УДК: 517.928

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУШЕННОГОУРАВНЕНИИ ИЗ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ӨЗГӨЧӨ КОЗГОЛГОН ЖЫЛУУЛУК ТАРКАЛГАН НАЗАРИЯТТАГЫ ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

ON THE ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF ONE SINGULARLY PERTURBED EQUATION FROM THE THEORY OF HEAT CONDUCTIVITY

Алымкулов К.ОшМУнун профессору
e.mail: **keldibay@mail.ru**
Кожобеков К.Г. ОшМУнун профессору
e.mail: **kudayberdi.kojobekov@oshsu.kg**
Султанова Н.З. - ОГПИ
e.mail: **nasiipa@mail.ru**

Аннотация: Мында жылуулук откөрүүсүндө пайда болгон чектик сингулярдуу козголгон маселенин чечиминин асимптоикасын тургузуу маселеси каралды. Алгач бул маселенин кичине параметр биринчи жакындатылышы классикалык кичине параметр менен катардын өзгөчө чекитине чейин тургузулуп, ангдан соң асимптотикалык катар, бүткүл аймака узартылды. Бүткүл асимптотикалык катарды алуу үчүн Грин функция усулу колдонулду.

Аннотация: Здесь рассматривается сингулярно возмущенная краеваязадача появаляющаяся в теории распространения тепла. Сначал асимптотика первого порядка по малому параметру, строитс методом малого параметра до особой точки ряда, затем этот ряд продолжится на весь отрезок. Чт обы получить полную асимптотик применяется метод функций Грина.

Annotation: A model equation for heat propagation in a sphere with a small parameter is considered. Using the Green's function method, the complete asymptotic behavior of the solution in the asymptotic expansion in the asymptotic succession of the small parameter multiplied by the logarithm of the inverse power of the small parameter is obtained.

Ачкыч сөздөр: Сферадагы жылуулуктун таралышы жөнүндөгү моделдик теңдеме, Грин функциясы усулу.

Ключевые слова: Модельное уравнение для распространение тепла на сфере, метод функции Грина.

Key words: Model equation for heat propagation on a sphere, Green's function method

1. Введение

В [1] рассмотрено следующее модельное уравнения для распространения тепла в сфере с малым параметром и с особой точкой

$$x^2 y'' = \varepsilon yy', \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 0 \tag{1}$$

и была попытка получить асимптотику первого порядка по малому параметру, решения этого уравнения методом сращивания, без обоснования оценки остаточного члена по малому параметру. Здесь мы получим асимптоти ку решения этой задачи любого порядка по малому параметру. Сначала методом сращивания получим асимтотику решения первого порядка, затем методом функции Грина полную асимптотику решения этой задачи.

2. Метод малого параметра

Если искать решение этой задачи в виде

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \ldots, \tag{2}$$

тогда для неопределенных функций $y_0, y_1, y_2, \ldots$

получаем, следующие задачи

$x^2 y_0'' = 0, \qquad y_0(0) = 1, \qquad y_0(1) = 0,$ (3.0)

$x^2 y_1' = y_0 y_0', \qquad y_1(0) = y_1(1) = 0,$ (3.1)

$x^2 y_2' = y_0 y_1' + y_0' y_1, \qquad y_2(0) = y_2(1) = 0,$ (3.2)

$x^2 y_3'' = y_0 y_2' + y_1 y_1' + y_0' y_2, \qquad y_3(0) = y_3(1) = 0,$ (3.3)

……………………………………………………..

$x^2 y_m'' = \sum_{i+j=m-1} y_i y_j', \qquad y_m(0) = y_m(1) = 0.$ (3.m)

Из (3.0) имеем $y_0(x) = a_0 x + b_0$, где a_0, b_0 – произвольные постоянные. Удовлетворяя начальные условия имеем

$y_0(x) = 1 - x,$

Тогда для $y_1(x)$ имеем задачу

$x^2 y_1''(x) = -1 + x, \qquad y_1(0) = y_1(1) = 0$

Отсюда , имеем

$$y_1(x) \sim \ln x,\ y_1'(x) \sim \frac{1}{x}, \qquad x \to 0. \text{(4.1)}$$

Аналогично определяем остальные функции $y_2(x) \sim \frac{1}{2x}$, $y_2'(x) \sim \frac{1}{2x^2}, \qquad x \to 0$ (4.2)

$$y_3(x) = \frac{-1}{3!\cdot 2x^2}, \qquad y_3'(x) = \frac{1}{3!} x^{-3}, \quad x \to 0 \qquad \text{(4.3)}$$

$$y_4(x) = \frac{1}{4!3} x^{-3},\ y_4'(x) = -\frac{1}{4!} x^{-4}, \qquad {}^{-3},\ x \to 0 \qquad \text{(4.4)}$$

$$y_5(x) = -\frac{1}{5!4} x^{-4}, \qquad y_5'(x) \sim \frac{1}{5!} x^{-5}, x \to 0 \qquad \text{(4.5)}$$

………………………………………

$$y_m(x) = \frac{1}{m!(m-1)} x^{-m+1}, \qquad y_m'(x) \sim (-1)^{m-1} \frac{1}{m!} x^{-m},\ x \to 0$$

Таким образом ряд (2) при $x \to 0$ имеет 2 асимптотику

$$y(x) \sim 1 - \varepsilon \ln x + \varepsilon^2 \frac{1}{2x} - \varepsilon^3 \frac{1}{3!2x^3} + \frac{\varepsilon^4}{4!3} x^{-3} + \varepsilon^m (-1)^m \frac{1}{m!(m-1)} x^{-m-1} + \ldots =$$

$$= 1 - \varepsilon \ln x + \frac{\varepsilon^2}{x}\left[1 - \varepsilon \frac{1}{2\cdot 3!x} + \frac{\varepsilon^2}{5\cdot 4!x^2} + \ldots + (-1)^m \frac{\varepsilon^{m-2}}{m-1\ \cdot m!x^{m-2}} + \ldots\right]$$

$$y'(x) \sim -1 + \frac{\varepsilon}{x} - \frac{\varepsilon^2}{2!x^2} + \frac{\varepsilon^3}{3!x^3} - \frac{\varepsilon^4}{4!x^4} + \ldots + \frac{1}{m!}\left(\frac{\varepsilon}{x^m}\right)^m - \varepsilon \ln x + \ldots, \quad x \to 0 \qquad \text{(5)}$$

или

$$y'(x) \sim -e^{-\frac{\varepsilon}{x}} - \varepsilon \ln x, \quad x \to 0 \qquad \text{(5.1)}$$

Очевидно, что это ряд является асимптотическим только на отрезке $[\varepsilon,1]$.

Теорема 1. Решение задачи (1) удовлетворяющее условию $y(1)=0$ является асимптотическим рядом только на полу отрезке $\varepsilon, 1$.

Полное доказательство можно доказать переходя к интергальную уравнению из (1).
Решение (5) является Внешним решением задачи (1).Это решение (5) можно продолжить асимптотически до точки x=0.
Действительно, интегрируя (5.1) имеем

$$y(x) \square -\int_1^x e^{-\frac{\varepsilon}{t}} dt - \int_1^x \varepsilon \ln t dt = 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0 \qquad (6)$$

Дальнейшую асимптотику трудно вычислить этим методом малого параметра. Оказывается, асимптотику этого решения любого порядка этой задачи можно построить методом функции и Грина.

3. Метод функций Грина

Если сделать подстановку в (1)

$$y(x) = 1 + u(x), \qquad (7)$$

то задача (1) приводится к виду

$$\frac{x^2 d^2 u(x)}{dx^2} = \varepsilon(1+u(x))\,u'(x),\ u(0)=0, \quad u(1)=-1. \qquad (8)$$

Решение задачи (8) ищем в виде

$$u(x) = u_0(x,\varepsilon) + u_1(x,\varepsilon) + u_2(x,\varepsilon) + \ldots + u_m(x,\varepsilon) + \ldots\ , \qquad (9)$$

где $u_k(x,\varepsilon)\ (k=1,2,\ldots)$ пока неопределенные функции и они являются асимптотическими последовательностями, т.е.

$$u_{k+1}(x,\varepsilon) = 0(u_k(x,\varepsilon)), \quad \forall x \in [0,1], \quad \varepsilon \to 0.$$

Подставляя (9) в (8) имеем следующие задачи

$$L u_0(x,\varepsilon) = \frac{x^2 d^2 u_0}{dx^2} \ \ \frac{\varepsilon\, du_0(x,\varepsilon)}{dx} = 0,\ u_0(0,\varepsilon) = 0, \quad u_0(1,\varepsilon) = -1 \qquad (10.0)$$

$$L u_1(x,\varepsilon) = \varepsilon\, u_0(x,\varepsilon) \frac{du_0(x,\varepsilon)}{dx}, \quad u_1(0,\varepsilon) = u_0(1,\varepsilon) = 0, \qquad (10.1)$$

$$L u_2(x,\varepsilon) = \varepsilon\, u_0(x,\varepsilon)\ \frac{du_1(x,\varepsilon)}{dx} + \varepsilon \frac{du_0(x,\varepsilon)}{dx}\ u_1(x,\varepsilon),\ u_2(0,\varepsilon) = u_2(1,\varepsilon) = 0, \qquad (10.2)$$

. . . .

$$L u_m(x,\varepsilon) = \sum_{\substack{i+j=m-1\\ i,l\ge 0}} \varepsilon\, u_i(x,\varepsilon) \frac{du_j(x,\varepsilon)}{dx},\ u_m(0,\varepsilon) = u_m(1,\varepsilon) = 0 \qquad (10.m)$$

,

Последовательно решаем эти задачи.
За линейно независимые решения уравнения (10.0) берем

$$X(x) = A\int_0^x e^{-\varepsilon/s} ds, \qquad X(1)=1, \quad X(0)=0, \qquad (11)$$

$$Y(x) = A\int_x^1 e^{-\varepsilon/s} ds, \qquad Y(1)=0, \quad Y(0)=1. \qquad (12)$$

где $A = A(\varepsilon) = e^{-\varepsilon} + \varepsilon\ln\varepsilon + O(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\ln\varepsilon + O(\varepsilon),\ \ \varepsilon \to 0$.
Отсюда

$$Y(x) = 1 + A\int_x^0 e^{-\varepsilon/s}ds = 1 - X(x) \Rightarrow, \qquad (13)$$

$$Y(x) + X(x) = 1. \qquad (14)$$

Нам нужна следующие леммы.
Лемма1: Функция Грина для краевой задачи

$$L\,z(x,\varepsilon) = x^2\,\frac{d^2 z(x,\varepsilon)}{dx^2} - \varepsilon\,z(x,\varepsilon) = 0,\ \ z(0,\varepsilon) = z(1,\varepsilon) = 0 \quad (15)$$

имеет вид

$$G(x,s,\varepsilon) = \begin{cases} C\,X(x)Y(s), & 0 \le x \le s, \\ C\,X(s)Y(x), & s \le x \le 1, \end{cases} \qquad (16)$$

где $C = -A^{-1}$.
Доказательство. Уравнение запишем в симметричном виде

$$Mz(x,\varepsilon) = \frac{d}{dx}\left(e^{\varepsilon/x}\,\frac{dz(x,\varepsilon)}{dx}\right) = 0.$$

По определению функции Грина для краевой задачи (15)

$$G_x(s+0,s,\varepsilon) - G_x(s-0,s,\varepsilon) = e^{-\varepsilon/s}. \quad (17)$$

Поэтому, имеем $C\,[X(s)Y'(s) - X'(s)Y(s)] = C[-AX(s)e^{-\varepsilon/s} - A(s)e^{-\varepsilon/s}Y(s)] =$

$$= -CAe^{-\varepsilon/s}\,[X(s) + Y(s)] = -CAe^{-\varepsilon/s} \overset{(14)}{=} e^{-\varepsilon/s}.$$

Отсюда, получим $C = -A^{-1}$.
Лемма2. Решение неоднородной краевой задачи

$$L\,z(x,\varepsilon) = f(x), \qquad z(0,\varepsilon) = z(1,\varepsilon) = 0, \qquad (18)$$

где $f(x) \in \subset[0,1]$, запишется в виде

$$z(x,\varepsilon) = \int_0^1 G(x,s,\varepsilon)e^{\varepsilon/s}s^{-2}f(s)ds. \qquad (19)$$

Утверждение леммы проверяется подстановкой (19) в уравнение (18).
Решение задачи (10.1) запишется в виде

$$u_1(x,\varepsilon) = \varepsilon\int_0^1 e^{\varepsilon/s}s^{-2}G(x,s,\varepsilon)u_0(s,\varepsilon)u_0'(s,\varepsilon)ds. \quad (20)$$

Очевидно, за решение $u_0(x)$ можно взять, $u_0(x) = -X(x)$, причем $X(x)$ можно переписать в виде

$$X(x) = A\int_0^x e^{-\varepsilon/s}ds = \left|\varepsilon/s = t,\ \ s = \varepsilon\,t^{-1}\right| = -A\varepsilon\int_\infty^{\varepsilon/x} e^{-t}\,\frac{1}{t^2}\,dt.$$

Отсюда

$$X'(x) = Ae^{-\varepsilon/x}x^2\varepsilon^{-2},\ u_0(x) = -A\varepsilon\int_\infty^{\varepsilon/x} e^{-t}t^{-2}dt, \qquad (18)$$

$$u_0'(x) = Ae^{-\varepsilon/x}x^{-2}\varepsilon^{-1}. \quad (19)$$

Поэтому учитывая (18)-(19) выражение (20) запишем в виде

$$u_1(x) = \varepsilon\int_0^1 G(x,s,\varepsilon)e^{\varepsilon/s}s^{-2}u_0(s)u_0'(s)ds = \varepsilon\,C\int_0^x Y(x)X(s)e^{\varepsilon/s}s^{-2}u_0(s)u_0'(s)ds +$$

$$+\varepsilon C\int_x^1 X(x)Y(s)e^{\varepsilon/s}s^{-2}u_0(s)u_0'(s)ds=\left|u_0(x)=-X(x)=-A\int_0^x e^{-\varepsilon/s}ds\right|=$$

$$=\varepsilon\int_0^x Y(x)X(s)s^{-2}u_0'(s)u_0(s)ds+\varepsilon\int_x^1 X(x)Y(s)u_0'(s)s^{-2}u_0(s)ds.$$

$$|u_1(x)|\le\varepsilon\int_0^x X(s)ds+\varepsilon\int_x^1 X(s)s^{-2}ds=\varepsilon\int_0^1 X(s)ds=A\varepsilon^{-1}\int_0^1\int_\infty^{\varepsilon/s}e^{-t}t^{-2}dt\,ds=$$

$$=\left|\frac{\varepsilon}{s}=\rho\right|=-Ae^{-1}\int_\infty^\varepsilon\int_0^\rho e^{-t}t^{-2}dt\,ds=\left|u=-\int_0^\rho e^{-t}t^{-2}dt,\ dv=d\rho,\ v=\rho\right|=$$

$$=-A\rho\varepsilon\int_0^\rho e^{-t}t^{-2}dt\Big|_\infty^\varepsilon+A\varepsilon\int_\infty^\varepsilon e^{-\rho}\rho^{-1}d\rho=A\int_\infty^1 e^{-\rho}\rho^{-1}d\rho+A\int_1^\varepsilon e^{-\rho}\rho^{-1}ds=$$

$=AA^X+A\int_1^\varepsilon(e^{-\rho}-1)\rho^{-1}ds\le-\varepsilon A\ln\varepsilon,$ т.е. имеет место оценка

$$|u_1(x)|\le\left|\int_0^1 X(s)ds\right|\le B=B(s)=A(s)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}. \qquad (21)$$

Для производной функции $u_1(x)$ имеем оценку

$$\left|u_1'(x)\right|\le\left|\varepsilon\int_0^x G_x(x,s,\varepsilon)e^{\varepsilon/s}s^{-2}u_0(s)u_0'(s)ds+\varepsilon\int_x^1 G_x(x,s,\varepsilon)e^{\varepsilon/s}s^{-2}u_0(s)u_0'(s)ds\right|\le$$

$$\le\varepsilon\left|\int_0^x Y'(x)X(s)|u_0(s)|ds\right|+\varepsilon\left|\int_x^1 X'(x)Y(s)|u_0(s)|ds\right|\le\varepsilon\int_0^x X'(x)X(s)ds+$$

$$+\varepsilon\int_x^1 X'(x)X(s)ds\le A\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon/x}x^2\varepsilon^{-2},$$

т.е.

$$\left|u_1'(x)\right|\le A\varepsilon^{-1}\ln\frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon/x}=B(\varepsilon)e^{-\varepsilon/x}x^2, \quad (22)$$

где $B=B(\varepsilon)=A\varepsilon^{-1}\ln\dfrac{1}{\varepsilon}.$

Тепер оценим решение задачи (10.2), его решение представляется в виде

$$u_2(x,\varepsilon)=\varepsilon\int_0^x G(x,s,\varepsilon)e^{\varepsilon/s}s^{-2}\Big[u_0(s,\varepsilon)u_1'(s,\varepsilon)+u_0'(s,\varepsilon)u_1(s,\varepsilon)\Big]ds=$$

$$=\varepsilon C\int_0^x Y(x)X(s)e^{\varepsilon/s}s^{-2}\Big[u_0(s,\varepsilon)u_1'(s,\varepsilon)+u_0'(s,\varepsilon)u_1(s,\varepsilon)\Big]ds+$$

$$+\varepsilon\int_x^1 X(x)Y(s)e^{\varepsilon/s}s^{-2}\Big[u_0(s)u_1'(s)+u_0'(s,\varepsilon)u_1(s,\varepsilon)\Big]ds.$$

Отсюда, используя формулы (18)-(21) и оценивая $u_2(x,\varepsilon)$ имеем

$$|u_2(x,\varepsilon)|\le\int_0^x X(s)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}ds+\int_x^1\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}X(s)\,ds=A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 X(s)\,ds=B^2(\varepsilon).$$

Теперь аналогичная оценка для $u_2'(x,\varepsilon)$ дает

$$\left|u_2'(x,\varepsilon)\right|\le B^2(\varepsilon)x^2e^{-\varepsilon/x}.$$

Далее

$$\left|u_m(x,\varepsilon)\right| \le B^m(\varepsilon),$$

$$\left|u_m'(x,\varepsilon)\right| \le B^m(\varepsilon)x^2e^{-\varepsilon/x}. \quad (23)$$

Таким образом решение (9) и его производная оценивается, следующими асимптотическими рядами

$$\left|u(x,\varepsilon)\right| \le 1 + A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ldots + \left(A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^m + \ldots$$

$$\left|u'(x,\varepsilon)\right| \le \frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\varepsilon/x}x^2\left[A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon} + \left(A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 + \ldots + \left(A(\varepsilon)\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^m + \ldots\right]. \quad (24)$$

Очевидно, что эти ряды являются асимптотическими рядами Пуанкара. Мы даем формальное доказательство следующей теоремы.

Теорема. Решение задачи (1)-(2) можно разложить в асимптотический по асимптотической последовательности

$$\left\{\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right\}^m \quad (m = 0,1,\ldots).$$

Полное доказательство можно провести методом мажоранты.

Использованные источники

1. William Paulsen Fsimptotic analysis and perturbation theory, CRC Press, London, 2014.
2. Алымкулов К. Возмущенные дифференциальные уравнения с особыми точками и некоторые проблемы бифуркационных задач – Бишкек: Илим, 1992. – 108 .с.
3. Alymkulov K and Tursunov T.D Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, , Publisher InTech, 2017.
4. OviduiCiostinAsymptotics and Borelsummability. CRC Press, London, 2009.