УДК: 517.5:517.91

ФУНКЦИЯЛЫК ӨЗҮ МАМИЛЕЛЕШТИКТЕРИ БОЛГОН ОБЪЕКТТЕРДИН КАТЕГОРИЯСЫ
КАТЕГОРИЯ ОБЪЕКТОВ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ
CATEGORY OF OBJECTS WITH FUNCTIONAL RELATIONS

Кененбаева Г.М., КНУ им. Ж. Баласагына, gylaim@mail.ru
Кененбаев Э., ИМ НАН КР

Аннотация: *Бул макалада өз арафункционалдык байланыштары бар объектилердин категориясынын аныктамасы киргизилген. Бул категориядагы объектилер – аларда аныкталган көп орундуу предикаттардын көптүгү, морфизмдер – көптүктөрдү предикаттардын чындыгын сактаган, өзгөртүүлөр. Негизги шарты: көптүктөрдү, предикат чын болуп тургандай, бир элемент менен толуктоо мүмкүнчүлүгү. Төмөнкү классификация сунушталат: кошумча элементчектүү же чексиз көптүктөн же жалгыз болуш мүмкүн. Мисалдар келтирилген. Мындай өз арафункционалдык байланыштардыкээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн колдонуу көрсөтүлгөн.*

Аннотация: *В статье вводится определение категории объектов с функциональными соотношениями. Объектами в этой категории являются множества с определенными на них многоместными предикатами, морфизмами - такие преобразования множеств, которые сохраняют истинность предикатов. Основное условие: возможность такого пополнения множеств одним элементом, что предикат становится истинным. Предлагается классификация: дополнительный элемент является единственным, из конечного или бесконечного множества. Приведены примеры. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений.*

Annotation: *A definition of category of objects with functional relations is proposed in the paper. Objects of this categoryare sets as domains of multiplace predicates; morphisms are transformations of sets preserving truth of predicates. The main condition: a set can be replenished by one element in such a way that the predicate becomes truth. A certain classification of them is proposed: the additional element is unique; of finite or of infinite set. Examples are given. An application of such relations to investigate some differential equations is demonstrated.*

Ачкыч сөздөр: *дифференциалдык теңдеме, аналитикалык функция.*

Ключевые слова: *категория, множество, объект, морфизм, многоместный предикат, функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, классификация, функция.*

Key words: *category, set, object, morphism, multiplace predicate, functional relation, differential equation, classification, function.*

Введение:

Понятие категории дает возможность единообразно излагать факты, связанные с различными разделами математики. В Кыргызстане первые работы по теории категорий были выполнены М.Я. Медведевым и А.А. Борубаевым. Нами [20-21] предложены определения категории уравнений и ее подкатегорий.

В большинстве работ по теории дифференциальных уравнений рассматривались или решения в целом (гладкие функции, аналитические функции), или значения решений в близких точках (для приближенных методов), имелись отдельные результаты, где использовались значения функций в отдаленных точках. В [14] была предложена аксиоматика для функций, у которых значения в различных точках связаны. В [22] -применение функциональных соотношений для приближенных вычислений.

В настоящей статье

- вводится аксиоматика для множеств, у которых различные элементы связаны между собой, и определяется категория таких объектов;

- проводится классификация наборов связанных между собой элементов множеств: наборы из бесконечного и конечного количества значений; полностью определенные наборы и частично определенные наборы, а также соответствующая классификация дифференциальных уравнений и описание возможности применения функциональных соотношений для решения.

1. Определение категории объектов с функциональными соотношениями

Определение 1. Вводится категория Rel-Set. Ее объектами являются множества Mс определенными на них n-местными симметрическими предикатамиP (и, возможно, дополнительными $(n-1)$-местными симметрическими предикатами Q при $n>2$), $n\geq 2$.

Выполняются следующие условия:

Если два из $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ равны между собой, то $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = *«ложь»;*

Для любых(или таких, что «$Q(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$»)различных между собой$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in M$ ссуществует такое $x_n \in M$, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ = *«истина».*

Морфизмами являются такие взаимно-однозначные преобразования множеств M, что предикат P сохраняет свое значение.

В том случае, когда такое $x_n \in M$единственно, будем обозначать подкатегорию, как Rel-Set-1.

В том случае, когда такое $x_n \in M$выбирается из конечного множества, будем обозначать подкатегорию, как Rel-Set-f.

В том случае, когда такое $x_n \in M$выбирается из бесконечного множества, будем обозначать подкатегорию, как Rel-Set-i.

Функции $f{:}X\rightarrow Y$можно рассматривать, как множества пар $\{x=(u, f(u)){:}u\in X\}$. Тогда Определение 1 переходит и на функции.

Соответственно, определяются подкатегории Rel-Func-1,Rel-Func-fи Rel-Func-i.

2. Примеры объектов с замыкающим элементом из бесконечного множества

Пример 1. Rel-Set-i. Объекты - $(n-2)$-мерные гиперплоскости в пространстве R^{n-1}.

$P(x_1, \ldots , x_n)$=”точки $x_1, \ldots , x_n$ лежат на одной$(n-1)$-мерной гиперплоскости*”.*

В частности, при $n=4$: «данные четыре различных точки изR^3лежат на одной плоскости».

Морфизмы - линейные невырожденные преобразования пространства.

Пример 2. Rel-Func-i. Объекты - графики многочленов $(n-2)$-степени на плоскостиR^2.Обозначим $x_i =(u_i, v_i)$.

$Q(x_1, \ldots , x_{n-1})$=”абсциссыu_iвсех точек различные*»;*

$P(x_1, \ldots , x_n)$ = “существует такой многочлен$W(u)$$(n-2)$-степени, что $v_i =W(u_i)$, $i =1,\ldots,n$*”.*

Этот предикат можно выписать в явном виде с помощью многочлена Лагранжа.

В частности, при $n=3$:

$P(x_1,x_2, x_3)$= «данные три точки изR^2- различные и лежат на одной прямой».

Морфизмы - линейные преобразования отдельно по оси абсцисс и отдельно по оси ординат.

Пример 3. Rel-Set-i. Объекты - окружности на плоскости R^2, $n=4$.

$Q(x_1,x_2, x_3)$=” точки не лежат на одной прямой*»;*

$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$= “ точки лежат на одной окружности*”.*

Этот предикат можно выписать в явном виде, через равенство вписанных углов.

Морфизмы - повороты и сдвиги плоскости.

Пример 4. Rel-Set-i. Объекты - сферы в пространстве R^3, $n=5$.

$Q(x_1,x_2, x_3,x_4)$=” точки не лежат в одной плоскости”*;*

$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$= “ точки лежат на одной сфере”.

Морфизмы - повороты и сдвиги пространства.

3. Примеры объектов с замыкающим элементом из конечного множества

Пример 5. Rel-Func-f. См. Пример 2. Дополнительное условие: «точки можно перенумеровать так, что расстояния между абсциссами равны». Тогда еще одну точку можно добавить двумя способами.

Пример 6.Rel-Func-1. Положим $M=R^3= R^2\times R$, $n=4$; $u_i\in R^2$, $v_i\in R$.
$Q(x_1,x_2, x_3)=$" точкиu_1,u_2, u_3образуют прямоугольный треугольник";
$P(x_1, x_2, x_3, x_4)=$ " точки u_1, u_2, u_3, u_4образуют прямоугольники суммы значений v_1, v_2, v_3, v_4на противоположных концах диагоналей равны ".

Этот пример основан на том, что функция двух скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет тождеству А с гейрссона для четырех точек:

Если $f(p,q) \equiv f_1(p)+f_2(q)$, p_1, p_2, q_1, q_2- любые числа, то

$$f(p_1, q_1)+ f(p_2, q_2)\equiv f(p_1, q_2)+ f(p_2, q_1).$$

Морфизмами здесь являются: сдвиги и повороты плоскости R^2и линейные преобразования прямой R. Соответственно, последнее равенство меняет свой вид.

Следующие примеры аналогичны, поэтому выпишем только соответствующие предикаты.

Пример 7.Функция mскалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет аналогичному тождеству А с гейрссона для четырех точек, которые образуют прямоугольник, какие-либо две противоположные стороны которого параллельны одной из осей координат.

Пример 8.Известно, что функция mскалярных переменных - сумма функций от меньшего числа переменных каждая -

$$f(u_1,\dots,u_m)= g_1(u_2,\dots, u_m)+ \dots + g_q(u_1,\dots, u_{q-1}, u_{q+1},\dots, u_m) + \dots + g_m(u_1,\dots,u_{m-1}),$$

удовлетворяет обобщенному тождеству Асгейрссона для 2^m точек.

Например, для $m=3$: пусть $u_1,u_2 ,u_3,u_4,u_5 , u_6$ - любые числа, тогда

$$f(u_1,u_2 ,u_3)- f(u_1,u_2 , u_6)- f(u_1,u_5 , u_3)+ f(u_1,u_5 , u_6) -$$
$$- f(u_4,u_2 , u_3)+f(u_4,u_2 , u_6)+ f(u_4,u_5 , u_3)- f(u_4,u_5 , u_6)= 0.$$

3. Классификации дифференциальных уравнений

Обзор литературы показывает, что единообразие в терминологии имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений и для дифференциальных уравнений в частных производных с количеством переменных не более двух и порядка не выше второго.

В работах [2], [3], [5], [6], [12], [15], [16], [17], [18], [19] и других предлагается классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных по их записи, и рассматриваются такие преобразования, которые не меняют, хотя и упрощают вид записи. В [20], [21] предложено классифицировать уравнения по свойствам их решений, даже если они принадлежат к различным типам.

Рассмотрим примеры возникновения и применения функциональных соотношений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пример 9. См. Пример 2 и Пример 5. Рассмотрим уравнение $y^{(k)}(x)=0$. Его решение - многочлен $(k-1)$ порядка. Его значения можно находить для любого $h>0$ последовательно по формуле:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j (-1)^{j+k} y(x-jh).$$

Этот пример ставит задачу о классах обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых можно последовательно находить решения аналогичными способами.

Пример 10.Связь между значениями решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения в различных точках получил C. J. delaValléePoussin(см. например [1]): уравнение

$$y^{(n)}(u)+p_1(u)\, y^{(n-1)}(u)+\dots+ p_n(u)\, y(u) = 0, \quad a\le u\le b, p_k(u)\in C[a,b],$$

с условиями $y(u_i) = c_i$, $i=1,\dots, n$имеет единственное решение при ограничении

$$\| p_1\|_{[a,b]}(b-a)+ \| p_2\|_{[a,b]} (b-a)^2/2!+\dots + \| p_n\|_{[a,b]} (b-a)^n/n! < 1.$$

Дифференциальные уравнения в частных производных

Пример 11. См. Пример 6. Когда стороны прямоугольника параллельны осям координат, данные объекты соответствуют решениям уравнения $\frac{\partial^2 w \ u_1, u_2}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$.

При повороте плоскости на 45^0данные объекты соответствуют решениям уравнения $\frac{\partial^2 w \ u_1, u_2}{\partial u_1{}^2} = \frac{\partial^2 w \ u_1, u_2}{\partial u_2{}^2}$.

Таким образом, морфизмы также являются морфизмами уравнений.

3. Заключение

Примеры, приведенные в настоящей статье, показывают, что введенные категории объединяют объекты из различных разделов математики, имеющие аналогичные свойства. Также, в различных разделах теории дифференциальных уравненийдоказывались и использовались отдельные функциональные соотношения, но не была проведена их классификация, они не использовались систематически для получения новых результатов. Предлагается разработать теорию и методику применения функциональных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1959. - 164 с.
3. Векуа И.Н. Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 2. – Москва: Советская энциклопедия, 1979. – С. 311-318.
4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – Глава III. Построение целой функции с заданными элементами, с. 212-259; Глава V. Уравнения в конечных разностях, с. 307-398.
5. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
6. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Кененбаева Г. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.
10. Комленко Ю.В. Характеристика. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 5. – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – С. 753-755.
11. Курант Р., Гильберт Р. Методы математической физики, 2-е издание. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1951. – 544 с.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высшая школа, 1977. – 431 с. – Глава 8. Уравнения и краевые задачи. – С. 157-173.
13. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
14. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
15. Рождественский Б.Л. Гиперболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 1. – Москва: Советская энциклопедия, 1977. – С. 992-993.
16. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. –

Москва: Наука, 1964. – 208 с. – Глава II. Классификация уравнений второго порядка. – С. 33-46.
17. Солдатов А.П. Параболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 4. – Москва: Советская энциклопедия, 1984. – С. 195.
18. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4-е издание. – Москва: Наука, 1972. – 288 с. – Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. – С. 11-22.
19. Благовещенский А. С. О характеристической задаче для ультра гиперболического уравнения. Математический сборник, 63(105):1 (1964). - С. 137–168.
20. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.
21. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Элементы категории корректных уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2019, № 1. - С. 69-74.
22. Kenenbaev E. Functional relations for ordinary and partial differential equations // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2020, No. 1.- pp. 71-75.