УДК 338.1:664.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ПО БРИКЕТИРОВАНИЮ УГЛЯ

Джакыпбеков Каныбек, *к.ф.-м.н., доцент, ИГД и ГТ им. акад.У.А.Асаналиева, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр.Чуй 215, e-mail: kanybek49@mail.ru*

Койчуманова Жамила Койчумановна, *ст.преподаватель, ИГД и ГТ им. акад. У.А.Асаналиева, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр.Чуй 215, e-mail: koychumanovazh@mail.ru*

Бакиева Жыргалкул Зарлыковна, *ст.преподаватель, ИГД и ГТ им. акад. У.А.Асаналиева, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр.Чуй 215, e-mail: bakieva.73@mail.ru*

Аннотация: Приведена метод решения задачи размещения производства с искомыми объемами производства и потредления с выпуклыми сепарабельными функциями. Для решения этой одноэстремальной задачи применен приближенный метод, основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций. Применение этого метода совместно с запрещающими тарифами позволило аппроксимировать нелинейную задачу транспортной задачи линейного программирования, с дополнительным условием нелинейности, которое названо условием наилучшей аппроксимации.

Ключевые слова: линейная аппроксимация, сепарабельные функции, транспортные задачи линейного программирования.

MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL PLACEMENT OF PRODUCTION OF COAL BRIQUETTING

Djakypbekov Kanybek, *Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, Institute of Mining and Mining Technologies academician U.A.Asanalieva, Kyrgyzstan Bishkek, e-mail: kanybek49@mail.ru*
Koychumanova Zhamila, *Senior Lecturer, Institute of Mining and Mining Technologies academician U.A.Asanalieva, Kyrgyzstan Bishkek, e-mail: koychumanovazh@mail.ru*
Bakieva Jyrgalkul Zarlykovna, *Senior Lecturer, Institute of Mining and Mining Technologies academician U.A.Asanalieva, Kyrgyzstan Bishkek, e-mail: bakieva.73@mail.ru*

Annotation: The method for solving the problem of locating production with the required volumes of production and posdredleniya with convex separable functions is given. To solve this one-extremal problem, an approximate method is used, based on piecewise linear approximation of nonlinear functions. The application of this method together with prohibitive tariffs allowed to approximate the non-linear problem of the transport problem of linear programming, with the additional condition of nonlinearity, which is called the best approximation condition.

Keywords: linear approximation, separable functions, and transport problems of linear programming.

Рассматривается экстремальная задача для брикетирования угля [1,3]:
Найти минимум

$$L(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mathrm{x}_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \varphi(\mathrm{x}_i) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(\mathrm{y}_j) \qquad (1.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = Q, \qquad (1.4)$$

$$a_i' \le x_i \le a_i'', \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (1.5)$$

$$b_j' \le y_j \le b_j'', \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.6)$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.7)$$

где $x = \|x_{ij}\|_{m,n}$|; Q, a_i', a_i'', в$_j'$, в$_j''$, c_{ij}, $i = 1.2 \dots, m$,

$j = 1.2 \dots, n$ - известные постоянные; а $\varphi_i(x_i)$, $i = 1.2 \dots, m$,

$\psi_j(\mathrm{y}_j)$, $j = 1.2 \dots, n$ – некоторые заданные

Предполагаются , что выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i' \leq Q \leq \sum_{i=1}^{m} a_i'',$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j' \leq Q \leq \sum_{j=1}^{n} b_j''.$$

В качестве примера экономического приложения покажем, что к рассматриваемой задаче сводится так называемая задача оптимального размещения производства брикетирования угля с искомыми объемами производства и переработки по критерию максимума прибыли получаемой фирмой.

Пусть фирма имеет m пунктов добычи сырья с неизвестными, но заключенными в определенных границах, обьемами добычи. Уголь из этих пунктов доставляется на n заводов этой же фирмы, где из нее изготовляется брикеты. Объем перерабатываемой сырья на каждом заводе неизвестны, но находятся в определенных пределах. Известна реализационная цена единицы объема брикетированного угля для каждого отдельного завода.

Требуется составить план добычи угля и ее переработки, чтобы максимизировать прибыль получаемой фирмой от реализации брикета.

Для математической формулировки задачи введем следующие обозначения:

i –индекс пункта добычи угля, $i = 1, 2, \dots, m$;

j –индекс завода, $j = 1, 2, \dots, n$;

x_i –искомый объем глины, добываемой на -ом пункте; $i = 1, 2, \dots, m$;

y_j –искомый объем угля, перерабатываемой на j -ом заводе; $j = 1, 2, \dots, n$;

x_{ij} –объем угля, перевозимой из i -го пункта добычи на j-й завод, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

a_i', a_i'' –соответственно нижняя и верхняя границы добычи сырья на i -ом пункте, $i = 1, 2, \dots, m$,

b_j', b_j'' –соответственно нижняя и верхняя границы переработки угля на

j-ом заводе, $j = 1, 2, \dots, n$,

Q –заданный суммарный объем угля, который должен быть добыт во всех пунктах добычи,

λ_{ij} –коэффициент выхода брикета из единицы веса угля, добытой на j -м пункте и переработанной на j -м заводе, $i = 1, 2, \dots, m$,

$j = 1, 2, \dots, n$,

c_{ij}'–закупочная цена брикета, изготовленного на -м заводе из глины, добытой на i -м пункте, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

c_{ij} –стоимость транспортировки единицы объема угля из i -го пункта добычи в j-й завод, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$\varphi_i(x_i)$ – расходы на добычу угля объемом x_i на –м пункте, $i = 1, 2, \dots, m$,

$\psi_j(y_j)$ – расходы на переработку угля объемом y_j на –м заводе, $j = 1, 2, \ldots, n$,

Согласно принятым обозначениям затраты на добычу угля объемом Q составляют величину

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i),$$

Затраты на транспортировку

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

и затраты на переработку

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \psi_j(y_j).$$

Таким образом, суммарные затраты равны

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(y_j).$$

Доход, получаемый за счет реализации готовой продукции (брикета), выражается величиной

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \lambda_{ij} x_{ij}.$$

Следовательно, суммарная прибыль, получаемой фирмой, равна

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} \lambda_{ij} x_{ij} - \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(y_i) \right]$$

В соответствии с принятыми обозначениями вышеизложенная проблема запишется следующем виде:

Найти максимум функционала

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \lambda_{ij} x_{ij} - \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \varphi(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(y_j) \right] \qquad (1.8)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = x_i, \;\; i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = y_j, \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = Q, \qquad (1.11)$$

$$a_i' \le x_i \le a_i'', \ \ i = 1, 2, \dots, m, \qquad (1.12)$$

$$b_j' \le y_j \le b_j'', \ \ j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.13)$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \ i = 1, 2, \dots, m, \ \ j = 1, 2, \dots, n, \qquad (1.14)$$

Ограничения (1.9) указывают на то, что уголь, добытая в каждом пункте, должна быть распределена между заводами.

Ограничения (1.10) – что каждый завод должен переработать всю доставленную сырья.

Ограничение (1.11) описывает условие фиксирования суммарного объема добываемой угля.

Условия (1.12) и (1.13) накладывают требуемые ограничения на объемы добычи угля и объемы ее переработки на каждом заводе.

Ограничения (1.14) указывают на отсутствие обратных перевозок.

Рассмотрим методы решения задачи (1.1) в случае, когда $F_2(x) = const$. Для ее решения применим метод кусочно-линейной аппроксимации.

Выпуклые функции $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\varphi_j(y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, заменим кусочно-линейными функциями. Для этого разобьем интервалы $[a_i', a_i'']$ и $[b_j', b_j'']$, которые могут пробегать переменные x_i и $i = 1, 2, \dots, m$, и y_j, $j = 1, 2, \dots, n$, соответственно точками $a_i', a_i' + h_i, a_i' + 2h_i, \dots, a_i' + r_i h_i$ и $b_j', b_j' + l_j, b_j' + 2l_j, \dots, b_j' + t_j l_j$ на r_i и t_j равных частей с шагом

$$h_i = \frac{a_i'' - a_i'}{r_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad l_j = \frac{b_j'' - b_j'}{t_j}, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Построим кусочно-линейной аппроксимации $\hat{f}_i(x_i)$ и $\hat{\varphi}_j(y_j)$ функций $f_i(x_i)$ и $\varphi_j(y_j)$ соответственно.

Переменные x_i заменяем через z_{ik} следующим образом:

$$x_i = a_i' + \sum_{k=1}^{z_i} z_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad (1.15)$$

где

$$0 \le z_{ik} \le h_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad k = 1, 2, \dots, r_i. \qquad (1.16)$$

Преобразовав неравенства (2.2) в равенство, имеем

$$h_i = z_{ik} + \zeta_{ik}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad k = 1, 2, \dots, r_i. \qquad (1.17)$$

$$z_{ik} \ge 0, \ \ \zeta_{ik} \ge 0 \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad k = 1, 2, \dots, r_i.$$

Подобрав соответствующим образом переменные z_{ik}, функцию $f_i(x_i)$ можно приближенно представить в виде

$$f_i(x_i) \cong f_i(a_i') + \sum_{k=1}^{r_i} [f_i(a_i' + kh_i) - f_i(a_i' + (k-1)h_i)] \frac{z_{ik}}{h_i}, i = 1, 2, \dots, m, (1.18)$$

Из системы равенств (1.15) и (1.17) получим

$$z_{ik} = h_i - \zeta_{ik}, \qquad i = 1, 2, \dots, m, \qquad k = 1, 2, \dots, r_i,$$

$$x_i = a_i' + \sum_{k=1}^{r_i} (h_i - \zeta_{ik}), i = 1, 2, \dots, m. \qquad (1.19)$$

Так же, как и функции $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, можно аппроксимировать функции $\varphi_j(y_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$, кусочно-линейными функциями, введя аналогичные переменные v_{sj} и ξ_{sj} по формулам

$$y_j = b_j' + \sum_{s=1}^{t_j} v_{sj}\,, \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.20}$$

$l_j = v_{sj} + \xi_{sj}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, t_j$,

$$v_{sj} \geq 0, \qquad \xi_{sj} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, t_j, \tag{1.21}$$

$$\varphi_j(y_j) \cong \varphi_j(b_j') +$$

$$+\sum_{s=1}^{t_j} \left[\varphi_j(b_j' + sl_j) - \varphi_j(b_j' + (s-1)l_j)\right] \frac{v_{sj}}{l_j}, j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.22}$$

где переменные v_{sj} удовлетворяют условию наилучшей аппроксимации, которое заключается в следующем:

если для некоторых j, $v_{s_j j} > 0$, то $v_{sj} = l_j$ при $s = 1,2, \dots, s_j - 1$,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{s=1}^{t_j} \xi_{sj} = b_j'', \quad j = 1, 2, \dots, n, \tag{1.23}$$

где

$$0 \leq \xi_{sj} \leq l_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s = 1, 2, \dots, t_j,$$

$$Q - \sum_{j=1}^{n} b_j' = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{t_j} v_{sj} \geq 0. \tag{1.24}$$

Подставляя значения $f_i(x_i)$ и $\varphi_j(y_j)$ из (1.18) и (1.24) в функционал рассматриваемой задачи, получим

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=i}^{r_i} (\frac{\Delta f_{ik}}{h_i})\, z_{ik} + \sum_{s=1}^{t_j} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\Delta \varphi_{sj}}{l_j}\right) \vartheta_{sj} + A,$$

где введены следующие обозначения:

$$\frac{\Delta f_{ik}}{h_i} = \frac{f_i(a_i' + kh_i) + f_i(a_i' + (k-1)h_i)}{h_i}, \qquad i = 1,2, \dots, m, \qquad k = 1,2, \dots, r_i,$$

$$\frac{\Delta \varphi_{sj}}{l_j} = \frac{\varphi_j(b_j' + sl_j) - \varphi_j(b_j' + (s-1)l_j)}{l_j}, \qquad s = 1,2, \dots t_j, \qquad j = 1,2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a_i') + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(b_j') = A,$$

$\frac{\Delta f_{ik}}{h_i}$ и $\frac{\Delta \varphi_{sj}}{l_j}$ – угловые коэффициенты соответствующих звеньев кусочно-линейных функций $\hat{f}_i(x_i)$, $\hat{\varphi}_i(y_i)$.

Таким образом, окончательно имеем следующую задачу линейного программирования:

найти минимум функционала

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_i} \left(\frac{\Delta f_{ik}}{h_i}\right) z_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{t_j} \left(\frac{\Delta \varphi_{sj}}{l_j}\right) \vartheta_{sj} \tag{1.25}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{k=1}^{r_i} \zeta_{ik} = a_i'', \ \ i = 1,2,\dots,m, \tag{1.26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{S=1}^{t_j} \xi_{sj} = b_j'', \ \ j = 1,2,\dots,n, \tag{1.27}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = Q, \tag{1.28}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r_i} z_{ik} = Q - \sum_{i=1}^{n} a_i', \tag{1.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{t_j} v_{sj} = Q - \sum_{j=1}^{n} b_j', \tag{1.30}$$

$$\zeta_{ik} + Z_{ik} = h_{i,} \quad i = 1,2,\dots m, \ \ k = 1,2,\dots,r_i, \tag{1.31}$$

$$\xi_{sj} + \vartheta_{sj} = l_{j,} \quad j = 1,2,\dots,n, \quad s = 1,2,\dots,t_j, \tag{1.32}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad z_{ik} \geq 0, \quad \vartheta_{sj} \geq 0, \ \ \zeta_{ik} \geq 0, \ \ \xi_{sj} \geq 0, \tag{1.33}$$

$$i = 1,2,\dots,m, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad k = 1,2,\dots,r_i, \quad s = 12,\dots,t_j,$$

и условии наилучшей аппроксимации.

Задачу (1.26) – (1.27) при помощи запрещающих тарифов можно свести к закрытой модели транспортной задачи линейного программирования.

Сформулирована общая постановка задачи размещения с искомыми объемами производства и переработки с дробной стуктурной целевой функции.

Приведена метод решения задачи размещения производства с искомыми объемами производства и потредления с выпуклыми сепарабельными функциями. Для решения этой одноэстремальной задачи применен приближенный метод, основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейных функций [2]. Применение этого метода совместно с запрещающими тарифами позволило аппроксимировать нелинейную зхадачу транспортной задачи линейного программирования, с дополнительным условием нелинейности, которое названо условием наилучшей аппроксимации.

Результаты работы могут быть использованы в хозяйствующими субъектами Кыргызской Республики для развитии своего бизнеса.

Литература:

1. Э.Г. Ланге, А.Ж. Жусупбаев. Комбинаторный метод решения задачи размещения. Фрунзе «Илим». 1990.

2. Иманалиев М.И., Жусупбаев А., Асанкулова М. Метод решения многопродуктовой задачи размещения. – Бишкек: Илим, 1998. -164 с.

3. Жусупбаев А., Асанкулова М. Методы решения специального класса задач размещения. – Бишкек: Илим, 2006. -175 с.