi^*)-A(\varphi))\right\|\le\left\|(E+A(\varphi^*))^{-1}\right\|\left\|A(\varphi^*)-A(\varphi)\right\|\le N\left\|\varphi-\varphi^*\right\|^{\beta}\le N(t\eta)^{\beta} \qquad (16)$$

Из оценки (16) следует, что $\forall\varphi_1,\varphi_2\in S(\varphi^*,r)$ оператор $R(\varphi,f)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\left\|R(\varphi_1,u)-R(\varphi_2,u)\right\|\le N(t\eta)^{\beta}\left\|\varphi_1-\varphi_2\right\| . \qquad (17)$$

Следовательно, оператор $R(\varphi,f)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $N(t\eta)^{\beta}<1$

Таким образом, оператор $R(\varphi,f)$ является оператором сжатия.

Покажем, что оператор $R(\varphi,f)$ некоторой окрестности точки φ^* отображает в себя

$$\begin{aligned}
&\left\|R(\varphi,f)-\varphi^*\right\|=\left\|\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}(A(\varphi^*)\varphi-K(\varphi)+f(t))-\varphi^*\right\|\le\\
&\le\left\|\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}\right\|\left\|-K(\varphi)+K(\varphi^*)+A(\varphi^*)(\varphi-\varphi^*)-K(\varphi^*)+f(t))-\varphi^*\right\|\le\\
&\le\left\|K(\varphi)-K(\varphi^*)-A(\varphi^*)(\varphi-\varphi^*)\right\|+\left\|f(t))-f^*(t)\right\|\le\frac{N}{1+\beta}\left\|\varphi-\varphi^*\right\|^{1+\beta}+\left\|f(t))-f^*(t)\right\|\le\\
&\le\frac{N}{1+\beta}(t\eta)^{1+\beta}+\left\|f(t))-f^*(t)\right\|.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Пусть

$$\left\|f(t))-f^*(t)\right\|\le t\eta-\frac{N}{1+\beta}(t\eta)^{1+\beta}. \qquad (19)$$

Учитывая (19) из (18) имеем

$$\left\|R(\varphi,f)-\varphi^*\right\|=t\eta . \qquad (20)$$

Таким образом, оператор $R(\varphi,f)$ шар $\left\|\varphi-\varphi^*\right\|\le t\eta$ отображает в себя. В силу принципа сжимающих отображений уравнение (7) в шаре $\left\|\varphi-\varphi^*\right\|\le t\eta$ имеет единственное решение при любом $f(t)\in L_{2[0,1]}$.

Таким образом, доказано

Теорема. Пусть: 1) $K(t,s,\varphi)$ – заданная функция в области $D\equiv\{0\le t,s\le 1,\ -\infty<\varphi<+\infty\}$ непрерывная по t,s и дифференцируема по φ в окрестности точки (t,φ^*), где φ^* центр, а r-

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com
ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

радиус шара $S(\varphi^*,r)\equiv\rho(\varphi^*,r)$; 2) оператор $(E+A(\varphi^*))^{-1}(A(\varphi^*)\varphi-K(\varphi)+f(t))$ удовлетворяет условию $\left\|(E+A(\varphi^*))^{-1}(A(\varphi^*)\varphi-K(\varphi)+f(t))\right\|\le\eta$; 3) оператор $A(\varphi^*)$ является симметричным положительным и выполнено условие Гёльдера (14) с фиксированным элементом $\varphi_2\equiv\varphi^*$ и при любом φ_1 из области $\left\|\varphi-\varphi^*\right\|\le t\eta$, где $1<t\le\dfrac{2+\beta}{\beta}$. Тогда в шаре $\left\|\varphi-\varphi^*\right\|\le t\eta$ уравнение (7) при любом $f(t)\in L_{2_{[0,1]}}$ имеет единственное решение $\varphi(t)\in L_{2_{[0,1]}}$.

Пример. Рассмотрим нелинейное интегро –дифференциальное уравнение вида:

$$u'(t)+\frac{e}{2}\int_0^1\left(\sqrt{st}Lnu'(s)\right)^2ds=t\,. \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(0)=b,\quad b=const\,. \qquad (2)$$

Введем подстановку

$$u'(t)=\varphi(t)\,. \qquad (3)$$

Тогда из (3), имеем

$$u(t)=\int_0^t\varphi(s)ds+b\,. \qquad (4)$$

В силу (3) уравнение (1) запишется в виде

$$\varphi(t)+\frac{e}{2}\int_0^1\left(\sqrt{st}Ln\varphi(s)\right)^2ds=t\,. \qquad (5)$$

Таким образом, получили нелинейное интегральное уравнение с оператором Урсона.

Нелинейный оператор в левой части уравнения (1) дифференцируем по $\varphi(t)$ в окрестности центра окружности $S(\varphi^*,r)\equiv\rho(\varphi^*,r)$, где $\varphi^*\equiv e$ центр шара

$$E+\frac{e}{2}\int_0^1 2\left(\sqrt{st}Ln\varphi^*\right)\frac{\sqrt{st}}{\varphi^*}(\cdot)ds\,. \qquad (6)$$

Введем обозначение:

$K(\varphi):\equiv\dfrac{e}{2}\displaystyle\int_0^1\left(\sqrt{ts}Ln\varphi(s)\right)^2ds$ - оператор Урсона,

$A(\varphi^*)\varphi=\displaystyle\int_0^1 t\cdot s\varphi(s)ds$ -дифференциал нелинейного оператора.

Для уравнения (5) используем метод Ньютона-Канторовича

$$\varphi(t)=\varphi(t)-\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}\left[\varphi(t)+A(\varphi^*)\varphi+K(\varphi)-t\right].$$

Преобразуя, имеем

$$\varphi(t)=\left(\alpha E+A(\varphi^*)\right)^{-1}\left[A(\varphi^*)\varphi-K(\varphi)+t\right] \qquad (7)$$

Найдем обратный оператор $\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}$, для этого решим линейное уравнение вида

$$h(t)+\int_0^1 t\cdot sh(s)ds=f(t)\,. \qquad (8)$$

Следовательно, обратный оператор $\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}$ имеет вид

$$\left(E+A(\varphi^*)\right)^{-1}\quad(\cdot)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts(.)ds \qquad (9)$$

Тогда учитывая (9) из (7) имеем

$$\varphi(t)=\left((\cdot)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts(.)ds\right)\left[\int_0^1 ts\varphi(s)ds-\frac{e}{2}\int_0^1\left(\sqrt{ts}Ln\varphi(s)\right)^2ds+t\right] \qquad (10)$$

После проделанных преобразований из (10) имеем

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\varphi(t)=\frac{3}{4}\int_0^1 ts\varphi(s)ds-\frac{3e}{8}\int_0^1\left(\sqrt{ts}Ln\varphi(s)\right)^2ds+\frac{3}{4}t \cdot \tag{11}$$

Уравнение (11) решаем методом полуобращения. Сначала обращаем линейный оператор $(\cdot)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts(\cdot)ds$. Для этого решаем уравнение

$$\psi(t)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts\psi(s)ds=f(t) \cdot \tag{12}$$

Следовательно, обратный оператор к оператору $(\cdot)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts(\cdot)ds$ имеет вид

$$\left((\cdot)-\frac{3}{4}\int_0^1 ts(\cdot)ds\right)^{-1} \quad (\cdot)+\int_0^1 ts(.)ds \tag{13}$$

Тогда учитывая (13) из (11) имеем

$$\varphi(t)=\left((\cdot)+\int_0^1 ts(.)ds\right)\left[\frac{3}{4}t-\frac{3e}{8}\int_0^1\left(\sqrt{ts}Ln\varphi(s)\right)^2ds\right]. \tag{14}$$

После проделанных преобразований из (14) имеем

$$\varphi(t)=t-\frac{e}{2}\int_0^1\left(\sqrt{ts}Ln\varphi(s)\right)^2ds \cdot \tag{15}$$

Введем обозначение

$$c=\int_0^1 sLn^2\varphi(s)ds \cdot \tag{16}$$

Тогда формальное решение уравнения (15) имеет вид

$$\varphi(t)=\left(1-\frac{ec}{2}\right)t \tag{17}$$

Найдем значение c, для этого (17) подставим в (16)

$$c=\int_0^1 sLn^2ksds,\quad k \quad 1-\frac{ec}{2}. \tag{18}$$

Интеграл является несобственным интегралом второго рода. После вычисления интеграла, имеем

$$c=\int_0^1 sLn^2ksds=\frac{1}{2}$$

Подставляя значение c в (17), получаем решение уравнения (15)

$$\varphi(t)=\left(1-\frac{e}{4}\right)t. \tag{19}$$

Полученное решение, подставляя в (4) получаем решение задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения (1)

$$u(t)=\int_0^t\left(1-\frac{e}{4}\right)sds+b \quad \left(1-\frac{e}{4}\right)\frac{t^2}{2}+b. \tag{20}$$

Список литературы

1. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений [Текст] / М.А.Красносельский. - М.: 1969.
2. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем [Текст] / М.И.Иманалиев. – Фрунзе:1974.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ [Текст] / Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. –М: Наука, 1977.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

4. Юлдашев Т. К. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка [Текст] / Т.К.Юлдашев //Изв. вузов. Матем., 2015. - № 9. – стр. 74– 79.

5. Усенов И.А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве [Текст] / И.А.Усенов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика. 2016. - №1. - С.8-14. DOI: 10.18384/2310-7251-2016-1-08-14.