ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 517.68 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.3.459-466

САДАБАЕВ А., АБДЫЛДАЕВА А.Р.
[1]Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына,
Бишкек, Кыргызская Республика,
[2] Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова,
Бишкек, Кыргызская Республика

SAADABAEV A., ABDYLDAEVA A.R.
[1]Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2] Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic
caadabaev@mail.ru, asabdyl_72@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА

THE EXISTENCE OF A FINITE-DIMENSIONAL SOLUTION NONLINEAR INTEGRAL FREDHOLM EQUATION OF THE FIRST KIND

Бул иште сызыктуу эмес интегралдык теңдеменин оң жагы жана ядросу жакындаштырылып берилген учурда чектүү өлчөмдүү чыгарылышынын жашай тургандыгы далилденген. Чектүү өлчөмдүү мейкиндикте калыптандыруучу оператор тургузулуп, параметр n дин δ дан көз карандылыгы тургузулуп жана $n \to \infty$ умтулганда чектүү өлчөмдөгү чыгарылыш берилген теңдеменин так чыгарылышына умтула тургандыгы далилденди. Мисалда Гриндин функциясынын жардамы менен дифференциалдык операторду интегралдык оператор менен аппроксимациялоо мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн.

Өзөк сөздөр: *интегралдык теңдеме, калыптандыруучу оператор, чектүү өлчөмдөгү калыптандыруучу оператор, калыптандыруучу параметр.*

В данной работе доказывается существование конечномерного решения нелинейного интегрального уравнения, когда правая часть и ядро заданы приближенно. Построен конечномерный регуляризующий оператор, причем доказано, что при $n \to \infty$ и при специальном выборе параметра n от δ, решение конечномерной задачи сходится к точному решению исходного уравнения. Показано на примере, что с помощью функции Грина можно аппроксимировать дифференциальный оператор интегральным оператором.

Ключевые слова: *интегральное уравнение, регуляризующий оператор, конечномерный регуляризующий оператор, параметр регуляризации.*

In this paper, the existence of a finite-dimensional solution of a nonlinear integral equation is proved when the right-hand side and the kernel are given approximately. A finite-dimensional regularizing operator is constructed, and it is proved that for $n \to \infty$ and for a special choice of the parameter n from δ, the solution of the finite-dimensional problem converges to the exact solution of the original equation. It is shown by an example that using the Green's function it is possible to approximate a differential operator by an integral operator.

Key words: integral equation, *regularizing operator, finite-dimensional regularizing operator, regularization parameter.*

Новизна этой работы заключается в том, что конечномерный регуляризирующий оператор построен для решения нелинейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с приближенно заданными ядром и правой частью.

Рассмотрим случай, когда в уравнении

$$\int_0^1 K\left(t,s\right)z(s)ds = u(t) + \int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds, \qquad (1)$$

приближенно заданы ядро и правая часть.

Допустим, что вместо ядер $K(t,s), K_1(t,s)$ заданы ядра $K_n(t,s)$ и $K_{1n}(t,s)$, удовлетворяющие неравенству

$$\left\|K(t,s)-K_n(t,s)\right\|_{C((0,1)\times(0,1))} \le C_1\beta\left(n\right), \quad \left\|K_1(t,s)-K_{1n}(t,s)\right\| \le C_2\beta\left(n\right). \qquad (2)$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$\alpha z + \int_0^1 K_n(t,s)z(s)ds \quad u(t) + \int_0^1 K_{1n}(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds. \qquad (3)$$

Уравнение (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} &\alpha z + \int_0^1 K(t,s)z(s)ds \quad u(t) + \int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds - \\ &-\int_0^1 \left[K_n(t,s)-K(t,s)\right]z(s)ds + \int_0^1 \left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,z(s)\right)ds. \end{aligned} \qquad (4)$$

Правую часть (4) обозначим через $f(t)$. Тогда уравнение (4) формально запишется в виде

$$\alpha z + \int_0^1 K(t,s)z(s)ds = f\left(t\right). \qquad (5)$$

Решение этого уравнения имеет вид $\left[1\right]$ $z\left(t\right) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k f_k}{\lambda_k+\alpha}\varphi_k(t) + \frac{1}{\alpha}f(t)$, или,

полагая $\frac{1}{\lambda_k} = \mu_k$, где μ_k- характеристическое значение ядра $K(t,s)$, предыдущее уравнение запишем в виде

$$z(t) = -\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k} + \frac{1}{\alpha}f(t). \qquad (6)$$

Подставляя значение $f(t)$, из (6) получаем

$$\begin{aligned} z(t) = &-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k} - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{1+\mu_k\alpha}\cdot\frac{1}{\mu_k^{3/2}}\int_0^1 M\left(v,z(v)\right)\varphi_k(v)dv + \\ &+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)z(v)dvds - \\ &-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,z(v)\right)dvds + \\ &+\frac{1}{\alpha}u(t) + \frac{1}{\alpha}\int_0^1 K_1(t,s)M\left(s,z(s)\right)ds - \frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)z(s)ds + \\ &+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,z(s)\right)ds. \end{aligned}$$

Предыдущее уравнение можно записать в виде

$$z(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1 M\left(v,z(v)\right)\varphi_k(v)dv\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)z(v)dv\cdot\varphi_k(s)\right)ds\cdot\varphi_k(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,z(v)\right)dvds-\qquad(7)$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)z(s)ds+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,z(s)\right)ds.$$

Введем новую неизвестную функцию $g(t)=z(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1 M\left(v,z(v)\right)\varphi_k(v)dv\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}.$

(8)

Это уравнение разрешимо относительно $z(t)$ [2]. Оператор, обратный к оператору $E-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1 M\left(v,z(v)\right)\varphi_k(v)dv\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}$, обозначим через D_α. Тогда из (8) получаем

$$z(t)=D_\alpha g(t).\qquad(9)$$

Оператор D_α удовлетворяет условию Липшица $\left|D_\alpha g_1-D_\alpha g_2\right|\le\frac{1}{1-q}\left|g_1(t)-g_2(t)\right|.$ (10)

Учитывая (8), (9), уравнение (7) запишем в виде

$$g(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)\left(D_\alpha g(v)d\,v\right)\right)\varphi_k(s)ds\cdot\varphi_k(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_h(t,s)-K(t,s)\right)\cdot D_\alpha g(s)ds-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\mu_k\alpha}\int_0^1\varphi_k(s)\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g(v)\right)dvds\cdot\varphi_k(t)+$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M(s,D_\alpha g(s))ds.\qquad(11)$$

Нелинейное уравнение (11) решаем методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем функцию $g_0(t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k\varphi_k(t)}{1+\alpha\mu_k}+\frac{1}{\alpha}u(t).$ (12)

Остальные приближения определяем по формуле

$$g_j(t)=g_0(t)+\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)\left(D_\alpha g_{j-1}(v)\right)dv\right)\varphi_k\left(s\right)ds\cdot\varphi_k(t)-$$
$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)\left(D_\alpha g_{h-j}(s)\right)ds-\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(t)}{1+\mu_k\alpha}\cdot$$
$$\cdot\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha h_{j-1}(v)\right)dv\right)\varphi_k(s)ds+\qquad(13_j)$$
$$+\frac{1}{\alpha}\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,D_\alpha g_{j-1}(s)\right)ds,\quad j=1,2,...$$

Таким образом, по формуле (13_j) построены последовательные приближения $\left\{g_j(t)\right\}_{j=0}^{\infty}$

(14)

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Покажем, что последовательные приближения сходятся в пространстве $C(0,1)$. Для этого построим функциональный ряд

$$g_0(t)+\left(g_1(t)-g_0(t)\right)+\left(g_2(t)-g_1(t)\right)+\ldots+\left(g_j(t)-g_{j-1}(t)\right)+\ldots \qquad (15)$$

Сумма первых j членов ряда (15) совпадает с j членом последовательности (14).

Отсюда следует, что сходимость последовательности (14) эквивалентна сходимости ряда (15).

Для доказательства сходимости ряда (15) оценим каждый член этого ряда и составим мажорантный ряд.

Оценим $g_0(t)$:

$$|g_0(t)|\le\frac{1}{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_k}u_k}{1+\alpha\mu_k}\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right|+\frac{1}{\alpha}|u(t)|\le\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\right)^2u_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2}+\frac{1}{\alpha}\|u(t)\|_{C(0,1)}\le$$

$$\le\frac{K_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|u(t)\|_{L_2(0,1)}+\frac{1}{\alpha}\|u(t)\|_{C(0,1)}\le\frac{K_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\|u(t)\|_{C(0,1)}+\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\|u(t)\|_{C(0,1)}\le\frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}}\cdot\left(1+\frac{K_0}{2}\right)\|u(t)\|_{C(0,1)}. \qquad (16)$$

Здесь мы использовали неравенство Коши для суммы, неравенство $\dfrac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\le\dfrac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ и неравенство $\|u(t)\|_{L_2(0,1)}\le\|u(t)\|_{C(0,1)}$. [3]

Полагая $j=1$ в (3.4.13$_j$), получаем

$$|g_1(t)-g_0(t)|\le\frac{1}{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)\left(D_\alpha g_0(v)\right)dv\right)\varphi_k(s)ds\cdot\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right|+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left|\int_0^1\left(K_n(t,s)-K(t,s)\right)(D_\alpha g_0(s))ds\right|+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)dv\,\varphi_k(s)ds\,\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\mu_k}}\right|+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left|\int_0^1\left(K_{1n}(t,s)-K_1(t,s)\right)M\left(s,D_\alpha g_0(s)\right)ds\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\right)^2\left(\int_0^1\left(\int_0^1(K_n(s,v)-K(s,v))D_\alpha g_0(v)dv\right)\varphi_k(s)ds\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}C_1\beta(n)\cdot\max_{0\le s\le1}|D_\alpha g_0(s)|+$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{\mu_k}}{1+\alpha\mu_k}\right)^2\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)dv\right)\varphi_k(s)ds\right)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(t)}{\mu_k}\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}C_2\beta(n)\cdot\max_{0\le s\le1}\left|M\left(s,D_\alpha g_0(s)\right)\right|\le\frac{K_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)D_\alpha g_0(v)dv\right)^2ds\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{\beta(n)}{\alpha}C_1\|D_\alpha g_0(s)\|_{C(0,1)}+\frac{K_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)dv\right)^2ds\right)^{1/2}+$$

$$+\frac{\beta(n)}{\alpha}C_2\left\|M\left(s,D_\alpha g_0(s)\right)\right\|_{C(0,1)}. \qquad (17)$$

Рассмотрим первое слагаемое справа в неравенстве (17):

$$\left(\int_0^1 \left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)D_\alpha g_0(v)dv\right)^2 \le \int_0^1 \left(K_n(s,v)-K(s,v)\right)^2 dv \int_0^1 \left(D_\alpha g_0(v)\right)^2 dv \le \tag{18}$$

$$\le \left(C_1\beta(n)\right)^2 \left\|D_\alpha h_0(v)\right\|^2_{C(0,1)}.$$

Здесь мы использовали неравенство Коши - Буняковского $[4]$ и неравенство (2).

Аналогично

$$\left(\int_0^1 \left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)dv\right)^2 \le \int_0^1 \left(K_{1n}(s,v)-K_1(s,v)\right)^2 dv \int_0^1 M^2\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)dv \le$$

$$\le \left(C_2\beta(n)\right)^2 \left(\max_{0\le v\le 1}\left|M(v,D_\alpha g_0(v))\right|\right)^2. \tag{19}$$

Учитывая неравенства (18), (19), из неравенства (17) получаем

$$\left|g_1(t)-g_0(t)\right| \le \frac{K_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\left(C_1\beta(n)\right)\left\|D_\alpha g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)C_1}{\alpha}\left\|D_\alpha g_0(s)\right\| +$$

$$+\frac{K_0}{2\alpha\sqrt{\alpha}}C_2\beta(n)\left\|M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)\right\|_{C(0,1)} + \frac{C_2\beta(n)}{\alpha}\left\|M\left(s,D_\alpha g_0(s)\right)\right\|_{C(0,1)}. \tag{20}$$

Оценим $M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)$:

$$\left|M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)\right| \le \left|M\left(v,D_\alpha g_0(v)\right)-M(v,o)\right| + \left|M(v,o)\right| \le$$

$$\le N\left|D_\alpha g_0(v)\right| + \left\|M(v,o)\right\|_{C(0,1)} \le N\left\|D_\alpha g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + \left\|M(v,o)\right\|_{C(0,1)}. \tag{21}$$

Рассмотрим $D_\alpha g_0(v)$:

$$\left|D_\alpha g_0(v)\right| \le \left|D_\alpha g_0(v)-D_\alpha(0)\right| + \left|D_\alpha(0)\right| \le \frac{1}{1-q}\left\|g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + \left\|D_\alpha(0)\right\|. \tag{22}$$

При $\bar{z}_0(t)\equiv 0$ получаем $\left|D_\alpha(0)\right| \le \dfrac{K_0M_0}{1-q}.$ (23)

Из неравенств (23) и (22) следует неравенство

$$\left\|D_\alpha g_0(v)\right\|_{C(0,1)} \le \frac{1}{1-q}\left(\left\|g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + K_0M_0\right). \tag{24}$$

Тогда, используя неравенство (21), из неравенства (20) получаем

$$\left|g_1(t)-g_0(t)\right| \le \frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0C_1}{2}+C_1\right)\left\|D_\alpha g_0(s)\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0C_2}{2}+C_2\right)\left(N\left\|D_\alpha g_0(v)\right\|_{C(0,1)}+M_0\right)=$$

$$=\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0C_1}{2}+C_1+N\left(\frac{K_0C_2}{2}+C_2\right)\right)\left\|D_\alpha g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)C_2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)M_0 \le$$

$$\le \frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)\cdot\left(C_1+NC_2\right)\frac{1}{1-q}\left\|g_0(v)\right\|_{C(0,1)} + \frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)\left(C_1+C_2N\right)\frac{1}{1-q}K_0M_0 +$$

$$+\frac{\beta(n)C_2}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)M_0 \quad \frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)=\left(C_1+C_2N\right)\frac{1}{1-q}\left\|g_0(v)\right\|_{C(0,1)} +$$

$$+\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\left(\frac{K_0}{2}+1\right)M_0\frac{1}{1-q}\left(\left(C_1+C_2N\right)+C_2-C_2q\right). \tag{25$_1$}$$

Методом полной математической индукции можно доказать справедливость неравенства для любого натурального $j\ge 2$:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\left|g_j(t)-g_{j-1}(t)\right| \le \left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^{j-1} K_2^{j-1}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}. \qquad (25_j)$$

Из оценки (25_1), (25_j) следует, что функциональный ряд (15) мажорируется следующим числовым рядом

$$\left\|g_0(t)\right\|_{C(0,1)}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\beta(n)}{\alpha\sqrt{\alpha}}K_2\right)^{j-1}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}. \qquad (26)$$

Допустим, что параметр α выбран так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(n)}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}}=0. \qquad (27)$$

Тогда существует число $\beta_0(n)$ такое, что $q_1\equiv\dfrac{\beta(n)K_2}{\left(\alpha\left(\beta(n)\right)\right)^{3/2}}<1, \quad \beta(n)<\beta_0(n).$ (28)

При выполнении этого условия числовой ряд (26) сходится и его сумма равна

$$\left\|g_0(t)\right\|_{C(0,1)}+\frac{1}{1-q}\left\|g_1-g_0\right\|_{C(0,1)}. \qquad (29)$$

Отсюда в силу теоремы Вейерштрасса $[5]$ следует абсолютная и равномерная сходимость функционального ряда (15).

Через $g_\alpha^{\beta(n)}$ обозначим сумму ряда (15), причем по построению $\lim\limits_{j\to\infty}g_j(t)=g_\alpha^{\beta(n)}$.

(30)

Переходя к пределу при $j\to\infty$ в (13_j), используя равномерную сходимость всех рядов, непрерывность всех функций, получаем, что функция $g_\alpha^{\beta(n)}(t)$ удовлетворяет уравнению (11) при любом $u(t)\in C(0,1)$. В силу формулы (9), функции $g_\alpha^{\beta(n)}(t)$ соответствует функция $z_\alpha^n(t)=D_\alpha g_\alpha^{\beta(n)}(t)$. (31)

Легко видеть, что функция $z_\alpha^n(t)$ удовлетворяет уравнению (7)

Доказана

Теорема 1. Пусть: 1) ядро $K(t,s)$ является симметричным, положительно определенным и непрерывным в квадрате $0\le t,s\le 1$; 2) непрерывная функция $K_1(t,s)$ представима в виде $K_1(t,s)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\mu_k^{3/2}}$, где $\{\varphi_k(t)\}$ - ортонормированные собственные функции ядра $K(t,s)$, соответствующие характеристическим значениям $\{\mu_k\}$; 3) функция $M(v,z)$ удовлетворяет условию Липшица по z в области $0\le v\le 1$, $-\infty<z<\infty$, т.е. $\left|M(v,z_2)-M(v,z_1)\right|\le N\left|z_2-z_1\right|$; 4) постоянная $q\equiv K_0N<1$, где $K_0=\max\limits_{0\le t,s\le 1}\left|K(t,s)\right|$, 5) $u(t)$ - заданная непрерывная функция; 6) функции $K_n(t,s)$ и $K_{1n}(t,s)$ удовлетворяют неравенству (2); 7) параметр α удовлетворяет условиям (27), (28).

Тогда уравнение (7) при любом $u(t)\in C(0,1)$ имеет единственное решение $z_\alpha^n(t)$, представимое в виде (31).

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$\int_0^1 K(x,s)z(s)ds=f(x), \qquad (32)$$

где

$$K(x,s)=\begin{cases}x(1-s), & 0\le x\le s,\\ (1-x)s, & s\le x\le 1.\end{cases} \qquad (33)$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Известно, что ядро (33) имеет ортонормированные собственные функции $\left\{\sqrt{2}\sin\pi nx\right\}$, соответствующие характеристическим значениям $\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

Допустим, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$. Тогда уравнение (32) имеет точное решение $z_0(x) = -f''(x)$.

Ядро интегрального уравнения (32) представимо в виде

$$K(x,s) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kx\cdot\sin\pi ks}{k^2}.$$

Наряду с уравнением (32) рассмотрим уравнение второго рода с вырожденным ядром

$$\alpha z_n^{\alpha}(x) + \int_0^1 K_n(x,s)\cdot z_n^{\alpha}(s)ds = f(x), \tag{34}$$

где $K_n(x,s) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\pi kx\cdot\sin\pi ks}{k^2}$, (35)

причем справедлива оценка $\left\|K(x,s) - K_n(x,s)\right\|_{C([0,1],[0,1])} \le 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = \frac{2}{n}.$

Пусть $z_n^{\alpha}(x)$ - решение уравнения (34). Тогда, если $\alpha(n) = \frac{1}{n^{3+\sigma}}$, где $0 < \sigma < 1$, то решение $z_n^{\alpha}(x)$ при $n \to \infty$ стремится к точному решению уравнения (32).
Скорость сходимости удовлетворяет неравенству

$$\left\|z_n^{\alpha}(x) - z_0(x)\right\|_{C[0,1]} \le C_1\cdot\frac{1}{n^{\frac{3+\sigma}{4}}}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Имеем $\quad z_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}f(x) - \frac{2}{\alpha}\int_0^1\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\pi kx\cdot\sin\pi ks}{k^2}z_n^{\alpha}(s)ds.$

Обозначая $\quad \gamma_k = -\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{\sin\pi ks}{k^2}z_n^{\alpha}(s)ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ (36)

получаем $\quad z_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}f(x) + \sum_{j=1}^{n}\gamma_j\sin\pi jx.$ (37)

Подставляя в (36) и учитывая ортогональность собственных функций, находим

$$\gamma_k = -2\int_0^1\frac{\sin\pi ks}{1+\alpha k^2}f(s)ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда $z_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{\alpha}f(x) - 2\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1\frac{\sin\pi js}{1+\alpha j^2}f(s)ds\right)\sin\pi jx.$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию $f(0) = f(1) = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f''(x) + n^{3,5}f(x) - 2\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1\frac{\sin\pi js}{1+n^{-3,5}j^2}f(s)ds\right)\sin\pi jx\right\|_{C[0,1]} = 0.$$

Список литературы

1. Саадабаев А.С.Построение конечномерного регуляризирующего оператора для решения операторного уравнения первого рода [Текст] / А. С. Саадабаев, А. Р. Абдылдаева // Проблемы современной науки и образования. – М., 2016. – № 14(56). – С.7-10.

2. Саадабаев А.С.Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с приближенно заданной правой частью [Текст] / А. С. Саадабаев, А. Р. Абдылдаева // Вестн. Кырг. гос. ун-т стр-во и архитектуры им. Н. Исанова. – 2017. – №4(58). –С.148-152.

3. Абдылдаева, А.Р. Конечномерная аппроксимация нелинейного операторного уравнения с вполне непрерывной линейной частью [Текст] / А. Р. Абдылдаева // Изв. Кырг. гос. техн. ун-та им. И.Раззакова. – 2017. – № 2 (42). – С.56-61.

4. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 285 с.

5. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики [Текст] / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. – 92 с.