ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

УДК 517.9 DOI: 10.35803/1694-5298.2020.3.448-453

АКЕРОВА ДЖ.А., КЕНЕНБАЕВ Э., АСКАР КЫЗЫ Л.
[1]КНУ им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика
[2]Институт математики НАН КР, Бишкек, Кыргызская Республика

AKEROVA DZH.A., KENENBAEV E., ASKAR KYZY L.
[1]J. Balasagyn Kyrgyz National University, Bishkek, Kyrgyz Republic
[2]Mathematics Institute of the NAS KR, Bishkek, Kyrgyz Republic
akerovadzhyldys@mail.ru Elaman0527@gmail.com lira130780@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ

STUDY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONTROL

Буга чейинки иштерде кандайдыр бир жетишкендиктер болсо да энтропиянын өсүүсүнүн минималдаштыруу маселеси коюлган. Энтропиянын өсүүсүн минималдаштыруу маселелеринде жана төмөндө каралган процесстердин жыйынтыгынын негизинде энтропия тууралуу гипотеза сунушталган. Чекитти чектелген тездетүүдө жана токтотууда энтропиянын өсүүсүнүн так баасы алынган.
Өзөк сөздөр:*энтропия,энтропиянын өсүндүсү, гипотеза, баа.*

Ранее в ряде работ ставился вопрос о минимизации приращения энтропии при достижении некоторых целей. На основании анализа рассмотренных процессов ниже и в задачах о минимизации приращении энтропии выдвинуты гипотезы об энтропии. Получена точная оценка возрастания энтропии при ограничениях на ускорении и торможении точки.
Ключевые слова: *энтропия, приращение энтропии, гипотеза, оценка.*

Earlier in several papers the question on minimizing of the entropy increment in the achievement of some goals was arisen. Based on the analysis of the processes discussed in this paper and in the problem of minimizing the increment of entropy the hypotheses on entropy have been put forward. An accurate estimate of the entropy increment is obtained with limited acceleration and braking of the point.
Key words: *Entropy, entropy increment, hypothesis, estimate.*

Введение. Нами [1] была поставлена и рассмотрена задача минимизации приращения энтропии при достижении некоторых целей и задача разработки общей методики исследования и доказательства существования вместе с установлением свойств решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, выдвинуты гипотезы об энтропии. Такая методика необходима для получения количественных оценок снизу для возрастания энтропии в почти замкнутых системах, описываемых дифференциальными уравнениями с управлением. Изложены второй закон термодинамики и гипотезы об оценке снизу для возрастания энтропии. Практическое значение этого закона состоит, в частности, в том, что приращение энтропии в некотором смысле соответствует понятию загрязнения окружающей среды.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Гипотезы об энтропии. ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см., например, [3]). Энтропия H - это функция состояния термодинамической системы, определяющая меру необратимого рассеивания энергии. Ее изменение определяется согласно формуле

$$\Delta H = \sum \frac{\Delta Q}{\Theta} \qquad (1)$$

где ΔQ- количества переданной тепловой энергии или энергии, необратимо перешедшей в тепловую, Θ - абсолютные температуры, при которых происходят передачи или превращения энергии; суммирование производится по всем процессам, происходящим в системе одновременно.

При передаче тепла внутри системы правая часть соотношения (1) содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые (каждая передача от одного тела к другому дает два слагаемых с разными знаками), при переходе других видов энергии в тепло - только положительные слагаемые.

На основании многих экспериментов, доказывающих, что тепло переходит от более теплых компонент системы к более холодным, но не наоборот, и в [1] формализована

ГИПОТЕЗА 1 (второй закон термодинамики). В замкнутых системах (в которых нет обмена энергией с окружающей средой) изменение ΔH энтропии может быть только положительным (приращение энтропии).

В [4] предложена следующая ситуация. Пусть имеется физическая замкнутая система. Пусть в данный момент она находится в стационарном состоянии A и есть возможность перехода в другое стационарное состояние B.

Для частного случая такого перехода (движение в вязкой жидкости) в [6] отмечено, что необходимые затраты энергии (т.е. переход ее в тепловую) и тем самым приращение энтропии увеличиваются при уменьшении времени перехода.

На основании анализа нескольких процессов в [4] была выдвинута

ГИПОТЕЗА 2. Существует такой отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), зависящий только от начального состояния системы, что для любого $T<T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше некоторой положительной величины при любом переходе от состояния A к состоянию B за время T. Существует также такая константа C_0, что

$\Delta H \geq \dfrac{C_0}{T^2}$ (размерность C_0– масса × длина ×длина / температура).

ПРИМЕЧАНИЕ. Если исходить из принципа детерминизма, то в замкнутой системе есть только один сценарий будущего, то есть не могут существовать различные возможности переходов. Поэтому в [6] выдвинуто предположение, что различные возможные действия внутри системы, переводящие ее из состояния A в состояние B, задаются некоторым внешним воздействием (управлением) достаточно малой (пренебрежимо малой) энергии. Такая система названа "почти замкнутой".

Также предложена более конкретная формулировка гипотезы.

Пусть в некоторой инерциальной системе координат в момент времени t_1 в этой системе некоторая материальная точка массы m неподвижна и в момент времени $t_2 = t_1 + T$ она также неподвижна и находится на расстоянии X от начального положения.

ГИПОТЕЗА 2а. Существуют такие отрезок времени T_0 (адиабатическое время системы), и такая константа G_0 , зависящие только от начального состояния системы, что для любого $T<T_0$ приращение энтропии ΔH в системе не меньше

$$\Delta H \geq \frac{G_0 m X^2}{T^2}$$ (размерность G_0 - 1 / температура).

Постановка задачи. Используем формулу для работы $A=S \cdot F$, для мощности:

$$P=\frac{dA}{dt}=\frac{|dS|\cdot|F|}{dt}=|V|\cdot|F|,$$

где A– работа, F– сила, S– путь, V– скорость, и другую формулу для работы:
$A=\int|V|\cdot|F|dt.$

Для решения поставленной задачи сначала рассмотрим задачу с одной материальной точкой.

Ранее мы предполагали, что имеются неограниченные возможности, как ускорения, так и торможения точки единичной массы, и при торможении вся энергия переходит в тепло. Сначала точка неподвижна. Необходимо передвинуть ее за время T на расстояние L так, чтобы она тоже после передвижки была неподвижна. Сохраним те же обозначения для функции положения точки $u(t)$, управляющей функции $v(t)$и функционала I.

Так мы получили следующую задачу оптимального управления: дифференциальное уравнение

$$u''(t;v)=v(t)\ (0\le t\le T), \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0;v)=u'(0;v)=0;\ u(T;v)=L,\ u'(T;v)=0. \tag{2}$$

Требуется минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, т.е. выделившейся при торможении.

Очевидно, что для получения наилучшего результата скорость ($u'(t)$) должна быть неотрицательной; сначала должно быть ускорение ($u''(t)>0$), а потом – замедление ($u''(t)<0$).

Тогда получаем:

$$I(v(t):t):=\int_0^T u'(s;v)\max\{0,-u'(s;v)\}ds. \tag{3}$$

Из (1)-(2) находим

$$u'(t)=\int_0^t v(s)ds=-\int_t^T v(s)ds; \tag{4}$$

$$u(t)=\int_0^t u'(s)ds=\int_0^t (t-s)v(s)ds. \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$\int_0^T v(s)ds=0 \tag{6}$$

Из (5) и (2) следует

$$\int_0^T (T-s)v(s)ds=L. \tag{7}$$

Подставляем (4) в (3):

$$I(v(t):t):=\int_0^T\int_S^T v(w)dw\max\{0,-v(s)\}ds. \tag{8}$$

Таким образом, требуется найти оценку снизу для функционала (8) с условиями (6) и (7).

Заменим

$$s=TS,\quad V(S)=v(TS)\frac{T^2}{L}\quad (0\le S\le T).$$

Тогда эти условия принимают вид:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\int_0^1 V(S)dS = 0 \tag{9}$$

$$\int_0^1 (T-TS)v(TS)TdS = L, \quad \int_0^1 (1-S)V(S)dS = 1 \tag{10}$$

Соответственно, (8) с заменой $w=TW$ принимает вид:

$$I(v(t):t) := \int_0^1\int_S^1 v(TW)TdW \max\{0,-v(TS)T\}dS =$$

$$= \int_0^1\int_S^1 V(W)L/T^2dW \max\{0,-V(S)L/T^2\}TdS =$$

$$= L^2/T^2 \int_0^1\int_S^1 V(W)dW \max\{0,-V(S)\}dS. \tag{11}$$

Существует такая точка $Z\in(0,1)$, что

$$V(S) = \begin{cases} V_+(S) \ge 0 \ (0 \le S \le Z) \\ -V_-(S) \le 0 \ (Z \le S \le 1) \end{cases}.$$

Тогда (11) принимает вид

$$I(v(t):t) := L^2/T^2 \int_Z^1\int_S^1 V_-(W)dW V_-(S)dS. \tag{12}$$

Обозначим C_0– минимально возможное значение следующего функционала для безразмерной функции $V(S)$:

$$I(V(S):S) := \int_Z^1\int_S^1 V_-(W)dW V_-(S)dS. \tag{13}$$

при условиях (9)-(10). Тогда из (12) получаем

$$I(v(t):t) \ge \frac{L^2}{T^2}\cdot C_0 \tag{14}$$

Найдем оценки для абсолютной константы C_0.

При неограниченном ускорении и замедлении нами была доказана

ТЕОРЕМА. Имеет место оценка

$$I(v(t):t) \ge \frac{1}{2}\frac{L^2}{T^2} \tag{15}$$

и правая часть сколь угодно близка к $\frac{1}{2}$.

Точность этой оценки была продемонстрирована на функции

$$V_q(S) := 2^{q+1}(q+2)\left(\frac{1}{2} - S\right)^q, \tag{16}$$

где q – нечетное натуральное число $(Z = \frac{1}{2})$.

Рассмотрим теперь ограничение на управляющую функцию:

$$|u(t)| \le k = \text{const} > 0\,. \tag{17}$$

Замена

$$V(S) = v(TS)\frac{T^2}{L}$$

соответственно дает константу $K = k\frac{T^2}{L}$.

Из вида функции (16) возникает предположение, что минимум функционала (13) достигается для функции вида

$$V_a(S) = \begin{cases} K & (0 \le S \le a) \\ 0 & (a \le S \le 1 - a) \\ -K & (1 - a \le S \le 1), \end{cases}$$

где $a \le \frac{1}{2}$ - некоторая константа, зависящая от *K*.

Равенство (9) выполняется в силу симметрии. Уравнение (10):

$$\int_0^1 (1 - S)V_a(S)dS = \int_0^a (1 - S)KdS - \int_{1-a}^1 (1 - S)KdS =$$
$$= K\left(a - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\right) = K(a - a^2) = 1.$$

Отсюда $a = \frac{1}{2K}\left(K - \sqrt{K^2 - 4K}\right)$.

Таким образом, чтобы точке дойти до конечного положения, должно быть $K \ge 4$, тогда будет $a \le \frac{1}{2}$.

Подставляя в (13), получаем:

$$I(V_a(S): S) = \frac{1}{2}\left(\int_{1/2}^1 V_a(S)dS\right)^2 = \frac{1}{2}(Ka)^2 = C_K := \frac{1}{8}\left(K - \sqrt{K^2 - 4K}\right)^2.$$

Имеют место соотношения:

$$C_K > \frac{1}{2},$$

поскольку

$$\frac{1}{4}\left(K - \sqrt{K^2 - 4K}\right) > 1,$$

$\lim_{K\to\infty} C_K = \frac{1}{2}$.

Отсюда следует гипотеза, что эта оценка - точная.

Заключение. На основании многих экспериментов, доказано, что тепло переходит от более теплых компонент системы к более холодным, но не наоборот. В работе выдвинуты гипотезы об энтропии, такая методика необходима для получения количественных оценок снизу для возрастания энтропии почти в замкнутых системах, описываемых с дифференциальными уравнениями с управлением, где требовалось минимизировать функционал, показывающий количество энергии, перешедшей в тепло, т.е. выделившейся при торможении.

Список литературы

1. Кененбаева Г.М. Задачи о минимизации приращении энтропии и гипотезы об энтропии [Текст] / Г.М., Кененбаева, Дж.А. Акерова, Э. Кененбаев, Н.М. Бакирова // Проблемы современной науки и образования (РФ), 2017. - №13(95). - с.12-19.
2. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями. [Текст] / В.В. Лунев – М.: Физматлит, 2007. – 759 с. (§ 3.6. Волновые потери).
3. Мартин Н. Математическая теория энтропии. [Текст] / Н.Мартин, Дж. Ингленд. – М.: Мир, 1988.– 350 с.

4. Панков П.С. Адиабатические показатели замкнутых систем [Текст] / П.С. Панков // Вестн. Кырг. нац. ун-та им. Ж. Баласагына. Сер. 3: Естественно-техн. науки. Физика и физ. образование. – 2003. – С. 146-147.

5. Панков П.С. Интервальные неравенства для дифференциальных уравнений с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах[Текст] / П.С. Панков, Дж.А Акерова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. –Бишкек: 2014. – Вып. 46. –С. 82-86.

6. Landauer R.The Fundamental Physical Limits of Computation [Text] /R. Landauer, C.H. Bennett //Scientific American. – 1985. – July. – P. 48-56.

7. Панков П.С. Дифференциальных уравнений с управлением в модели возрастания энтропии в почти замкнутых системах стрением [Текст] / П.С. Панков, Дж.А. Акерова // Вестник ИМ НАН КР. – Бишкек: 2018. – Вып. 1. –С. 23-30.

8. Кененбаева Г.М. Математические модели для оценки приращения энтропии [Текст]
/ Г.М. Кененбаева, Дж.А. Акерова, Э. Кененбаев // Тезисы докладов II Борубаевских чтений
(г. Бишкек, 1 марта 2018 года). - Бишкек: Кыргызское математическое общество, 2018.