УДК 517.91:51-7 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.3.454-458

КЕНЕНБАЕВ Э., АКЕРОВА ДЖ.А., АСКАР КЫЗЫ Л.
[1]Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика

KENENBAEV E., AKEROVA DZH.A., ASKAR KYZY L.
[1]Mathematics Institute of the NAS KR, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2] J. Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyz Republic
Elaman0527@gmail.com akerovadzhyldys@mail.ru lira130780@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПОСРЕДСТВОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

APPLICATION OF FUNCTIONAL RELATIONS TO MODELING BY MEANS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Макалада дифференциалдык теңдемелерди колдонуп моделдөө жөнүндө сөз болот. Алардын чечимдери чечимдин маанилерин теңдемеге ар кандай чекиттерде байланыштырган өз ара функционалдык байланыштын негизинде курулган (чексиз же чектүү маанилер жыйындысы) . Мисал катары төмөнкүлөр каралган: жуп, так жана мезгилдүү чечимдер, Валье-Пуссиндин өз ара байланыштары, Лагранж интерполяция полиному жана Гермит интерполяция полиному, кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн сплайн функциялары, Асгейрссондун теңдештиги жана анын гиперболалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн жалпылоолору, эллиптикалык типтеги теңдемелер үчүн "орточо мааниси". Демек, эгерде теңдеме кандайдыр бир мааниде каралып жаткан түрлөрдүн бирине жакын болсо, анда мамиле болжол менен канааттандырылышы керек. Мындай божомолдор айрым мисалдарда келтирилген. Мындай өз ара байланыштарды интерполяция жана экстраполяциянын айрым көйгөйлөрүн изилдөө үчүн колдонуу көрсөтүлгөн.

Өзөк сөздөр: *функционалдык өз ара байланыш, моделдөө, дифференциалдык теңдеме, интерполяция, экстраполяция.*

В статье рассматривается моделирование с помощью дифференциальных уравнений. Их решения строятся на основе функциональных соотношений, связывающих между собой значения решения уравнения в различных точках (бесконечноеиликонечноемножество значений).В качестве примеров приведены четные, нечетные и периодические решения, соотношение Валле-Пуссена, интерполяционный многочлен Лагранжа интерполяционный многочлен Эрмита, сплайн-функции для обыкновенных дифференциальных уравнений, тождество Асгейрссона и его обобщения для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, «среднее значение» для уравненийэллиптического типа. Соответственно, если уравнение близко в некотором смысле к одному из рассмотренных типов, то соотношение должно выполняться приближенно. Найдены такие оценки для некоторых примеров. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых задач интерполяции и экстраполяции.

Ключевые слова: *функциональное соотношение, моделирование, дифференциальное уравнение, интерполяция, экстраполяция.*

Modeling by means of differential equations is considered in the paper. Their solutions are constructed on the base of functional relations connecting values of a solution of the *equation in different points (infinite or finite set of values). For examples, even, odd an periodical solutions, Vallée-Poussin's assertion, Lagrange interpolation polynomial, Hermite interpolation polynomial, spline-functions for ordinary differential equations, Asgeirsson's identity and its generalizations for partial differential equations of hyperbolic type, "mean value" for partial differential equations of elliptic type are considered. Also, if an equation is close to one of considered types then an assertion is to be fulfilled approximately. Some estimations are found for such examples. An application of such relations to investigate some problems of interpolation and extrapolation is demonstrated.*

Key words:*functional relation, modeling, differential equation, interpolation, extrapolation.*

Введение. Для моделирования с помощью дифференциальных уравнений в статье предлагается использовать тот факт, что решения некоторых таких уравнений имеют функциональные соотношения, связывающие между собой их значения в различных точках (бесконечное или конечное множество значений). По заданным значениям решений в отдельных точках можно найти их значения в других точках.

Ранее были найдены такие отдельные функциональные соотношения, но не был проведен их систематический обзор, что необходимо для создания общей теории. Некоторые элементы такой теории были предложены в [1], [2], [3], [4]. Также функциональные соотношения не использовались для приближенных вычислений, что предлагается в данной статье.

В качестве примеров в первом разделе статьи приведены решения, являющиеся четными, нечетными и периодическими функциями, соотношение Валле-Пуссена для многоточечной задачи, интерполяционный многочлен Лагранжа и интерполяционный многочлен Эрмита, сплайн-функции для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во втором разделе статьи - тождество Асгейрссона и его обобщения для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, «среднее значение» для уравнений эллиптического типа.

Соответственно, если уравнение близко в некотором смысле к одному из рассмотренных типов, то вместо уравнения возникает дифференциальное неравенство. Соответствующее соотношение должно выполняться приближенно. Найдены такие оценки для некоторых примеров. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых задач интерполяции и экстраполяции.

Обыкновенные дифференциальные уравнения и неравенства. Ниже ε - малый положительный параметр, ζ - малая по модулю функция, $|\zeta(x)|<\varepsilon$. Начнем с простого примера, чтобы продемонстрировать метод.

1.1. Уравнение первого порядка с известной правой частью и нулевым начальным условием

$y'(x)=a,\ y(0)=0,\ a\neq 0.$

Значения линейной функции от одной скалярной переменной в двух ненулевых точках должны быть согласованы (будем записывать все соотношения с нулевой правой частью):

$$y(x[1])x[2]-y(x[2])x[1]=0. \tag{1}$$

Если правая часть известна неточно, то получаем дифференциальное неравенство

$|y'(x)-a|<\varepsilon,\ y(0)=0,$ или $y'(x)=a+\zeta(x),\ y(0)=0.$

Отсюда $y(x)=ax+\int_0^x \zeta(s)ds$, $|y(x[1])x[2]-y(x[2])x[1]|=$

$$=\left|\left(ax[1]+\int_0^{x[1]}\zeta(s)ds\right)x[2]-\left(ax[2]+\int_0^{x[2]}\zeta(s)ds\right)x[1]\right|=$$

$$=\left|\int_0^{x[1]}\zeta(s)ds\,x[2]-\int_0^{x[1]}\zeta(s)ds\,x[1]+\int_0^{x[1]}\zeta(s)ds\,x[1]-\int_0^{x[2]}\zeta(s)ds\,x[1]\right|\leq$$

$$\le \varepsilon|x[1]|\cdot|x[2]-x[1]|+\varepsilon|x[1]|\cdot|x[2]-x[1]|\le 2\varepsilon|x[1]|\cdot|x[2]-x[1]|.$$

Таким образом, из выражения вида (1) можно приближенно найти $y[2]$, если известны другие члены, и оценить погрешность.

1.2. Уравнение первого порядка с известной правой частью и любым начальным условием

$$y'(x)=a,\ y(0)=y_0,\ a\neq 0.$$

Значения решения от одной скалярной переменной в трех точках должны быть согласованы:

$$(y(x[1])-y(x[3]))(x[1]-x[2])-(y(x[1])-y(x[2]))(x[1]-x[3])=0. \qquad (2)$$

Из уравнения $y'(x)=a+\zeta(x)$ получаем для выражения в левой части (2):

$$|(y(x[1])-y(x[3]))(x[1]-x[2])-(y(x[2])-y(x[3]))(x[2]-x[3])|=$$

$$\left|\left(a(x[3]-x[1])+\int_{x[1]}^{x[3]}\zeta(s)ds\right)(x[2]-x[1])-\left(a(x[2]-x[1])+\int_{x[1]}^{x[2]}\zeta(s)ds\right)(x[3]-x[1])\right|=$$

$$=\left|\int_{x[1]}^{x[3]}\zeta(s)ds\,(x[2]-x[1])-\int_{x[1]}^{x[2]}\zeta(s)ds\,(x[3]-x[1])\right|\le 2\varepsilon|x[3]-x[2]|\cdot|x[2]-x[1]|.$$

Для примера положим $x[k]=k,\ k=1,2,3$. Тогда получаем:

$$y[1]-y[3]-2(y[1])-y[2])=2\varepsilon\theta,\ |\theta|\le 1,$$

погрешность в определении $y[2]$ по заданным $y[1],y[3]$ (интерполяция) вдвое меньше, чем погрешность в определении $y[3]$ по заданным $y[1],y[2]$ (экстраполяция).

1.3. Дифференциальное уравнение k-го порядка $y^{(k)}(x)=0$. Ему удовлетворяет многочлен степени $(k-1)$. Значения такой функции-многочлена от одной скалярной переменной в $(k+1)$ точках должны быть согласованы.

Пусть имеются числа $x[1],\ x[2],\ldots,x[k+1]$ и числа $y[1],\ y[2],\ldots,y[k+1]$.

Построим по значениям $x[1],\ x[2],\ldots,x[k]$ и $y[1],\ y[2],\ldots,y[k]$ интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$ $(k-1)$-порядка, должно быть $L(x[k+1])=y[k+1]$.

Если точки $x[1],\ x[2],\ldots,x[k]$ образуют арифметическую прогрессию, то такое согласование записывается в явном виде:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{k+1} C_{k+1}^{j-1}(-1)^j y(x[j])=0. \qquad (3)$$

Например, для $k=3$ выражение (3) принимает вид:

$$f(x[1])-3f(x[2])+3f(x[3])-f(x[4])=0.$$

Если еще заданы значения производных в некоторых точках, то применяем интерполяционный многочлен Эрмита: для заданных чисел $x[j],y[j,k],j=1..m,k=0..p[j]-1$, существует единственное решение уравнения $y^{(n)}(x)=0$ – многочлен степени $n=\sum_{j=1}^{m}p[j]+1$, удовлетворяющий условиям на значения, включая производные

$$P^{(k)}[n](x[j])=y[j,k],j=1..m,k=0..n[j]-1.$$

1.4. Для четной функции имеем уравнение $y'(x)=f(x),\ y(0)=0$, где $f(x)$ - нечетная функция, и соответственно неравенство $|y'(x)-f(x)|<\varepsilon,\ y(0)=0.$

Для двух симметрично относительно нуля расположенных точек $x[2]=-x[1]<0$ должно быть

$$|x[2]-x[1]|=\left|\int_0^{x[1]}(f(s)+\zeta(s))ds-\int_0^{-x[1]}(f(s)+\zeta(s))ds\right|\le 2\varepsilon x[1]. \qquad (4)$$

1.5. Для нечетной функции получается оценка, аналогичная (4).

1.6. Первый результат о связи между значениями решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения в различных точках получил C.J.Dela Vallée Poussin для уравнения

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\,y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\,y(x)=0,\ \ a\le x\le b, p_k(x)\in C[a,b],$$

с условиями $y(x[i])=c[i],\ i=1,\ldots,n$ имеет единственное решение при ограничении на нормы функций-коэффициентов

$$\| p_1\|_{[a,b]}(b-a)+\| p_2\|_{[a,b]}(b-a)^2/2!+\ldots+\| p_n\|_{[a,b]}(b-a)^n/n! < 1.$$

1.7. Решения уравнения $y'(x)=p(x)y(x)$, где $p(x)$ - ω-периодическая функция скалярной переменной, причем интеграл по отрезку длины периода от этой функции равен нулю:

$$“x[1]-x[2]=k\omega” \Rightarrow “y(x[1])=y(x[2])”,$$ где k - целое число.

Дифференциальные уравнения в частных производных. Во многих работах рассматривалась классификация дифференциальных уравнений в частных производных.Для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными есть стандартная классификация - гиперболические, параболические, эллиптические в работе А.Н.Тихонова, А.А.Самарского.

Примечание: мы пока не будем рассматривать уравнения, имеющие различный тип в разных областях.

В ряде работах [5], [6], рассмотрена классификация уравнений более высокого порядка или с большим числом независимых переменных. В этих работах уравнения классифицируются по их записи, в особенности по записи старших производных. Вместе с тем, в [3], [4] построены примеры, показывающие, что такая классификация недостаточна. Поэтому рассмотрим примеры классификации по функциональным соотношениям.

Будем использовать обозначения:

$$x := (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m, \Delta_x := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

2.1. Уравнение Лапласа $\Delta_x u(x)=0$.Как известно, при $m=2$ решения - гармонические функции двух переменных удовлетворяют соотношению: среднее значение функции на любом круге (бесконечное количество точек) равно значению функции в центре круга.

Вместе с тем, в любом конечном наборе точек гармоническая функция может принимать любые значения. Пусть $m=2,$ имеются точки $x[1], x[2],\ldots,x[k]$ и числа $u[1], u[2],\ldots,u[k]$.

Построим по этим значениям интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$, как функцию комплексного переменного: $L(x[j])=u[j], j=1,\ldots,k,$ и определим гармоническую функцию $U(x)=Re\ L(x)$. Тогда $U(x[j])=Re\ L(x[j])= Re u[j]= u[j],\ j=1,\ldots,k.$ Таким образом, любые значения гармонической функции в конечном количестве точек между собой не связаны.

2.2. Решение гиперболического уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(x_1, x_2) = 0$ –функция двух скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет тождеству Асгейрссона для четырех точек: если w_1, w_2, v_1, v_2- любые числа, то

$$u(w_1, v_1)+ u(w_2, v_2)-u(w_1, v_2)-u(w_2, v_1) =0. \tag{5}$$

2.3. Решение гиперболического уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(x_1, x_2)$ - удовлетворяет аналогичному тождеству Асгейрссона для четырех точек, которые образуют прямоугольник, получающийся поворотом на 45^0 прямоугольника в равенстве (5).

2.4. Решение гиперболического уравнения $\frac{\partial^m}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_m} u(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ –функция m скалярных переменных - имеет решение в виде суммы функций от меньшего числа переменных каждая -

$$u(x)= g_1(x_2,\ldots, x_m)+ \ldots+ g_q(x_1,\ldots, x_{q-1}, x_{q+1},\ldots, x_m) + \ldots+ g_m(x_1,\ldots,x_{m-1}),$$

удовлетворяет обобщенному тождеству Асгейрссона для 2^m точек [2].

Например, для $m=3$: пусть v_1,v_2 ,v_3,v_4,v_5 , v_6 –любые числа, тогда имеет место тождество

$$y(v_1,v_2,v_3)-y(v_1,v_2, v_6)-y(v_1,v_5, v_3)+ y(v_1,v_5, v_6) -$$
$$-y(v_4,v_2, v_3)+y(v_4,v_2, v_6)+ y(v_4,v_5, v_3)-y(v_4,v_5, v_6)= 0.$$

2.5. Решение гиперболического уравнения для двух пространственных переменных $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}u(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}u(x_1,x_2,x_3) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}u(x_1,x_2,x_3)$ – в отличие от п. 2.3, не имеет функциональных соотношений для конечного количества точек.

Заключение. Из произведенного обзора следует, что более естественно классифицировать дифференциальные уравнения по их функциональным соотношениям. Тем более, известно, что уравнения одного типа, например, дифференциальные, могут быть преобразованы, например, в интегральные, с сохранением свойств решений. Это также соответствует предложенной в [7], [8], [9] концепции об эквивалентности уравнений, даже если они принадлежат к различным типам, если их решения взаимно однозначно преобразуются. Также, предлагается исследовать, по каким множествам начальных значений имеют решение и корректны задачи для дифференциальных уравнений, и как можно использовать соответствующие дифференциальные неравенства.

Список литературы

1. Панков П.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям [Текст] / П.С. Панков, Г.М. Матиева, Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
2. Панков П.С. Составление функционально-характеристических уравнений с аналитическими функциями [Текст] / П.С. Панков, Х.С. Сабирова // Вестник Казахского национального технического университета им. Сатпаева. - 2006. - № 5. – С. 135-141.
3. Сабирова Х.С. Влияние младших членов дифференциальных уравнений с частными производными на их характеристичность [Текст] / Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. - Вып. 38. – Бишкек: Илим, 2008. – С. 107-111.
4. Сабирова Х.С. Различие в характеристических свойствах волновых уравнений с различным количеством переменных [Текст] / Х.С. Сабирова // Вестник Международного университета Кыргызстана. – 2011. - № 1(20). – С. 58-61.
5. Джураев Т.Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, Я. Попелек // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
6. Джураев Т.Д. Теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка [Текст] / Т.Д. Джураев, А.К. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
7. Кененбаева Г. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений [Текст]/ Г. Кененбаева. – Saarbrücken, Deutschland: LAP LambertAcademicPublishing, 2015. – 72 с.
8. Кененбаева Г.М. Элементы категории корректных уравнений [Текст] / Г.М. Кененбаева, Л. Аскар кызы // Вестник Института математики НАН КР. - 2019. - № 1. - С. 69-74.
9. Кененбаева Г.М. Элементы категории уравнений [Текст] / Г.М. Кененбаева, Л. Аскар кызы, Ж.К. Бейшебаева, Э. Маматжан уулу // Вестник Института математики НАН КР. - 2018. - № 1. - С. 88-95.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com