

О КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Рычков Б.А. профессор КРСУ им.Б.Ельцина, г. Бишкек, Кыргызская Республика, 720000, ул. Киевская, 44, e-mail: rychkovba@mail.ru

Аннотация. На основе известной аналитической зависимости между минимальным и максимальным главными напряжениями при достижении пределов прочности горных пород в случаях неравномерного трёхосного сжатия предложен способ построения огибающей предельных кругов Мора. Показано, что на диаграмме Мора получено уравнение огибающей представляет собой параболу.

Ключевые слова: трёхосное сжатие, пределы прочности, круги Мора, огибающая предельных кругов.

ABOUT THE CRITERION OF ROCK STRENGTH

Rychkov B.A. professor of KRSU named after B.Elcin, Bishkek, Kyrgyz Republic, 720000, 44 Kievskaya st. e-mail: rychkovba@mail.ru

Annotation. Based on the known analytical relationship between the minimum and maximum principal stresses when the rock strength limits are reached in cases of uneven three-axis compression, a method for constructing the envelope of Mohr's limiting circles is proposed. It is shown that on the Mohr diagram, the envelope equation is a parabola.

Keywords: three-axis compression, strength limits, Mohr circles, envelope of limiting circles.

При составлении паспорта прочности горных пород используются экспериментальные данные испытаний цилиндрических образцов на неравномерное трехосное сжатие по схеме Т.Кармана. Определяются предельные (при разрушении образцов) главные напряжения ($\sigma_i = i = 1, 2, 3$) при выполнении соотношений: $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$. По найденным значениям этих напряжений на диаграмме Мора (в координатах $\sigma - \tau$, нормальное – касательное напряжения на наклонных площадках) строятся круги Мора и проводится к ним огибающая, которая и служит критерием прочности. Уравнением круга Мора является:

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Данное уравнение можно представить еще в виде:

$$\phi(\sigma, \tau, c) = \sigma^2 + \tau^2 - (1+c)\sigma_1\sigma + c\sigma_1^2 = 0, \quad (2)$$

где в качестве параметра данного семейства кругов фигурирует $c = \sigma_3 / \sigma_1$ – вид напряженного состояния.

Согласно известной теореме [1], огибающая семейства вида (2) должна удовлетворять также уравнению:

$$\phi_c(\sigma, \tau, c) = 0 \quad (\phi_c = \partial\phi / \partial c), \quad (3)$$

а координатами огибающей будут:

$$\sigma = \frac{\sigma_1(\sigma_1 + 2c(\sigma_1)_c)}{(\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)_c)}, \quad \tau = \frac{(1-c)\sigma_1\sqrt{(\sigma_1 + c(\sigma_1)_c) \cdot (\sigma_1)_c}}{\sigma_1 + (1+c) \cdot (\sigma_1)_c} \quad (4)$$

Выражение (2) можно рассматривать как уравнение второй степени относительно главных напряжений σ_1 и σ_3 . Показано [2], что (в соответствии с классификацией [3] таких уравнений) оно представляет собой уравнение гиперболы в указанных главных осях. Данное обстоятельство (с учетом свойств гиперболы и диаграммы Мора в области больших давлений) позволило [2,4] представить зависимость между этими напряжениями в виде:

$$\sigma_3 = A + \sqrt{\sigma_1^2 + B^2}, \quad (5)$$

где параметры А и В находятся для конкретной горной породы по экспериментальным значениям пределов прочности при каких-либо двух видах осуществленного в опыте напряженного состояния.

Преимущественно зависимости (5) по сравнению с другими подобными

представлениями заключается в том, что по результатам испытаний на трехосное сжатие можно определить предел прочности на растяжение. Продемонстрируем это, используя (в качестве примера) экспериментальные данные для талькохлорита [5], представленные в таблице 1.

Таблица 1

| c | $\sigma_1 \cdot 9,81 \text{ Мпа}$ эксперимент | $\sigma_1 \cdot 9,81 \text{ Мпа}$ расчет | $\sigma \cdot 9,81 \text{ Мпа}$ | $\tau \cdot 9,81 \text{ Мпа}$ |
|-------|--|---|---------------------------------|-------------------------------|
| 0 | 945 | 945 | 206,2 | 390,3 |
| 0,069 | 1320 | 1193 | 366,5 | 484,7 |
| 0,116 | 1420 | 1413 | 519,4 | 563,6 |
| 0,178 | 1730 | 1752 | 774,5 | 672,4 |
| 0,233 | 2340 | 2101 | 1056 | 769,4 |
| 0,322 | 2790 | 2790 | 1636 | 920,2 |
| 0,407 | 3820 | 3591 | 2368 | 1053 |
| 0,51 | 5480 | 4905 | 3594 | 1197 |

В этой таблице приведены также расчетные значения координат (σ, τ) огибающей.

При определении параметров A и B «опорными» послужили напряженные состояния при $c = 0, c = 0,322$. Получено: $A = -3387, B = 3257$ (размерность напряжения). Как следует из формулы (5), сумма $A+B$ доставляет значение предела прочности на растяжение: $\sigma_1 = -129 \cdot 9,81 \text{ Мпа}$, что в точности соответствует экспериментальному его значению.

На основании полученных расчетных значений координат огибающей ее параметрическое выражение формулами (4) представлено в виде зависимости $\tau(\sigma)$ на рис.1.

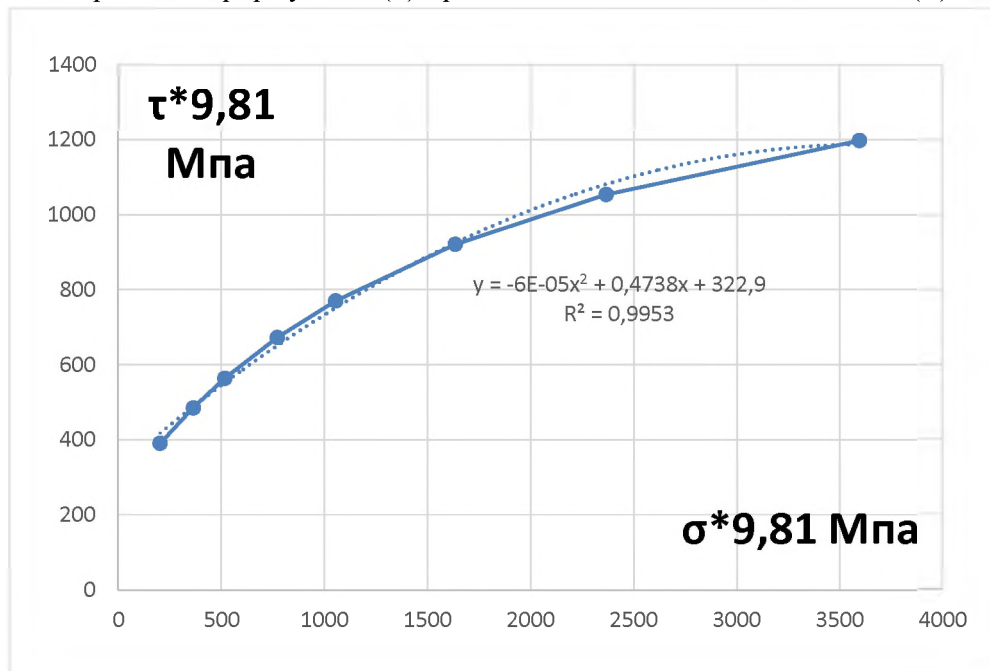


Рис. 1. Уравнение огибающей для талькохлорита

Чтобы построить эту зависимость необходимо было иметь выражения для функции $\sigma_1(c)$ и ее производной $(\sigma_1)_c$. Согласно (5) можно представить:

$$\sigma_1(c) = \frac{-Ac + \sqrt{A^2 - (1 - c^2)B^2}}{1 - c^2} \tag{6}$$

Тогда

$$(\sigma_1)'_c = \frac{c[2A^2 - (1-c^2)B^2] - A(1+c^2)\sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}}{(1-c^2)^2\sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}} \quad (7)$$

Как видно из рис. 1, аппроксимация зависимости $\tau(\sigma)$ линией тренда в виде полинома второй степени происходит с достаточно высокой достоверностью.

Общее уравнение второй степени относительно x, y имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (8)$$

где $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Для рассматриваемого случая (при $x = \sigma, y = \tau$) согласно уравнению линии тренда имеем:

$$g\sigma^2 + e\sigma - \tau + f = 0, \quad (9)$$

где

$$g = -6 \cdot 10^{-5}, e = 0,4738, f = 322,9 \quad (10)$$

Следовательно,

$$a_{11} = g, a_{12} = 0, a_{22} = 0, a_{13} = \frac{1}{2}e, a_{23} = -\frac{1}{2}, a_{33} = f, \quad (11)$$

Инвариантами уравнения (10) являются:

$$I = a_{11} + a_{22} = g, D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & 0 & \frac{1}{2}e \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}e & -\frac{1}{2} & f \end{vmatrix} = \frac{1}{4}g \neq 0,$$

В соответствии с этими значениями инвариантов A, D выражение (9) представляет собой параболу [3].

Уравнение (9) справедливо в области сжимающих напряжений и характеризует условие прочности. В интервале изменения напряжений от предела прочности на сжатие до предела прочности на растяжение, критерий прочности может быть принят [6] в виде линейной зависимости:

$$\tau = a\sigma + b, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{\sigma_c - |\sigma_p|}{2\sqrt{|\sigma_c \sigma_p|}}; b = \frac{1}{2}\sqrt{|\sigma_c \sigma_p|} \quad (14)$$

Подобное исследование по установлению зависимости $\tau(\sigma)$ произведено ранее [4] в рамках концепции скольжения. Используя сведения, приведенные в [4], получим (в качестве дополнительных примеров) картины огибающих еще для двух горных пород (для выбросоопасного и не опасного по выбросам песчаников), представленные на рис. 2, 3. Как видно из соответствующих уравнений линий тренда для этих случаев, они также представляют собой параболу.

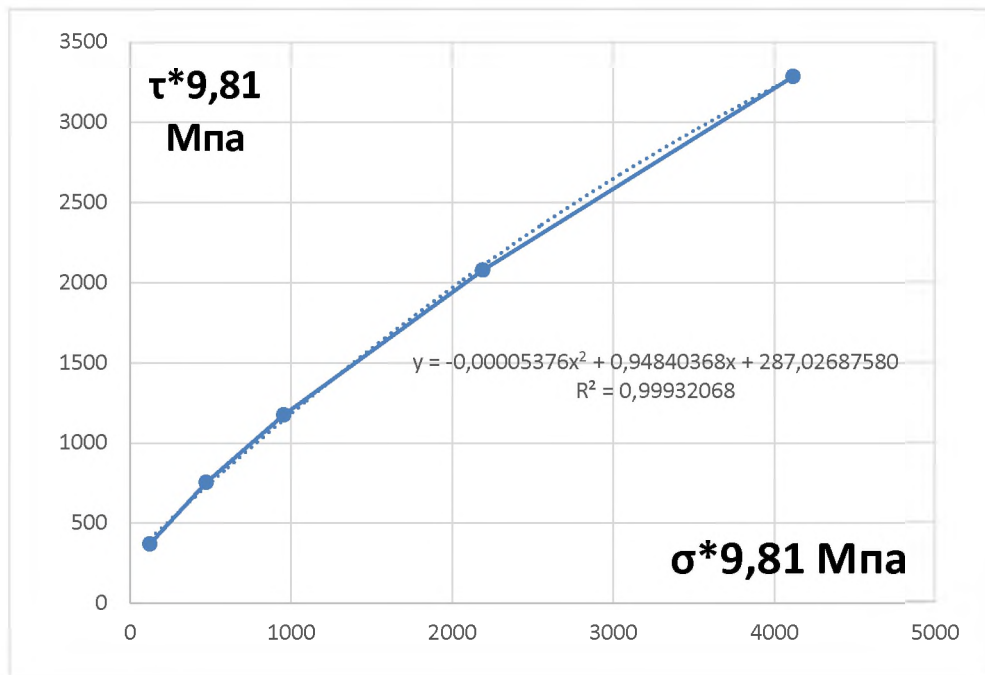


Рис. 2. Уравнение огибающей для выбросоопасного песчаника

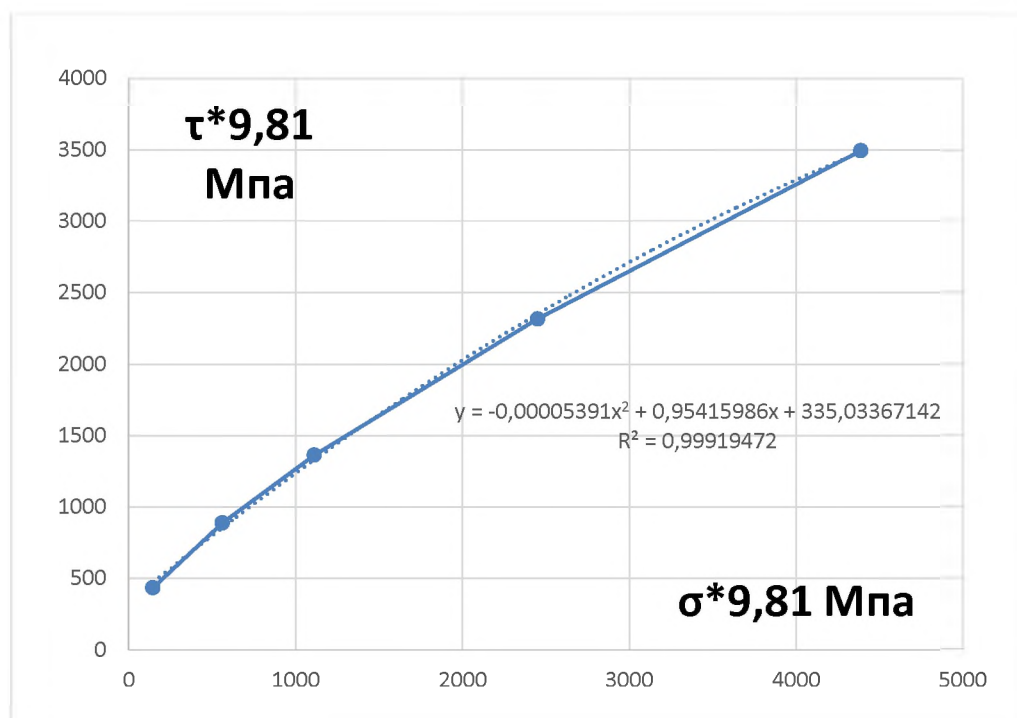


Рис.3. Уравнение огибающей для песчаника, не опасного по выбросам

Список литературы

1. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
2. Дуйшеналиев Т.Б., Койчуманов К.Т. Уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений. Бишкек: Илим, 2006.
3. Корн Г.Т. Справочник по математике для научных работников инженеров. М.: Наука, 1977.
4. Рычков Б.А., Лужанская Т.А. Аналитическое исследование предела прочности при растяжении горных пород// Изв. КГТУ им. И. Раззакова, 2014, № 32, (Часть II), с. 141-145.

Известия КГТУ им. И.Раззакова 46/2018

5. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.