ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 519 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.3.476-481

ШАРШЕМБИЕВА Ф.К., СУЛТАНКУЛ КЫЗЫ А., ЖОЛБОРСОВА А.Ж.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]КГУ им. И. Арабаева, Бишкек, Кыргызская Республика

SHARSHEMBIEVA F.K., SULTANKUL KYZY A., ZHOLBOSOVA A.J.
[1]Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2]Arabaev Kyrgyz State University, Bishkek, Kyrgyz Republic
peri7979@mail.ru aikas06@mail.ru zholborsova76@mail.ru

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

SOLUTION OF A LINEAR TWO-STAGE PROBLEM OF LOCATION OF PRODUCTION

Продукцияны өндүрүү жана аны ортомчу пункттар аркылуу ташуу көлөмдөрү чектелген жайгаштыруу маселесинин математикалык модели түзүлгөн. Түзүлгөн жайгаштыруу маселесинин чыгаруу ыкмасы сунушталган. Ыкманын иштөө жөндөмдүүлүгүн текшерүү үчүн сандык мисал түзүлгөн.
Өзөк сөздөр: *сызыктуу эки этаптуу маселе, ташуу планы, өндүрүү, жайгаштыруу маселеси, чектелген шарттар, модель, транспорттук маселе.*

Сформулирована математическая модель задачи размещения производства с ограничениями на объем производства и транспортировки продукции через перевалочные пункты. Предложен метод решения сформулированной задачи размещения. Построен численный пример для проверки работоспособности метода решения.
Ключевые слова: *линейная двухэтаптная задача, план перевозки, производство, задача размещения, ограниченные условия, модель, транспортная задача.*

Formulated the mathematical model of the problem of locating production with restrictions on the volume of production and goods transportation through transshipment points. Supposed method for solving this problem is placement. Numerical example has been construct for verification this the method.
Key words: *linear two-stage problem, transportation plan, production, location problem, bounded conditions, model, transport problem.*

Постановка задачи. Пусть фирма имеет m предприятий A_i, $i=1,2,...,m,$ где производится однородная продукция объем которого ограничен сверху величиной a_i, $i=1,2,...,m$. Произведенная в этих предприятиях продукция доставляется n перевалочным пунктам B_j, $j=1,2,...,n,$ где она в дальнейшем распределяется по потребителям D_k, $k=1,2,...,p$. Объем потребности каждого потребителя D_k предполагается известным равным b_k, $k=1,2,...,p$. Объем продукции отправляемый каждым перевалочным пунктом к каждому потребителю предполагается неизвестным y_{jk}, но ограниченным сверху величиной q_{jk}, $j=1,2,...,n,$ $k=1,2,...,p$, т.е.

$$0 \le y_{jk} \le q_{jk}, \quad j = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2, ..., p.$$

Для каждого предприятия фирмы A_i, $i=1,2,...,m,$ известна функция $\varphi_i(x_i)$, $i=1,2,...,m,$ определяющая зависимость стоимости производимой продукции от объема производства x_i. Кроме того, известны функции $\varphi_{ij}(x_{ij})$, $i=1,2,...,m,$ $j=1,2,...,n,$

и $\psi_{jk}\left(x_{jk}\right)$, $j=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,p$ – определяющие зависимость стоимости транспортных расходов от объема продукции перевозимого соответственно от A_i в B_j и от B_j до D_k.

Требуется определить оптимальный план производства $x_i \ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$, план $x_{ij} \ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, перевозки продукции по перевалочным пунктам и план $y_{jk} \ge 0$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,p$, распределения продукции между потребителями, минимизирующие суммарные затраты, т.е.
найти минимум

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left(x_i\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\psi_{jk}\left(y_{jk}\right), \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}x_i \le a_i, \quad i=1,2,\ldots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=\sum_{k=1}^{p}y_{jk}, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{ij}=b_k, \quad k=1,2,\ldots,p, \tag{4}$$

$$0 \le y_{jk} \le q_{jk}, \quad j=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,\ldots,p, \tag{5}$$

$$x_i \ge 0,\ x_{ij} \ge 0, \quad i=1,2,\ldots,m, \quad j=1,2,\ldots,n, \tag{6}$$

где
$$x=\left|x_{ij}\right|_{m,n}, \quad y=\left|y_{jk}\right|_{n,p}.$$

Предполагается, что

$$\sum_{k=1}^{p}b_k \le \sum_{i=1}^{m}a_i, \quad b_k \le \sum_{j=1}^{n}q_{jk}, \quad k=1,2,\ldots,p. \tag{7}$$

Случай 1. Рассмотрим способ решения сформулированной задачи (1)-(6) в случае когда функции $\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$, $\varphi_i\left(x_i\right)$, $i=1,2,\ldots,m$, и $\psi_{jk}\left(y_{jk}\right)$, $j=1,2,\ldots,n$, $k=1,2,\ldots,p$ – линейные, т.е.

$$\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)=c_{ij}x_{ij}, \quad x_{ij}\ge 0, \quad \varphi_i\left(x_i\right)=c_i x_i, \quad x_i\in\left[0,a_i\right], \quad i=1,2,\ldots,m,$$
$$\psi_{jk}\left(y_{jk}\right)=c_{jk}y_{jk}, \quad y_{jk}\in\left[0,q_{jk}\right], \quad j=1,2,\ldots,n, \quad k=1,2,\ldots,p.$$

Приведем задачу к обычной транспортной модели [1].

Преобразуем задачу (1)-(6). Рассмотрим ее как двухэтапная задача размещения. Условимся, что каждый перевалочный пункт B_j, $j=1,2,\ldots,n$, рассмотрим как множество перевалочных пунктов B_{jr}, $j=1,2,\ldots,n$, $r=1,2,\ldots,p$. Тогда каждому перевалочному пункту B_{jr}, соответствует некоторый объем продукции $0\le y_{jr}\le q_{jk}$, $j=1,2,\ldots,n$, $r=1,2,\ldots,p$ подлежащей к приему и отправки, где

$$y_{jr}=\sum_{k=1}^{p}y_{jrk}, \quad q_{jr}=\begin{cases}q_{jk},\ r=k,\\ 0,\ r\ne k,\ r,k=1,2,\ldots,p,\end{cases} \tag{*}$$

y_{jrk} – объем продукции перевозимого из b_{jr} в D_k.

Введем обозначения. Обозначим через c_{jrk} – транспортные расходы на единицы объема продукции из b_{jr} в D_k, где

$$c_{jrk}=\begin{cases}c_{jk},\ r=k,\\ M,\ r\ne k,\ r,\ j=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,p,\end{cases} \tag{**}$$

M – достаточно большое положительное число.

Объем перевозимой продукции из A_i в B_{jr}, обозначим через x_{ijr}, а стоимость перевозки единицы продукции:

$$\overline{c}_{ijr} = c_{ij} + c_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\; j = 1, 2, \ldots, n,\; r = 1, 2, \ldots, p. \qquad (***)$$

Обозначим через Δ – множество пар индексов $\{jr\}$, $j = 1, 2, \ldots, n, r = 1, 2, \ldots, p.$

Тогда задача (1)-(6) может быть записана в виде
найти минимум

$$L(\overline{x}, \overline{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{jr \in \Delta} \overline{c}_{ijr} x_{ijr} + \sum_{jr \in \Delta} \sum_{k=1}^{p} c_{jrk} y_{jrk}, \qquad (8)$$

при условиях

$$\sum_{jr \in \Delta} x_{ijr} \le a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijr} = \sum_{k=1}^{p} y_{jrk} \le q_{jr}, \quad jr \in \Delta, \qquad (10)$$

$$\sum_{jr \in \Delta} y_{jrk} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (11)$$

$$x_{ijr} \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad jr \in \Delta, \qquad (12)$$

$$y_{jrk} \ge 0, \; jr \in \Delta, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (13)$$

где $\overline{x} = \left| x_{ijr} \right|_{m, |\Delta|}$, $\overline{y} = \left| y_{jrk} \right|_{|\Delta|, p}$.

Предполагается, что выполняется условия

$$\sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{jr \in \Delta} q_{jr}, \quad \sum_{k=1}^{p} b_k \le \sum_{i=1}^{m} a_i. \qquad (14)$$

известными методами линейного программирования. Задачу (8)-(13) можем записать в виде транспортной таблицы (см. таб. 1) и решить

Таблица 1 – Транспортная таблица (8) и (13) задачи

	q_{11}	…	q_{1q}	…	q_{n1}	…	q_{np}	b_1	…	b_p	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{k=1}^{p} b_k$
a_1	$\overline{c}_{111}$	…	$\overline{c}_{11p}$	…	$\overline{c}_{1n1}$	…	$\overline{c}_{1np}$	M	…	M	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
a_m	$\overline{c}_{m11}$	…	$\overline{c}_{m1p}$	…	$\overline{c}_{mn1}$	…	$\overline{c}_{mnp}$	M	…	M	0
q_{11}	0	…	M	…	M	…	M	c_{111}	…	M	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{1p}	M	…	0	…	M	…	M	M	…	c_{1pp}	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{n1}	M	…	M	…	0	…	M	c_{n11}	…	M	M
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
q_{np}	M	…	M	…	M	…	0	M	…	c_{npp}	M

Пример. Для иллюстрации способа решения задачи приведем небольшой пример с тремя предприятиями производства продукции фирмы $(m = 3)$, тремя перевалочными пунктами $(n = 3)$ и четырьмя потребителями однородной продукции $(k = 4)$.

Объем продукции производимый в предприятиях фирмы неизвестны но ограничены: $0 \le x_1 \le 8$, $0 \le x_2 \le 10$, $0 \le x_3 \le 12$.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Объем потребности продукции b_k, $k=1,2,3,4$ заданы вектором $b=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}=\{3,4,2,5\}$. Транспортные матрицы имеют вид:

$$\left|c_{ij}\right|_{3,3}=\begin{pmatrix}2&4&3\\1&5&2\\6&2&1\end{pmatrix},\quad \left|c_{jk}\right|_{3,4}=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\3&2&2&4\\2&3&2&1\end{pmatrix}.$$

Объем продукции получаемый и отправляемый каждым перевалочным пунктом к каждому потребителю ограничены:

$$0\le y_{11}\le 2,\ 0\le y_{21}\le 1,\ 0\le y_{31}\le 2,$$
$$0\le y_{12}\le 2,\ 0\le y_{22}\le 3,\ 0\le y_{32}\le 3,$$
$$0\le y_{13}\le 2,\ 0\le y_{23}\le 2,\ 0\le y_{33}\le 3,$$
$$0\le y_{14}\le 3,\ 0\le y_{24}\le 2,\ 0\le y_{34}\le 4.$$

Функции определяющие производственные затраты имеют вид:

$$\varphi_1(x_1)=3x_1+0,01,\ \varphi_2(x_2)=2x_2+0,01,\ \varphi_3(x_3)=2x_3+0,02.$$

Математическая модель задачи примет вид
найти минимум

$$L(x,y)=2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+x_{21}+5x_{22}+2x_{23}+6x_{31}+2x_{32}+x_{33}+3x_1+2x_2+2x_3+$$
$$+2y_{11}+y_{12}+2y_{13}+y_{14}+3y_{21}+2y_{22}+2y_{23}+4y_{24}+2y_{31}+3y_{32}+2y_{33}+y_{34}+0,04, \qquad (15)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{3}x_{1j}=x_1\le 8,\ \sum_{j=1}^{3}x_{2j}=x_2\le 10,\ \sum_{j=1}^{3}x_{3j}=x_3\le 12, \qquad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{3}x_{i1}=\sum_{k=1}^{4}y_{1k},\quad \sum_{i=1}^{3}x_{i2}=\sum_{k=1}^{4}y_{2k},\quad \sum_{i=1}^{3}x_{i3}=\sum_{k=1}^{4}y_{3k}, \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{3}y_{j1}=3,\quad \sum_{j=1}^{3}y_{j2}=4,\quad \sum_{j=1}^{3}y_{j3}=2,\quad \sum_{j=1}^{3}y_{i4}=5, \qquad (18)$$

$$0\le y_{11}\le 2,\ 0\le y_{12}\le 2,\ 0\le y_{13}\le 2,\ 0\le y_{14}\le 3,$$
$$0\le y_{21}\le 1,\ 0\le y_{22}\le 3,\ 0\le y_{23}\le 2,\ 0\le y_{24}\le 2,$$
$$0\le y_{31}\le 2,\ 0\le y_{32}\le 3,\ 0\le y_{33}\le 3,\ 0\le y_{34}\le 4, \qquad (19)$$
$$x_{ij}\ge 0,\quad i=1,2,3,\ j=1,2,3. \qquad (20)$$

Вводим переменные $x_{ijr}\ge 0$, $x_{jrk}\ge 0$. Обозначим через Δ — множество пар индексов $\{jr\}$, $j=1,2,3$, $r=1,2,3,4$, т.е. $\Delta=\{11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34\}$.

Преобразуем задачу (15)-(20) согласно равенством (*), (**) и (***), имеем
найти минимум

$$L(\overline{x},\overline{y})=5(x_{111}+x_{112}+x_{113}+x_{114})+7(x_{121}+x_{122}+x_{123}+x_{124})+6(x_{131}+x_{132}+x_{133}+x_{134})+$$
$$+3(x_{211}+x_{212}+x_{213}+x_{214})+7(x_{221}+x_{222}+x_{223}+x_{224})+4(x_{231}+x_{232}+x_{233}+x_{234})+$$
$$+8(x_{311}+x_{312}+x_{313}+x_{314})+4(x_{321}+x_{322}+x_{323}+x_{324})+3(x_{331}+x_{332}+x_{333}+x_{334})+$$
$$+2y_{111}+100(y_{112}+y_{113}+y_{114})+100y_{121}+y_{122}+100(y_{123}+y_{124})+$$
$$+100(y_{131}+y_{132})+2y_{133}+100y_{134}+100(y_{141}+y_{142}+y_{143})+y_{144}+$$
$$+3y_{211}+100(y_{212}+y_{213}+y_{214})+100y_{221}+2y_{222}+100(y_{223}+y_{224})+$$
$$+100(y_{231}+y_{232})+2y_{233}+100y_{234}+100(y_{241}+y_{242}+y_{243}+y_{244})+$$
$$+2y_{311}+100(y_{312}+y_{313}+y_{314})+100y_{321}+3y_{322}+100(y_{323}+y_{324})+$$

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$$+100\left(y_{331}+y_{332}\right)+2y_{333}+100y_{334}+100\left(y_{341}+y_{342}+y_{343}\right)+y_{344} \qquad (21)$$

при условиях

$$\sum_{jr\in\Delta} x_{1jr} \le 8, \quad \sum_{jr\in\Delta} x_{2jr} \le 10, \quad \sum_{jr\in\Delta} x_{3jr} \le 12, \qquad (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} x_{i11} = \sum_{k=1}^{4} y_{11k} \le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i12} = \sum_{k=1}^{4} y_{12k} \le 2, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i13} = \sum_{k=1}^{4} y_{13k} \le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i14} = \sum_{k=1}^{4} y_{14k} \le 3, \end{array}\right\} \qquad (23)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} x_{i21} = \sum_{k=1}^{4} y_{21k} \le 1, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i22} = \sum_{k=1}^{4} y_{22k} \le 3, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i23} = \sum_{k=1}^{4} y_{23k} \le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i24} = \sum_{k=1}^{4} y_{24k} \le 2, \end{array}\right\} \qquad (24)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{3} x_{i31} = \sum_{k=1}^{4} y_{31k} \le 2, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i32} = \sum_{k=1}^{4} y_{32k} \le 3, \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i33} = \sum_{k=1}^{4} y_{33k} \le 3, \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i34} = \sum_{k=1}^{4} y_{34k} \le 4, \end{array}\right\} \qquad (25)$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{jr\in\Delta} y_{jr1} = 3, \quad \sum_{jr\in\Delta} y_{jr2} = 4, \\ \sum_{jr\in\Delta} y_{jr3} = 2, \quad \sum_{jr\in\Delta} y_{jr4} = 5, \end{array}\right\} \qquad (26)$$

$$x_{ijr} \ge 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad jr \in \Delta, \qquad (27)$$

$$y_{jrk} \ge 0, \quad jr \in \Delta, \quad k = 1, 2, 3, 4. \qquad (28)$$

Запишем задачу (21) – (28) в виде транспортной таблицы (см. таб. 2) и решим модифицированным распределительным методом [2].

Таблица 2 – Транспортная таблица (21) и (28) задачи

	2	2	2	3	1	3	2	2	2	3	3	4	3	4	2	5	16
8	5	5	5	5	7	7	7	7	6	6	6	6	100	100	100	100	0
10	3	3	3	3	7	7	7	7	4	4	4	4	100	100	100	100	0
12	8	8	8	8	4	4	4	4	3	3	3	3	100	100	100	100	0
2	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	2	100	100	100	100
2	100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1	100	100	100
2	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	2	100	100
3	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1	100
1	100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	3	100	100	100	100
3	100	100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	2	100	100	100
2	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	2	100	100
2	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100	100	4	100
2	100	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	2	100	100	100	100
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	3	100	100	100
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	2	100	100
4	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	0	100	100	100	1	100

Определен оптимальный план производства x_i, $i = 1, 2, 3$, т.е. $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 9$, и перевозок $\bar{x} = \{x_{211} = 2, x_{212} = 2, x_{214} = 1, x_{331} = 1, x_{321} = 2, x_{333} = 2, x_{334} = 4\}$.

Отсюда первому перевалочному пункту соответствует объем разгрузки и отправки продукции: $y_1 = 5$, второму: $y_2 = 0$, третьему: $y_3 = 9$, единиц. Распределяется между потребителями по следующему плану:

$$\bar{y} = \{y_{111} = 2, y_{122} = 2, y_{144} = 1, y_{311} = 1, y_{322} = 2, y_{333} = 2, y_{344} = 4\}.$$

Целевая функция при полученном плане производства и перевозок имеет значения: $L(\bar{x}, \bar{y}) = 65$ у. е.

Список литературы

1. Гольштейн, Е.Г., Задача линейного программирования транспортного типа [Текст] / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин, – М: Наука, 1969. – 384 с.
2. Юдин Д.Б. Задачи и методы линейного программирования [Текст] / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн, – М: Советское радио, 1964. – 494 с.