УДК: 514.75

E_4 МЕЙКИНДИГИНДЕГИ ЭКИ ЧЕНЕМДҮҮ Δ_2 БӨЛҮШТҮРҮҮСҮНӨ БИРИКТИРИЛГЕН ИЙРИ ЖӨНҮНДӨ
О ПРИСОЕДИНЕННОЙ КРИВОЙ ДВУМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_2 В ПРОСТРАНСТВЕ E_4
ABOUT JOINT CURVE OF 2-DIMENSIONAL DISTRIBUTION Δ_2 IN THE SPACE E_4

Папиева Т.М., Мустапакулова Ч.А.
ОШМУ

Аннотация: *Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы присоединённая кривая к двумерному распределению Δ_2 в пространстве E_4 являлась эллипсом в случае, когда распределения Δ_2 и ему ортогонально дополнительное распределение $\overline{\Delta}_2$ – минимальные.*

Аннотация: *E_4 мейкиндигинде берилген эки ченемдүү Δ_2 бөлүштүрүүсү жана анын ортогоналдык толуктоочусу $\overline{\Delta}_2$ минималдык болгон учурда Δ_2 бөлүштүрүүсүнөбириктирилген ийринин эллипс болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.*

Abstract: *Necessary and sufficient conditions in order that the joint curve of 2-dimensional distribution Δ_2 is ellipse in the case when the Δ_2 and the orthogonal – complementary distribution $\overline{\Delta}_2$ are minimal.*

Ключевые слова: *распределение, минимальное распределение, евклидово протсранство, присоединённая кривая.*

Ачкыч сөздөр: *бөлүштүрүү, евклиддик мейкиндик, бөлүштүрүүгө бириктирилген ийри, минималдык бөлүштүрүү.*

Key words: *Euclidean space, distribution, minimal distribution, joint curve.*

Пусть 4-мерноеевклидово пространство E_4 отнесено к подвижному реперу $\Re = (x, \vec{e}_A), (A, B, C = 1, ..., 4)$. Деривационные формулы репера $\Re$ имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A,\ d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B. \tag{1}$$

Формы ω^A, ω_A^B удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики:

$$dg_{AB} = g_{AK}\omega_B^K + g_{KB}\omega_A^K,$$

где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ – ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_4 и структурным уравнениям:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A,\ D\omega_A^B = \omega_A^K \wedge \omega_K^B.$$

Контравариантные компоненты g^{BK} метрического тензора g_{AB} определяются из соотношения

$$g_{AB} g^{BK} = \delta_A^K \tag{2}$$

где δ_A^K – символ Кронекера.

Рассмотрим в области Ω пространства E_4 распределение Δ_2 и ортогонально дополнительное к нему распределение $\bar{\Delta}_2$. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ репера $\Re$ расположим в плоскости $\Delta_2(x)$, а векторы $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ в плоскости $\bar{\Delta}_2(x)$, где $x \in \Omega$. При этом дифференциальные уравнения Δ_2 будут:

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iA}^\alpha \omega^A, (i, j, k = 1,2; \alpha, \beta, \gamma = 3, 4), \tag{3}$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_2(x)$, то

$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha A}^i \omega^A. \tag{4}$$

В нашем репере $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, следовательно

$$g_{i\alpha} \cdot g_{\alpha i} = 0. \tag{5}$$

В силу равенств (5) из соотношений (2) получим:

$g^{i\alpha} = g^{\alpha i} = 0,$

и, следовательно

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k, \; g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma. \tag{6}$$

Из соотношений (6) получаем:

$$dg^{ij} = -\left(g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i\right), \tag{7}$$

$$dg^{\alpha\beta} = -\left(g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta + g^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha\right). \tag{8}$$

Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$ имеем:

$$\omega_\alpha^i = -g^{ik}\omega_k^\beta g_{\beta\alpha}, \; \omega_i^\alpha = -g_{ij}\omega_\beta^j g^{\beta\alpha}. \tag{9}$$

Система величин $\left\{\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha\right\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_2 [1]. При этом компоненты $\Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{i\beta}^\alpha$ образуют тензоры в отдельности. Тензор Λ_{ij}^α в общем случае не симметричен по индексам i, j. Величины

$$H_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ij}^\alpha, -\Lambda_{ji}^\alpha\right)$$

образуют тензор.

Векторы

$$\overrightarrow{M}_2 = \frac{1}{2} g^{ij} \Lambda_{(ij)}^\alpha \vec{e}_\alpha; \tag{10}$$

$$\overline{\overline{M}}_2 = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \Lambda_{(\alpha\beta)}^i \vec{e}_i. \tag{11}$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_2 и $\overline{\Delta}_2$ соответственно (рисунок 1).

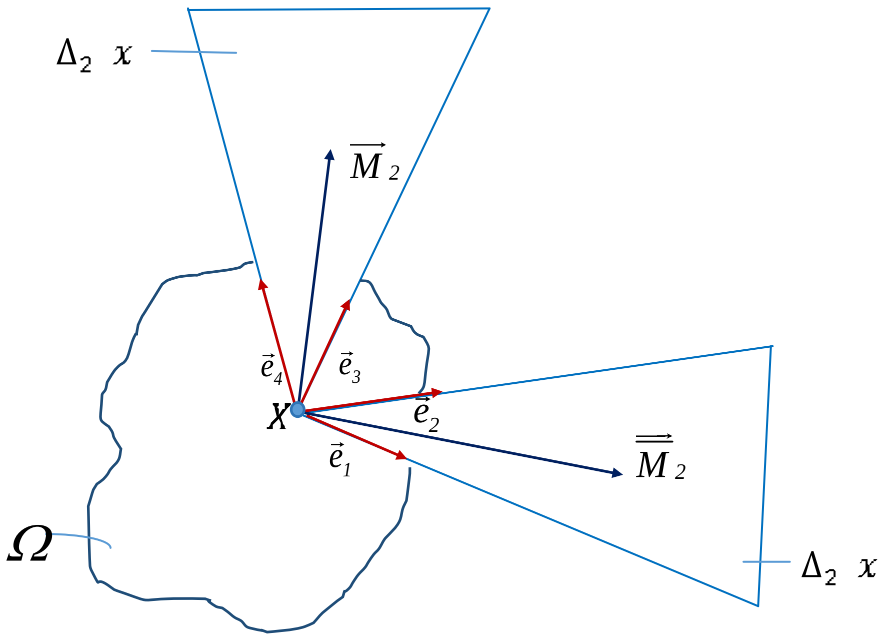

Рисунок 1.

Если вектор средней кривизны распределения равен нулю, то распределение называется минимальным [2].

Рассмотрим случай, когда распределение Δ_2 и $\overline{\Delta}_2$ – минимальны одновременно. Будем считать, что репер $\Re$ пространства E_4 ортонормированным. Интегральные линии ω^A векторных полей $\vec{e}_A$ образуют ортогональную сеть Σ_4 в пространстве E_4. Так как сеть Σ_4 ортогональная, то имеем

$$a_{AK}^{B} = -a_{BK}^{A} \quad (A,B,K = 1,2,3,4) \tag{12}$$

В силу (12) условия минимальности распределений Δ_2, $\overline{\Delta}_2$ примут вид:

$$a_{11}^{3} + a_{22}^{3} = 0, \quad a_{11}^{4} + a_{22}^{4} = 0, \tag{13}$$

$$a_{33}^{1} + a_{44}^{1} = 0, \quad a_{33}^{2} + a_{44}^{2} = 0, \tag{14}$$

соответственно. Уравнение присоединенной (фокусной) кривой распределения Δ_2 имеет вид[3]:

$$\begin{aligned}&\left(a_{11}^{3}a_{22}^{3} - a_{12}^{3}a_{21}^{3}\right)\left(y^{3}\right)^{2} + \left(a_{11}^{4}a_{22}^{4} - a_{12}^{4}a_{21}^{4}\right)\left(y^{4}\right)^{2} + \\ &+\left(a_{11}^{4}a_{22}^{3} + a_{11}^{3}a_{22}^{4} - a_{12}^{3}a_{21}^{4} - a_{21}^{3}a_{12}^{4}\right)y^{3}y^{4} - \left(a_{11}^{3} + a_{22}^{3}\right)y^{3} - \\ &-\left(a_{11}^{4} + a_{22}^{4}\right)y^{4} + 1 = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Уравнение присоединенной (фокусной) кривой распределения $\overline{\Delta}_2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}&\left(a_{33}^{1}a_{44}^{1} - a_{34}^{1}a_{43}^{1}\right)\left(y^{1}\right)^{2} + \left(a_{33}^{2}a_{44}^{2} - a_{34}^{2}a_{43}^{2}\right)\left(y^{2}\right)^{2} + \\ &+\left(a_{33}^{1}a_{44}^{2} + a_{33}^{2}a_{44}^{1} - a_{34}^{1}a_{43}^{2} - a_{34}^{2}a_{43}^{1}\right)y^{1}y^{2} - \left(a_{33}^{2} + a_{44}^{2}\right)y^{2} + 1 = 0\end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая(13) уравнение (15) напишем в виде

$$\left(\left(a_{11}^{3}\right)^{2}-a_{12}^{3}a_{21}^{3}\right)\left(y^{3}\right)^{2}+\left[\left(a_{11}^{4}\right)^{2}-a_{12}^{4}a_{21}^{4}\right]\left(y^{4}\right)^{2}+$$
$$+\left(a_{11}^{4}a_{22}^{3}+a_{11}^{3}a_{22}^{4}-a_{12}^{3}a_{21}^{4}-a_{21}^{3}a_{12}^{4}\right)y^{3}y^{4}+1=0.$$

или

$$\begin{gathered}\left[a_{12}^{3}a_{21}^{3}+\left(a_{11}^{3}\right)^{2}\right]\left(y^{3}\right)^{2}+\left(a_{12}^{3}a_{21}^{4}+a_{21}^{3}a_{12}^{4}-\right.\\ \left.-a_{11}^{4}a_{22}^{3}-a_{11}^{3}a_{22}^{4}\right)y^{3}y^{4}+\left[a_{12}^{4}a_{21}^{4}+\left(a_{11}^{4}\right)^{2}\right]\left(y^{4}\right)^{2}=1\end{gathered} \tag{17}$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$a_{12}^{3}a_{21}^{3}+\left(a_{11}^{3}\right)^{2}>0, \tag{а}$$

$$a_{12}^{4}a_{21}^{4}+\left(a_{11}^{4}\right)^{2}>0, \tag{б}$$

$$a_{12}^{3}a_{21}^{4}+a_{21}^{3}a_{12}^{4}-a_{11}^{4}a_{22}^{3}-a_{11}^{3}a_{22}^{4}=0. \tag{в}$$

Тогда присоединенная кривая распределение Δ_2 является эллипсом.

Обратно, если уравнение (17) определяет эллипс, то следует, что выполняются условия (а), (б). (в).

Геометрический смысл условий (а), (б). (в) заключаются в следующем соответственно:

$$\vec{\Lambda}'_{12}\cdot\vec{\Lambda}'_{21}+\vec{\Lambda}'^{2}_{11}>0, \tag{а'}$$

$$\vec{\Lambda}''_{12}\cdot\vec{\Lambda}''_{21}+\vec{\Lambda}''^{2}_{11}>0, \tag{б'}$$

$$\vec{\Lambda}^{*}_{12}\cdot\vec{\Lambda}^{**}_{21}-\vec{\Lambda}'_{11}\cdot\vec{\Lambda}^{*}_{22}=0, \tag{в'}$$

где

$$\vec{\Lambda}'_{12}=np_{\left(x,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)}\vec{\Lambda}_{12}=a_{12}^{2}\vec{e}_2+a_{12}^{3}\vec{e}_3,$$

$$\vec{\Lambda}'_{21}=np_{\left(x,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)}\vec{\Lambda}_{21}=a_{21}^{3}\vec{e}_3,$$

$$\vec{\Lambda}^{*}_{21}=np_{\left(x,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)}\vec{\Lambda}_{21}=a_{21}^{3}\vec{e}_3+a_{21}^{4}\vec{e}_4,$$

$\vec{\Lambda}^{**}_{21}=a_{21}^{4}\vec{e}_3+a_{21}^{3}\vec{e}_4-$ вектор, симметричный вектору $\vec{\Lambda}^{*}_{21}$ относительно биссектрисе угла $\left(\vec{e}_3\,\hat{,}\,\vec{e}_4\right)$.

$$\vec{\Lambda}'_{11}=np_{\left(x,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)}\vec{\Lambda}_{11}=a_{11}^{3}\vec{e}_3+a_{11}^{4}\vec{e}_4,$$

$$\vec{\Lambda}'_{22}=np_{\left(x,\vec{e}_3,\vec{e}_4\right)}\vec{\Lambda}_{22}=a_{22}^{3}\vec{e}_3+a_{22}^{4}\vec{e}_4,$$

$\vec{\Lambda}^{*}_{22}=a_{22}^{4}\vec{e}_3+a_{22}^{3}\vec{e}_4-$ вектор, симметричный вектору $\vec{\Lambda}'_{22}$, относительно биссектрисе угла $\left(\vec{e}_3\,\hat{,}\,\vec{e}_4\right)$

$$\vec{\Lambda}_{12}=d_2\vec{e}_1,\quad \vec{\Lambda}_{21}=d_1\vec{e}_2,\quad \vec{\Lambda}_{11}=d_1\vec{e}_1,\quad \vec{\Lambda}_{22}=d_2\vec{e}_2,$$

где $d_i -$ символ дифференцирования вдоль линии ω^i.

Из вышеизложенного следует

Теорема. Присоединенная кривая к распределению Δ_2 является эллипсом тогда и только тогда, когда выполнены условия: (а), (б), (в).

Литература:

1. *Лаптев Г. Ф.* Распределения касательных элементов / Труды Геом. семинара, 1971, т. 3. С. 29-48.
2. *Кузьмин М. К.* Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n и их обобщения / В кн. Проблемы геометрии.–Все союз. ин-т науч. итехн. информ.,том 7. – Москва, 1975. С. 215-229.
3. Матиева Г. Геометрия p-распределения в евклидовом n-пространстве: диссертация кандидата физ.-мат. наук / Г.Матиева, 1985. 105 с.