УДК: 517.955.8

АЛКАК ҮЧҮН БИСИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН ЖАШАШЫ ЖАНА ЖАЛГЫЗДЫГЫ

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КОЛЬЦА

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE BISINGULARLY PERTURBED DIRICHLET PROBLEM FOR A RING

Орозов М.О., ОшМУнун аспиранты,
Маматбуваева М.И., Раманкулова Ш.А.,ОшМУнун магистранттары

Аннотация: *Белгилүү болгондой, ар кандай физикалык мүнөздөгү стационардык процесстер, мисалы, диффузия, термелүүлөр, жылуулук өткөрүмдүүлүк ж.б. кичине же чоң параметрлерди камтыган эллиптикалык типтеги теңдемелер менен сүрөттөлөт. Бул параметрлердин маселенин чыгарылышына тийгизген таасирин аныктоо актуалдуу маселе болуп саналат. Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Дирихленин шарты коюлган. Теңдеменин өзгөчөлүктөрү: эң жогорку туундулардын астында кичинекей параметр катышат жана ага ылайык козголбогон теңдеме өзгөчө айланага ээ. Изилдөөнүн максаты - Дирихле маселесинин чыгарылышынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө. Колдонулуучуусулдар: өзгөртүп түзүү, дифференциалдык барабарсыздык, кичинекей параметрусулдары. Алгачкеректүү аныктамалар келтирилген, андан соң негизги теорема далилденген. Мындан сырткары кичинекей параметр усулун колдонуп, изилденип жаткан маселенин бисингулярдык экендиги далилденген.*

Аннотация: *Как нам известно, стационарные процессы различной физической природы, например, диффузия, колебания, теплопроводность и др. описываются уравнениями эллиптического типа, которые содержат либо малые параметры, либо большие. Определить влияние этих параметров на решения задачи является актуальной проблемой. В статье рассматривается линейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа, с малым параметром при старших производных. Для решение этого уравнения ставиться условие Дирихле. Особенности уравнения: присутствие малого параметра при старших производных и соответствующее невозмущенное уравнение имеет особую окружность. Цель исследования – доказать существование и единственность решении задачи Дирихле. Используемые методы: преобразования, дифференциальных неравенств, малого параметра. В началеприводятся основные определения, затем доказывается основная теорема. Кроме этого с помощью метода малого параметра доказана, что исследуемая задача является би сингулярной*

Annotation: *As we know, stationary processes of various physical nature, for example, diffusion, oscillations, thermal conductivity, etc., are described by equations of an elliptic type that contain either small or large parameters. Determining the influence of these parameters on the solution of the problem is an urgent problem. The article deals with a linear inhomogeneous partial differential equation of the second order of elliptic type, with a small parameter at the highest derivatives. The Dirichlet condition is set for the solution of this equation. Features of the equation: the presence of a small parameter at the highest derivatives and the corresponding unperturbed equation has a special circle. The purpose of the study is to prove the existence and uniqueness of the solution to the Dirichlet problem. Methods used: transformations, differential inequalities, small parameter. At the beginning, the main definitions are given, then the main theorem is proved. In addition, using the small parameter method, it was proved that the problem under study is bisingular.*

Ачкыч сөздөр: *Дирихле маселеси, өзгөчөайлана, эллиптикалык типтеги теңдеме, сингулярдык козголгон маселе, бисингулярдык маселе, кичине параметр.*

Ключевые слова: *задача Дирихле, особая окружность, уравнение эллиптического типа, сингулярно возмущенная задача, бисингулярная задача, малый параметр.*
Key words: *Dirichlet problem, singular circle, elliptic equation, singularly perturbed problem, bisingular problem, small parameter.*

Маселенин коюлушу

Белгилүү болгондой, ар кандай физикалык мүнөздөгү стационардык процесстер, мисалы, диффузия, термелүүлөр, жылуулук өткөрүмдүүлүк ж.б., кичине же чоң параметрлерди камтыган эллиптикалык типтеги теңдемелер менен сүрөттөлөт. Бул параметрлердин маселенин чыгарылышына тийгизген таасирин аныктоо актуалдуу маселе болуп саналат[1]-[4].

Төмөнкү чек аралык маселени изилдейбиз

$$\varepsilon\Delta v(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}\,v(\rho,\varphi,\varepsilon)=F(\rho,\varphi), \qquad (\rho,\varphi)\in D, \tag{1}$$

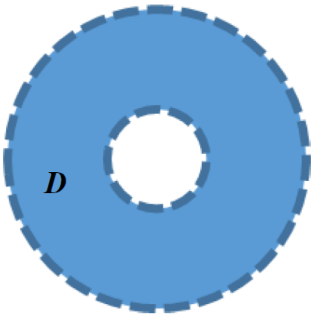
$$v(1,\varphi,\varepsilon)=\psi_1(\varphi), \quad v(a,\varphi,\varepsilon)=\psi_2(\varphi), \quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{2}$$

мында ε – кичине параметр, $D=\{(\rho,\varphi)\,|\,1<\rho<a, 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $n\in N$, $F\in C^\infty(\bar D)$, $\psi_k\in C^\infty[0, 2\pi]$, k = 1, 2.

(1)- экинчи тартиптеги эки өзгөрүлмөлүү сызыктуу, бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме, мында $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ – Лапластын уюлдук координаталар ситстемасындагы оператору, $\sqrt[n]{\rho-1}$ – теңдеменин потенциалы, n – тамырдын көрсөткүчү.

(2)- Дирихленин чектик шарттары.

Дирихленин маселеси: D алкакта (1- сүрөт) (1)- теңдемени канааттандырып, $\rho=1, 0\le\varphi\le 2\pi$ *жана* $\rho=a$, $0\le\varphi\le 2\pi$ чектик айланаларда, тиешелүү түрдө, берилген $\psi_1(\varphi)$ *жана* $\psi_2(\varphi)$, $\varphi\in[0,2\pi]$ функцияларга барабар боло тургандай $v(\rho,\varphi,\varepsilon)$ белгисиз функцияны табуу.



1- сүрөт

Негизги жыйынтык

1-теорема. Дирихленин (1), (2) маселесинин чыгарылышы жашайт жана жалгыз.

Далилдөө. Ыңгайлуу болушу үчүн (2)- бир тектүү эмес чек аралык шарттарды бир тектүүгө алып келебиз. Ал үчүн төмөнкү өзгөртүп түзүүнү аткарабыз

$$v(\rho,\varphi,\varepsilon)=u(\rho,\varphi,\varepsilon)+\frac{\psi_2(\varphi)(\rho-1)+\psi_1(\varphi)(a-\rho)}{a-1},$$

анда (1), (2) маселе төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}\,u(\rho,\varphi,\varepsilon)=f(\rho,\varphi,\varepsilon), \qquad (\rho,\varphi)\in D, \tag{3}$$

$$u(1,\varphi,\varepsilon)=0, \quad u(a,\varphi,\varepsilon)=0, \quad \varphi\in[0,2\pi], \tag{4}$$

мында

$$f(\rho,\varphi,\varepsilon)=F(\rho,\varphi)+\sqrt[n]{\rho-1}\,\frac{\psi_2(\varphi)(\rho-1)+\psi_1(\varphi)(a-\rho)}{a-1}-$$
$$-\frac{\varepsilon(\psi_2(\varphi)-\psi_1(\varphi))}{\rho(a-1)}-\frac{\varepsilon(\psi''_2(\varphi)(\rho-1)+\psi''_1(\varphi)(a-\rho))}{\rho^2(a-1)}.$$

Эгерде (3), (4) маселе жалгыз чыгарылышка ээ болсо, анда (1), (2) маселенинда чыгарылышы да жашайт жана ал жалгыз болот.

(3), (4) маселенин жалгыз гана чыгарылышынын жашашын дифференциалдык барабарсыздыктар усулу менен далилдейбиз, [5]-[6]. Керектүү аныктамаларды эске салып алабыз.

1- аныктама. Эгерде $u^{\mathrm{T}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ функциялары төмөнкү (5) жана (6) барабарсыздыктарды канааттандырышса, анда бул функциялар тиешелүү түрдө *төмөнкү* жана *жогорку* чыгарылыштары деп аталат

$$Lu^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\ge 0,\quad Lu^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le 0,\quad (\rho,\varphi)\in D, \tag{5}$$

$$u^{T}(1,\varphi,\varepsilon)\le 0\le u^{Ж}(1,\varphi,\varepsilon),\ u^{T}(a,\varphi,\varepsilon)\le 0\le u^{Ж}(a,\varphi,\varepsilon),\ \ \varphi\in[0,2\pi],\ 0<\varepsilon<<1, \tag{6}$$

мында L оператору: $Lu\equiv\varepsilon\Delta u(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}u(\rho,\varphi,\varepsilon)-f(\rho,\varphi,\varepsilon)$.

Бизге [5]-[6] жумуштан белгилүү болгондой, эгерде төмөнкү (7) барабарсыздыкты канааттандырган $u^{\mathrm{T}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ төмөнкү жана $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жогорку чыгарылыштар жашаса,

$$u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\bar{D}, \tag{7}$$

анда (3), (4) маселенин $u(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылышы жашайт жана ал чыгарылыш төмөнкү барабарсыздыктарды канааттандырат:

$$u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u(\rho,\varphi,\varepsilon)\le u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon),\quad (\rho,\varphi)\in\bar{D}. \tag{8}$$

Ошондуктан, алгач төмөнкү $u^{\mathrm{T}}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштарды тургузабыз.

Мейли $u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)=-\dfrac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2),\ \ u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)=\dfrac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2)$ болсун, мында $M=\max\limits_{\bar{D}}\left|\dfrac{2\varepsilon f\ \ \rho,\varphi,\varepsilon}{4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}}\right|,\ 0<\varepsilon<<1.$

Анда $(\rho,\varphi)\in D,\ 0<\varepsilon<<1$ болгондо төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз:

$$Lu^{T}\equiv\varepsilon\Delta u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}u^{T}(\rho,\varphi,\varepsilon)-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon\left(\frac{M}{\varepsilon}+\frac{M}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt[n]{\rho-1}(2a^2-\rho^2)M-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=\ 4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}\ \ \frac{M}{2\varepsilon}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=\frac{4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}}{2\varepsilon}\left(M-\frac{2\varepsilon f(\rho,\varphi,\varepsilon)}{4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}}\right)\ge 0\qquad\Rightarrow Lu^{T}\ge 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D\,;$$

$$Lu^{Ж}\equiv\varepsilon\Delta u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)-\sqrt[n]{\rho-1}u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=-\varepsilon\left(\frac{M}{\varepsilon}+\frac{M}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt[n]{\rho-1}(2a^2-\rho^2)M-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=-\ 4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}\ \ \frac{M}{2\varepsilon}-f(\rho,\varphi,\varepsilon)=$$
$$=-\frac{4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}}{2\varepsilon}\left(M-\frac{2\varepsilon f(\rho,\varphi,\varepsilon)}{4\varepsilon+(2a^2-\rho^2)\sqrt[n]{\rho-1}}\right)\le 0\Rightarrow Lu^{Ж}\le 0,\ \ (\rho,\varphi)\in D\,.$$

Биздин төмөнкү $u^{Т}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар үчүн (5) шарттар орун алат экен. Эми (6) шарттарды текшеребиз:

$$u^{T}(1,\varphi,\varepsilon)=-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-1),\;\; u^{Ж}(1,\varphi,\varepsilon)=\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-1)\,;$$

$$u^{T}(a,\varphi,\varepsilon)=-\frac{M}{2\varepsilon}a^2,\;\; u^{Ж}(1,\varphi,\varepsilon)=\frac{M}{2\varepsilon}a^2\,;$$

бул туюнтмаларды салыштырып төмөнкү барабарсыздыктарды алабыз

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-1)\le 0\le\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-1);\;\; -\frac{M}{2\varepsilon}a^2\le 0\le\frac{M}{2\varepsilon}a^2.$$

Демек, (4)шарттар дагы аткарылат экен.

(5) барабарсыздык дагы орун алат, себеби

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2)\le\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2),\; (\rho,\varphi)\in\bar{D}.$$

Биз тандап алган төмөнкү $u^{Т}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ жана жогорку $u^{Ж}(\rho,\varphi,\varepsilon)$ чыгарылыштар (5), (6) жана (7) шарттарды канааттандыргандыгы үчүн (3), (4) маселенин чыгарылышынын жашашы келип чыгат. Чыгарылыштын жалгыздыгын көрсөтүү үчүн $f(\rho,\varphi)\equiv 0$ болгондо, $u(\rho,\varphi,\varepsilon)\equiv 0$ дун келип чыгышын байкоо жетиштүү болот.

(8) барабарсыздык төмөнкү көрүнүшкө келет:

$$-\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2)\le u(\rho,\varphi,\varepsilon)\le\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-\rho^2),\; (\rho,\varphi)\in\bar{D},$$

бул акыркы барабарсыздыктан (3), (4) маселенин чыгарылышы үчүн төмөнкү баа келип чыгат:

$$|u(\rho,\varphi,\varepsilon)|\le\frac{M}{2\varepsilon}(2a^2-1),\; (\rho,\varphi)\in\bar{D},\; 0<\varepsilon<<1.$$

1-теорема далилденди.

Каралып жаткан (1), (2) Дирихленин алкак үчүн маселеси эки (кош) өзгөчөлүккө ээ:

1) ε кичине параметрдин (1)- теңдемеде жогорку туундулардын астында катышып жаткандыгы. Баарыбызга белгилүү болгондой, мындай теңдемени сингулярдык козголгон дифференциалдык теңдеме деп атайбыз. Себеби, эгерде формалдуу түрдө ε кичине параметрдин маанисин нөл деп алсак, б.а. ε=0, анда (1)- ден төмөнкү пределдик теңдеме келип чыгат

$$-\sqrt[n]{\rho-1}v(\rho,\varphi,0)=F(\rho,\varphi),\qquad (\rho,\varphi)\in D$$

бул теңдеменин чыгарылышы (2)- чек аралык шартты канааттандырбайт.

2) пределдик теңдеменин чыгалышы

$$v(\rho,\varphi,0)=-\frac{F(\rho,\varphi)}{\sqrt[n]{\rho-1}}$$

болот, жана бул функция $(\rho,\varphi)\in\bar{D}$ аймагында дифференцирленбөөчү болот.

Ушул өзгөчөлүктү тышкы асимптотикалык чыгарылышка таасирин изилдейбиз. Кичине параметр усулун колдонуп, (1)-(2) маселенин тышкы асимптотикалык чыгарылышын төмөнкү көрүнүштө изилдейбиз:

$$V(\rho,\varphi,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k(\rho,\varphi)\,,\; \varepsilon\to 0. \; (9)$$

(9)- катарды (1)- теңдемеге алып барып коебуз:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\;\; \Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)-\sqrt[n]{\rho-1}v_k(\rho,\varphi)\;\; -\sqrt[n]{\rho-1}v_0(\rho,\varphi)=F(\rho,\varphi),\qquad (\rho,\varphi)\in D\,.$$

Бул жерден төмөнкү катыштарды алабыз:

$$-\sqrt{\rho-1}\,v_0(\rho,\varphi)=f(\rho,\varphi),\quad \sqrt{\rho-1}\,v_k(\rho,\varphi)=\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi),\; k\in N\,.$$

жана белгисиз $v_k(\rho,\varphi)$ функцияларын аныктайбыз:

$$v_0(\rho,\varphi) = -\frac{f(\rho,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}}, \quad v_k(\rho,\varphi) = \frac{\Delta v_{k-1}(\rho,\varphi)}{\sqrt{\rho-1}},\ k \in N.$$

Мындан $v_k(\rho,\varphi)$ функцияларын төмөнкү көрүнүштө жазып алабыз:

$$u_k(\rho,\varphi) = O\left((\rho-1)^{-(5k+1)/2}\right),\ \rho \to 1,\ k \in N_0 = 0,1,2,...$$

Ошондуктан (9) барабардыкты төмөнкү көрүнүштө жазууга болот:

$$U(\rho,\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\rho-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{(\rho-1)^5}}\right)^k F_k(\rho,\varphi),\ \varepsilon \to 0, F_k \in C^{\infty}(\bar{D}), k = 0,1,2,...$$

Корутунду

Демек, (1)-(2) маселенин чыгарылышы жалгыз экен. (9)-катар (1), (2) маселенин $\{(\rho,\varphi)| 1+\varepsilon^{2/5} < \rho < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ аймактагы гана чыгарылышы болот экен, жана бул чыгарылыш $\rho = a$ айланада $u(a,\varphi,\varepsilon) = \psi_2(\varphi)$ шарттын канааттандырбайт. Мындан сырткары $\{(\rho,\ \varphi)| 1 \le \rho \le 1+\varepsilon^{2/5},\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ аймакта (9) катар асимптотикалык мүнөзүн жоготот, б.а. асимптотикалык катар боло албайт.

Адабияттар:

1. Коул, Дж. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1972. – 276 с.
2. Levinson, N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+Au_x+Bu_y+Cu=D$ for small ε // Ann. of Math. 1950. V. 51. P. 428–445.
3. Eckhaus, W. Asymptotic analysis of singular perturbations // North-Holland publishing company- Amsterdam-New-York, Oxford. - 1979. - V. 9. –287p.
4. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с
5. Andrica Dorin, M. Rassias, Differential and Integral Inequalities. Springer. 2019.
6. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Обоснование формальных асимптотических разложений решения бисингулярно возмущенных задач // Вестник ОшГУ. № 4 (4). 2015. – С. 20-27.