УДК 519 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.3.467-475

ШАРШЕМБИЕВА Ф.К., СУЛТАНКУЛ КЫЗЫ А., АСАНКУЛОВА М.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызская Республика

SHARSHEMBIEVA F.K., SULTANKUL KYZY A., ASANKULOVA M.
[1]Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2]Mathematics Institute of the NAS KR, Bishkek, Kyrgyz Republic
peri7979@mail.ru aikas06@mail.ru mathnas@mail.ru

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХЭТАПТНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

SOLUTION OF A NONLINEAR TWO-STAGE PROBLEM OF LOCATION OF PRODUCTION

Продукциянын өндүрүлүшүнө жана аны кайра жүктөө пункттары аркылуу ташуу көлөмдөрүнө чектөө коюлган жайгаштыруу маселенин математикалык модели түзүлгөн. Мында өндүрүштүк функция сызыктуу эмес, ал эми транспорттук функциялар сызыктуу. Маселени чечүү ыкмасы сунушталган. Кайра жүктөө пункту бир нече кайра жүктөө пункттарына бөлүнүп, маселе адаттуу транспорттук маселеге келтирилген. Мисал түзүлүп, чыгарылган.

Өзөк сөздөр: *сызыктуу эмес эки этаптуу маселе, ташуу планы, өндүрүү, жайгаштыруу маселеси, чектелген шарттар, модель, транспорттук маселе.*

Сформулирована математическая модель двухэтапной задачи размещения производства с ограничениями на объем производства и транспортировки продукции через перевалочные пункты. Функция, определяющая зависимость стоимости производимой продукции от объема производства, является нелинейной, а функции, определяющие зависимость стоимости транспортных расходов от объема перевозимых продукций через перевалочные пункты, линейные. Предложен метод решения задачи. Задача приводится к обычной транспортной задаче расщеплением перевалочного пункта на множество перевалочных пунктов. Построен численный пример.

Ключевые слова: *нелинейная двухэтаптная задача, план перевозки, производство, задача размещения, ограниченные условия, модель, транспортная задача.*

A mathematical model of problem with limiting the production of products and the volume of transportation through the transfer points is developed. The production function is nonlinear, and the transport function is linear. The solving method of this problem is suggested. Transfer points are divided into several transfer points. The problem is reduced to the usual transport problem. The numerical example is compiled.

Key words: *nonlinear two-stage problem, transportation plan, production, location problem, bounded conditions, model, transport problem.*

Рассмотрим способ решения задачи приведенного в работе [1] в случае, когда функции $\varphi_i\left(x_i\right)$, $i=1,2,...,m$ выпуклые, непрерывные, возрастающие по, $x_i\in\left[0,a_i\right]$, а $\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)=c_{ij}x_{ij}$, $x_{ij}\geq 0$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$, $\psi_{jk}\left(y_{jk}\right)=c_{jk}y_{jk}$, $y_{jk}\in\left[0,q_{jk}\right]$, $j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,p$ – линейные. Тогда рассматриваемая задача примет следующий вид, найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(x_i\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}c_{jk}y_{jk}, \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=x_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{k=1}^{p}y_{jk}, \quad j=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=b_k, \quad k=1,2,\dots,p, \tag{4}$$

$$0\le y_{jk}\le q_{jk}, \quad j=1,2,\dots,n, \quad k=1,2,\dots,p, \tag{5}$$

$$0\le x_i\le a_i, \quad i=1,2,\dots,m, \tag{6}$$

где $x=\left|x_{ij}\right|_{m,n}$, $\quad y=\left|y_{jk}\right|_{n,p}$.

Предполагается, что выполняется условие разрешимости задачи, т.е $\sum_{k=1}^{p}b_k\le\sum_{i=1}^{m}a_i$,

$$b_k\le\sum_{j=1}^{n}q_{jk}, \quad k=1,2,\dots,p. \tag{7}$$

Метод решения. Рассмотрим (1)-(6) как двух этапную задачу. Преобразуем ее аналогичной в [1]. Каждый перевалочный пункт B_j, $j=1,2,\dots,n$, рассмотрим как множество перевалочных пунктов B_{jr}, $j=1,2,\dots,n$, $r=1,2,\dots,p$. В этом случае, каждому B_{jr} соответствует некоторый ограниченный сверху объем продукции y_{jr}, $0\le y_{jr}\le q_{jr}$ подлежащей к приему и отправки потребителям, где

$$y_{jr}=\sum_{k=1}^{p}y_{jrk}, \quad q_{jr}=\begin{cases}q_{jk}, r=k,\\ 0, r\ne k, r,k=1,2,\dots,p,\end{cases} \tag{8}$$

y_{jrk} – объем продукции перевозимой из перевалочного пункта B_{jr} к потребителю D_k. Обозначим через C_{jrk} – транспортные расходы на перевозку единицы объема продукции из B_{jr} в D_k, где

$$c_{jrk}=\begin{cases}c_{jk}, r=k,\\ M, r\ne k, r, j=1,2,\dots,n, k=1,2,\dots,p.\end{cases} \tag{9}$$

Кроме этого обозначим через x_{ijk} – объем продукции перевозимый из A_i в B_{jr} а транспортные затраты на перевозку единицы объема продукции из A_i в B_{jr} обозначим через C_{ijr}, где

$$C_{ijr}=C_{ij}, \quad i=1,2,\dots,m, \quad r=1,2,\dots,p. \tag{*}$$

Далее, обозначим через Δ – множество пар индексов $\{jr\}$, $r=1,2,\dots,p$, $j=1,2,\dots,n$, задачу (1)-(6) запишем в виде

найти минимум

$$L(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{jr\in\Delta}c_{ijr}x_{ijr}+\sum_{jr\in\Delta}\sum_{k=1}^{p}c_{jrk}y_{jrk}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(x_i\right), \tag{10}$$

при условиях

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{ijr} = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijr} = \sum_{k=1}^{p} y_{jrk} \le q_{jr}, \quad jr \in \Delta, \tag{12}$$

$$\sum_{jr\in\Delta} y_{jrk} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{13}$$

$$0 \le x_i \le a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{14}$$

$$x_{ijr} \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m, \quad jr \in \Delta, \tag{15}$$

$$y_{jrk} \ge 0, \ jr \in \Delta, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{16}$$

где $\overline{x} = \left|x_{ijr}\right|_{m,|\Delta|}, \ \overline{y} = \left|y_{jrk}\right|_{|\Delta|,\, p}$.

Предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{jr\in\Delta} q_{jr},$$

$$\sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{17}$$

Рассмотрим приближенный метод решения задачи (10)-(16).

Для этой цели выпуклые функции $\varphi_i(x_i), i = 1, 2, \ldots, m,$ заменяем кусочно-линейными функциями [2].

Разобьем интервалы $[0, a_i], i = 1, 2, \ldots, m,$ на s_i равных частей с шагом, $h_i = \dfrac{a_i}{s_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$. Построим кусочно-линейную аппроксимацию $\varphi_i(x_i)$ функций $\varphi_i(x_i), i = 1, 2, \ldots, m$. Переменные x_i заменяем через z_{iv} следующим образом

$$x_i = \sum_{v=1}^{s_i} z_{iv}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{18}$$

где

$$0 \le z_{iv} \le h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad v = 1, 2, \ldots, s_i, \tag{19}$$

преобразуем (19) в равенство, имеем

$$h_i = z_{iv} + \xi_{iv}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad v = 1, 2, \ldots, s_i, \tag{20}$$

где $z_{iv} \ge 0, \quad \xi_{iv} \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad v = 1, 2, \ldots, s_i$.

Функцию $\varphi_i(x_i)$ приближенно представим в виде

$$\varphi_i(x_i) \cong \sum_{v=1}^{s_i} \left(\varphi_i(vh_i) - \varphi_i((v-1)h_i) \frac{z_{iv}}{h_i} \right), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{21}$$

Далее из системы равенств (18) и (20) получим

$$x_i = \sum_{v=1}^{s_i} (h_i - \xi_{iv}), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{22}$$

Подставляя (22) в систему ограничений (11) получим

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{ijr} + \sum_{v=1}^{s_i} \xi_{iv} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{23}$$

где $0 \le \xi_{iv} \le h_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad v = 1, 2, \ldots, s_i$.

Суммируя по i равенства (18) и используя (11)-(13) имеем

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$\sum_{k=1}^{p} b_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{s_i} z_{iv} \geq 0. \qquad (24)$$

Далее, подставляя значения $\varphi_i\left(x_i\right)$ из (21) в целевую функцию, имеем

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{jr\in\Delta} c_{ijr}x_{ijr} + \sum_{jr\in\Delta}\sum_{k=1}^{p} c_{jrk}y_{jrk} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{s_i}\Delta\varphi_{iv}z_{iv},$$

где $\Delta\varphi_{iv} = \dfrac{\varphi_i\left(vh_i\right) - \varphi_i\left(\left(v-1\right)h_i\right)}{h_i}$, $i = 1, 2, ..., m$, $v = 1, 2, ..., s_i$.

Таким образом, задача (10)-(16) сводится к приближенной задаче.

Найти минимум

$$L(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{jr\in\Delta} c_{ijr}x_{ijr} + \sum_{jr\in\Delta}\sum_{k=1}^{p} c_{jrk}y_{jrk} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{s_i}\Delta\varphi_{iv}z_{iv}, \qquad (25)$$

при условиях

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{ijr} + \sum_{v=1}^{s_i}\xi_{iv} = a_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (26)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijr} = \sum_{k=1}^{p} y_{jrk} \leq q_{j\varepsilon}, \quad jr \in \Delta, \qquad (27)$$

$$\sum_{jr\in\Delta} y_{jrk} = b_k, \quad k = 1, 2, ..., p, \qquad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{p} b_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{s_i} z_{iv} \geq 0, \qquad (29)$$

$$h_i = z_{iv} + \xi_{iv}, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad v = 1, 2, ..., s_i, \qquad (30)$$

$$x_{ijr} \geq 0, \; i = 1, 2, ..., m, \quad jr \in \Delta, \qquad (31)$$

$$y_{jrk} \geq 0, \; jr \in \Delta, \quad k = 1, 2, ..., p, \qquad (32)$$

$$z_{iv} \geq 0, \quad \xi_{iv} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad v = 1, 2, ..., s_i. \qquad (33)$$

Если задачу (25)-(33) запишем в виде транспортной таблицы то она примет следующий вид (см. таблицу 1) где М – достаточно большое положительное число, то есть запрещающий тариф.

Таблица 1 - Транспортная таблица задачи

	q_{11}	…	q_{1q}	…	q_{n1}	…	q_{np}	b_1	…	b_p	h_1	…	h_1	…	h_m	…	h_m
a_1	c_{111}	…	c_{11p}	…	c_{1n1}	…	c_{1np}	M	…	M	0	…	0	…	M	…	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_m	c_{m11}	…	c_{m1p}	…	c_{mn1}	…	c_{mnp}	M	…	M	M	…	M	…	0	…	0
q_{11}	0	…	M	…	M	…	M	c_{111}	…	M	M	…	M	…	M	…	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{1p}	M	…	0	…	M	…	M	M	…	c_{1pp}	M	…	M	…	M	…	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{n1}	M	…	M	…	0	…	M	c_{n11}	…	M	M	…	M	…	M	…	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{np}	M	…	M	…	M	…	0	M	…	c_{npp}	M	…	M	…	M	…	M
$\sum_{k=1}^{p} b_k$		…		…		…		0	…		$\Delta\varphi_{11}$	…	$\Delta\varphi_{1s_i}$	…	$\Delta\varphi_{m1}$	…	$\Delta\varphi_{ms_i}$

Пример. Для иллюстрации способа решения задачи приведем пример с тремя предприятиями производства продукции $\left(m = 3\right)$, тремя перевалочными пунктами $\left(n = 3\right)$ и четырьмя потребителями однородной продукции $\left(k = 4\right)$. Объем продукции производимой в предприятиях ограничены, т.е. $0 \le x_1 \le 8$, $0 \le x_2 \le 10$, $0 \le x_3 \le 12$. Объ потребности продукции b_k, $k = 1, 2, 3, 4$ заданы вектором $b = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \{3, 4, 2, 5\}$.

Транспортные затраты имеют вид:

$$\left|c_{ij}\right|_{3,3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left|c_{jk}\right|_{3,4} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объем продукции получаемый и отправляемый каждым перевалочным пунктом к каждому потребителю ограничены:

$$0 \le y_{11} \le 2,\ 0 \le y_{21} \le 1,\ 0 \le y_{31} \le 2,$$
$$0 \le y_{12} \le 2,\ 0 \le y_{22} \le 3,\ 0 \le y_{32} \le 3,$$
$$0 \le y_{13} \le 2,\ 0 \le y_{23} \le 2,\ 0 \le y_{33} \le 3,$$
$$0 \le y_{14} \le 3,\ 0 \le y_{24} \le 2,\ 0 \le y_{34} \le 4.$$

Нелинейные функции определяющие производственные затраты имеют вид:

$$\varphi_1(x_1) = 0,2x_1^2, \quad 0 \le x_1 \le 8,\ \varphi_2(x_2) = 0,1x_2^2, \quad 0 \le x_2 \le 10,,\ \varphi_3(x_3) = 0,3x_3^2, \quad 0 \le x_3 \le 12.$$

При заданных параметрах математическая модель задачи записывается в следующем виде найти минимум

$$L(x, y) = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 6x_{31} + 2x_{32} + x_{33} +$$
$$+2y_{11} + y_{12} + 2y_{13} + y_{14} + 3y_{21} + 2y_{22} + 2y_{23} + 4y_{24} + 2y_{31} + 3y_{32} + 2y_{33} + y_{34} +$$
$$+0,2x_1^2 + 0,1x_2^2 + 0,3x_3^2, \tag{34}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{3} x_{1j} = x_1, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{2j} = x_2, \quad \sum_{j=1}^{3} x_{3j} = x_3, \tag{35}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{i1} = \sum_{k=1}^{4} y_{1k}, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = \sum_{k=1}^{4} y_{2k}, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = \sum_{k=1}^{4} y_{3k}, \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{3} y_{j1} = 3, \quad \sum_{j=1}^{3} y_{j2} = 4, \quad \sum_{j=1}^{3} y_{j3} = 2, \quad \sum_{j=1}^{3} y_{i4} = 5, \tag{37}$$

$$0 \le y_{11} \le 2,\ 0 \le y_{12} \le 2,\ 0 \le y_{13} \le 2,\ 0 \le y_{14} \le 3,$$
$$0 \le y_{21} \le 1,\ 0 \le y_{22} \le 3,\ 0 \le y_{23} \le 2,\ 0 \le y_{24} \le 2,$$
$$0 \le y_{31} \le 2,\ 0 \le y_{32} \le 3,\ 0 \le y_{33} \le 3,\ 0 \le y_{34} \le 4, \tag{38}$$

$$0 \le y_1 \le 8,\ 0 \le y_2 \le 10,\ 0 \le y_3 \le 12, \tag{39}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Далее, вводим переменные $x_{ijr} \ge 0$ и $y_{jzk} \ge 0$.

Обозначим через Δ – множество пар индексов $\{jr\}$, $j = 1, 2, 3$, $r = 1, 2, 3, 4$.

Преобразуем задачу (34) – (40) согласно равенствам (8), (9) и (*), получим следующую экстремальную задачу.

Найти минимум:

$$L(\overline{x}, \overline{y}) = 2(x_{111} + x_{112} + x_{113} + x_{114}) + 4(x_{121} + x_{122} + x_{123} + x_{124}) + 3(x_{131} + x_{132} + x_{133} + x_{134}) +$$
$$+x_{211} + x_{212} + x_{213} + x_{214} + 5(x_{221} + x_{222} + x_{223} + x_{224}) + 2(x_{231} + x_{232} + x_{233} + x_{234}) +$$
$$+6(x_{311} + x_{312} + x_{313} + x_{314}) + 2(x_{321} + x_{322} + x_{323} + x_{324}) + x_{331} + x_{332} + x_{333} + x_{334} +$$
$$+2y_{111} + 100(y_{112} + y_{113} + y_{114}) + 100y_{121} + y_{122} + 100(y_{123} + y_{124}) +$$
$$+100(y_{131} + y_{132}) + 2y_{133} + 100y_{134} + 100(y_{141} + y_{142} + y_{143}) + y_{144} +$$

$$+3y_{211}+100(y_{212}+y_{213}+y_{214})+100y_{221}+2y_{222}+100(y_{223}+y_{224})+$$
$$+100(y_{231}+y_{232})+2y_{233}+100y_{234}+100(y_{241}+y_{242}+y_{243})+4y_{244}+$$
$$+2y_{311}+100(y_{312}+y_{313}+y_{314})+100y_{321}+3y_{322}+100(y_{323}+y_{324})+$$
$$+100(y_{331}+y_{332})+2y_{333}+100y_{334}+100(y_{341}+y_{342}+y_{343})+y_{344}+$$
$$+0,2x_1^2+0,1x_2^2+0,3x_3^2, \tag{41}$$

при условиях

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{1jr}=x_1, \quad \sum_{jr\in\Delta} x_{2jr}=x_2, \quad \sum_{jr\in\Delta} x_{3jr}=x_3, \tag{42}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} x_{i11}=\sum_{k=1}^{4} y_{11k}\le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i12}=\sum_{k=1}^{4} y_{12k}\le 2,\\
&\sum_{i=1}^{3} x_{i13}=\sum_{k=1}^{4} y_{13k}\le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i14}=\sum_{k=1}^{4} y_{14k}\le 3,
\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} x_{i21}=\sum_{k=1}^{4} y_{21k}\le 1, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i22}=\sum_{k=1}^{4} y_{22k}\le 3,\\
&\sum_{i=1}^{3} x_{i23}=\sum_{k=1}^{4} y_{23k}\le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i24}=\sum_{k=1}^{4} y_{24k}\le 2,
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} x_{i31}=\sum_{k=1}^{4} y_{31k}\le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i32}=\sum_{k=1}^{4} y_{32k}\le 3,\\
&\sum_{i=1}^{3} x_{i33}=\sum_{k=1}^{4} y_{33k}\le 3, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i34}=\sum_{k=1}^{4} y_{34k}\le 4,
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{jr\in\Delta} y_{jr1}=3, \quad \sum_{jr\in\Delta} y_{jr2}=4,\\
&\sum_{jr\in\Delta} y_{jr3}=2, \quad \sum_{jr\in\Delta} y_{jr4}=5,
\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$0\le x_1\le 8, \quad 0\le x_2\le 10, \quad 0\le x_3\le 12, \tag{47}$$

$$y_{ijr}\ge 0, \quad i=1,2,3, \quad jr\in\Delta, \tag{48}$$

$$x_{jrk}\ge 0, \quad jr\in\Delta, \quad k=1,2,3,4. \tag{49}$$

Построим приближённую задачу. Для этого разобьем каждый интервал [0,8], [0,10] и [0,12], фигурирующие функции $\varphi_i(x_i)$, $i=1,2,3$, на s_i частей (2 части) длиной $h_i=\frac{a_i}{s_i}$, $i=1,2,3$, т.е. $h_1=4, h_2=5, h_3=6$.

Проделав для каждого i, $i=1,2,3$, необходимые вычисления, получим следующую приближенную задачу:

найти минимум.

$$L(\bar{x},\bar{y})=2(x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{114})+4(x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{124})+3(x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{134})+$$
$$+x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{214}+5(x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{224})+2(x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{234})+$$
$$+6(x_{311}+x_{312}+x_{313}+x_{314})+2(x_{321}+x_{322}+x_{323}+x_{324})+x_{331}+x_{332}+x_{333}+x_{334}+$$
$$+2y_{111}+100(y_{112}+y_{113}+y_{114})+100y_{121}+y_{122}+100(y_{123}+y_{124})+$$
$$+100(y_{131}+y_{132})+2y_{133}+100y_{134}+100(y_{141}+y_{142}+y_{143})+y_{144}+$$

$$+3y_{211}+100\left(y_{212}+y_{213}+y_{214}\right)+100y_{221}+2y_{222}+100\left(y_{223}+y_{224}\right)+$$
$$+100\left(y_{231}+y_{232}\right)+2y_{233}+100y_{234}+100\left(y_{241}+y_{242}+y_{243}\right)+4y_{244}+$$
$$+2y_{311}+100\left(y_{312}+y_{313}+y_{314}\right)+100y_{321}+3y_{322}+100\left(y_{323}+y_{324}\right)+$$
$$+100\left(y_{331}+y_{332}\right)+2y_{333}+100y_{334}+100\left(y_{341}+y_{342}+y_{343}\right)+y_{344}+$$
$$+0,8z_{11}+2,4z_{12}+0,5z_{21}+1,5z_{22}+1,8z_{31}+0,5z_{32}, \qquad (50)$$

при ограничениях

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{1jr}+\sum_{v=1}^{2}\xi_{1v}=8,$$
$$\sum_{jr\in\Delta} x_{2jr}+\sum_{v=1}^{2}\xi_{2v}=10,$$
$$\sum_{jr\in\Delta} x_{3jr}+\sum_{v=1}^{2}\xi_{3v}=12, \qquad (51)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{3} x_{i11}=\sum_{k=1}^{4} y_{11k}\le 2, & \sum_{i=1}^{3} x_{i12}=\sum_{k=1}^{4} y_{12k}\le 2, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i13}=\sum_{k=1}^{4} y_{13k}\le 2, & \sum_{i=1}^{3} x_{i14}=\sum_{k=1}^{4} y_{14k}\le 3, \end{array}\right\} \qquad (52)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{3} x_{i21}=\sum_{k=1}^{4} y_{21k}\le 1, & \sum_{i=1}^{3} x_{i22}=\sum_{k=1}^{4} y_{22k}\le 3, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i23}=\sum_{k=1}^{4} y_{23k}\le 2, & \sum_{i=1}^{3} x_{i24}=\sum_{k=1}^{4} y_{24k}\le 2, \end{array}\right\} \qquad (53)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{3} x_{i31}=\sum_{k=1}^{4} y_{31k}\le 2, & \sum_{i=1}^{3} x_{i32}=\sum_{k=1}^{4} y_{32k}\le 3, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i33}=\sum_{k=1}^{4} y_{33k}\le 3, & \sum_{i=1}^{3} x_{i34}=\sum_{k=1}^{4} y_{34k}\le 4, \end{array}\right\} \qquad (54)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{jr\in\Delta} y_{jr1}=3, & \sum_{jr\in\Delta} y_{jr2}=4, \\ \sum_{jr\in\Delta} y_{jr3}=2, & \sum_{jr\in\Delta} y_{jr4}=5, \end{array}\right\} \qquad (55)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{v=1}^{2} z_{iv}=14, \qquad (56)$$

$$z_{11}+\xi_{11}=4, \quad z_{12}+\xi_{12}=4,$$
$$z_{21}+\xi_{21}=5, \quad z_{22}+\xi_{22}=5, \qquad (57)$$
$$z_{31}+\xi_{31}=6, \quad z_{32}+\xi_{32}=6,$$

$$x_{ijr}\ge 0, \quad i=1,2,3, \quad jr\in\Delta, \qquad (58)$$
$$y_{jrk}\ge 0, \quad jr\in\Delta, \quad k=1,2,3,4. \qquad (59)$$
$$z_{iv}\ge 0, \quad \xi_{iv}\ge 0, \quad i=1,2,3, \quad v=1,2. \qquad (60)$$

Запишем задачу (50)-(60) в виде транспортной таблицы (см. таб. 2).

Таблица 2 - Транспортная таблица (50) (60) задачи

	2	2	2	3	1	3	2	2	2	3	3	4	3	4	2	5	4	4	5	5	6	6
8	2	2	2	2	4	4	4	4	3	3	3	3	M	M	M	M	0	0	M	M	M	M
10	1	1	1	1	5	5	5	5	2	2	2	2	M	M	M	M	M	M	0	0	M	M
12	6	6	6	6	2	2	2	2	1	1	1	1	M	M	M	M	M	M	M	M	0	0
2	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M	M	M
2	M	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	1	M	M	M	M	M	M	M	M
2	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M
3	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	1	M	M	M	M	M	M
1	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	3	M	M	M	M	M	M	M	M	M
3	M	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M	M
2	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M
2	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	M	M	M	M	4	M	M	M	M	M	M
2	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M	M	M
3	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	3	M	M	M	M	M	M	M	M
3	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	2	M	M	M	M	M	M	M
4	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0	M	M	M	1	M	M	M	M	M	M
14	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	0,8	2,4	0,5	1,5	1,8	0,5

Посредством прикладной программы MS Excel определили оптимальный план производства $x_i = 1, 2, 3,$ т.е. $x_1 = 0,\quad x_2 = 9,\quad x_3 = 5,$ план перевозок:

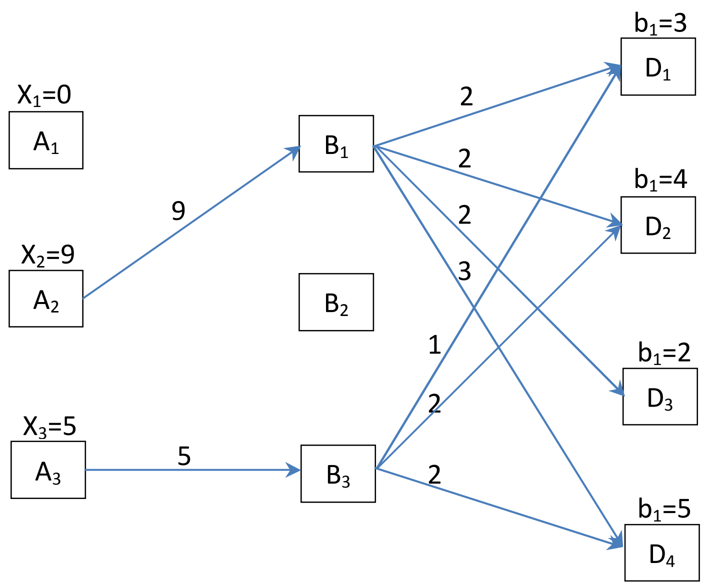
$$\bar{x} = \{x_{211} = 2,\ x_{212} = 2,\ x_{213} = 2,\ x_{214} = 3,\ x_{331} = 1,\ x_{332} = 2,\ x_{334} = 2\}.$$

Из этого решения можно определить объемы перевозимой и отправляемой продукции из первого перевалочного пункта равной $y_1 = 9$ единиц объема, второго перевалочного пункта $y_2 = 0$ и из третьего перевалочного пункта $y_3 = 5$ единиц объема.

Перевезенные продукции в перевалочные пункты распределяется между потребителями по плану: $\bar{y} = \{y_{111} = 2,\ y_{122} = 2,\ y_{133} = 2,\ y_{144} = 3,\ y_{311} = 1,\ y_{322} = 2,\ y_{344} = 2\}.$

Целевая функция при предложенном плане производства и перевозок имеет значение: $L(\bar{x}, \bar{y}) = 54{,}5$ у. е. Из них 17,5 у. е. составляет расходы на производство продукции в количество 14 единиц, а 37,5 у. е. составляет расходы на транспортировки продукции.

Схему производства и перевозки продукции можно представит в следующем виде



Выводы. Полученное решение нелинейной задачи размещения производства с ограничениями на объем производства и транспортировки продукции позволяет оптимизировать затраты на производство и транспортировки продукции.

Предложенный метод решения нелинейной двухэтапной задачи размещения сопровождается численным примером, который решен с помощью пакета прикладных программ.

Заключение. Сформулированная математическая модель двухэтапной задачи размещения производства с ограничениями на объем производства и транспортировки продукции через перевалочные пункты, где функция зависимости стоимости производимой продукции от объема производства нелинейная, а функции зависимостей стоимости транспортных расходов от объема перевозимых продукций через перевалочные пункты, линейные привела к транспортной задаче посредством расщепления перевалочного пункта на множество перевалочных пунктов. Построен численный пример, наглядно демонстрирующий работоспособность модели и предложенного метода.

Список литературы

1. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование [Текст] / Дж. Хедли, – М: Мир, 1967. – 506 с.