УДК 517.949.6

СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Кутунаев Ж.Н. *Ошский технологический университет им.акад.М.М. Адышева, 723503, Кыргызская Республика, г.Ош, ул.Н.Исанова 81, Тел: (3222) 4-38-83 E-mail:* zh.kutunaev@mail.ru,
Рахматали кызы Э. *Ошский технологический университет им.акад.М.М. Адышева, 723503, Кыргызская Республика, г.Ош, ул.Н.Исанова 81, Тел: (3222) 4-38-83*
Кубанычбек кызы Т. *Ошский технологический университет им.акад.М.М. Адышева, 723503, Кыргызская Республика, г.Ош, ул.Н.Исанова 81, Тел: (3222) 4-38-83*

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. В настоящей статье рассмотрено одно из основных уравнений гиперболического типа, наиболее часто встречающегося 2-го порядка.

Ключевые слова: уравнение гиперболического типа, уравнение с частными производными, струна, крутильные колебания вала, колебания газа, поперечные колебания струны.

CREATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE STRING OSCILLATIONS AND ITS USAGE

Kutunaev Zh.N. *Osh technical university named after academic M.M.Adyshev, 723503, Kyrgyz Republic, Osh c., N.Isanov st.81, Number: (3222) 4-38-83 E-mail:* zh.kutunaev@mail.ru,
Rahmatali kyzy A. *Osh technical university named after academic M.M.Adyshev, 723503, Kyrgyz Republic, Osh c., N.Isanov st.81, Number: (3222) 4-38-83*
Kubanychbek kyzy T. *Osh technical university named after academic M.M.Adyshev, 723503, Kyrgyz Republic, Osh c., N.Isanov st.81, Number: (3222) 4-38-83*

Many problems in mathematical physics lead to differential equations with particular derivatives. This article considers one of the main equations of hyperbolic type: the 4th and the most frequently coming across the second order.

Key words: hyperbolic equation, equations with particular derivatives, string, torsional oscillations of a shaft, gas oscillations, transverse oscillations of a string.

Введение. В статье рассмотрено простейшее уравнение гиперболического типа – волновое уравнение. К исследованию этого уравнения приводят рассмотрение процессов поперечных колебаний струны, продольных колебаний стержня, электрических колебаний в проводе, крутильных колебаний вала, колебаний газа и т. д.

В математической физике под струной понимают гибкую, упругую нить. Напряжения, возникающие в струне, в любой момент времени направлены по касательной к ее профилю. Пусть струна длины l в начальный момент направлена по отрезку оси $0x$ от 0 до l.

Предположим, что концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = 1$. Если струну отклонить от ее первоначального положения, затем предоставить самой себе или, не отклоняя струны, придать в начальный момент ее точкам некоторую скорость, или отклонить струну и придать ее точкам некоторую скорость, то точки струны будут совершать движения – говорят, струна начнет колебаться. Задача заключается в определении формы струны в любой момент времени и определении закона движения каждой точки струны в зависимости от времени.

Будем рассматривать малые отклонения точек струны от начального положения. В силу этого можно предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси $0x$ и в одной плоскости. При этом предположении процесс колебания струны описывается одной функцией $u(x,t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент t.

Постановка задачи. Найти решение уравнения колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_3 \frac{\partial u}{\partial t} + a_4 u, \;\; 0 < x < \infty, \;\; t > 1, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u_{tt}(0,t) + u_t(0,t) + u_x(0,t) + u(0,t) = sin\omega t + cos\omega \tag{2}$$

и начальному условию

$$u(x,0) = 0, \;\; u_t(x,0) = f(x) \tag{3}$$

где $a_i (i = \overline{1,4})$ −постоянные коэффициенты, $f(x) -$ заданная функция.

В данной статье рассмотрим сумму двух бегущих волн вида

$$u(x,t) = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t} f(\varphi(x) + t) + e^{\psi_2(x)+\beta_2 t} f(\varphi(x) - t) \tag{4}$$

где $\beta_1, \; \beta_2$ −произвольныепостоянные, $\psi_1, \psi_2, f, \; \varphi -$ произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x) \neq 0$.

Пусть бегущая волна (4) есть общее решение некоторого уравнения гиперболического типа (1) и удовлетворяет граничному (2), начальному условию (3).

Дифференцируя функцию (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x) f(\varphi(x) + t) + \varphi'(x) f'(\varphi(x) + t)]$$
$$+ e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x) f(\varphi(x) - t) + \varphi'(x) f'(\varphi(x) - t)]. \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi_1'(x) e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\, [\psi_1'(x) f(\varphi(x) + t) + \varphi'(x) f'(\varphi(x) + t)] +$$
$$e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\left[\psi_1''(x) f(\varphi(x) + t) + \psi_1'(x)\varphi'(x) f'(\varphi(x) + t)\varphi''(x) f'(\varphi(x) + t) + \left(\varphi'(x)\right)^2 f''(\varphi(x) + t)\right]$$
$$+ \psi_2'(x) e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x) f(\varphi(x) - t) + \varphi'(x) f'(\varphi_1(x) - t)]$$
$$+ e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\Big[\psi_2''(x) f(\varphi(x) - t)$$
$$+ \psi_2'(x)\varphi'(x) f'(\varphi(x) - t) + \varphi''(x) f'(\varphi(x) - t) + \left(\varphi'(x)\right)^2 f''(\varphi(x) - t)\Big]$$

или, окончательно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\left[\left(\left(\psi_1'(x)\right)^2 + \psi_1''(x)\right) f(\varphi(x) + t)\right.$$
$$\left. + \left(2\psi_1'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\right) f'(\varphi(x) + t) + \left(\varphi'(x)\right)^2 f''(\varphi(x) + t)\right]$$
$$+ e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\left[\left(\left(\psi_2'(x)\right)^2 + \psi_2''(x)\right) f(\varphi(x) - t)\right.$$
$$\left. + \left(2\psi_2'(x)\varphi'(x) + \varphi''(x)\right) f'(\varphi(x) - t) + \left(\varphi'(x)\right)^2 f''(\varphi(x) - t)\right]. \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\left(\beta_1 f(\varphi(x) + t) + f'(\varphi(x) + t)\right)$$
$$+ e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\left(\beta_2 f(\varphi(x) - t) - f'(\varphi(x) - t)\right). \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta_1 e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}(\beta_1 f(\varphi(x) + t) + f'(\varphi(x) + t))$$
$$+ e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}(\beta_1 f'(\varphi(x) + t) + f''(\varphi(x) + t))$$

$$+\beta_2 e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}(\beta_2 f(\varphi(x)-t)-f'(\varphi(x)-t))+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}(-\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t))$$
$$=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t)]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f(\varphi(x)-t)-2\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t)]. \tag{8}$$

Подставляя (4) - (8) в (1), получим

$$e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\beta_1^2 f(\varphi(x)+t)+2\beta_1 f'(\varphi(x)+t)+f''(\varphi(x)+t)]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\beta_2^2 f(\varphi(x)-t)-2\beta_2 f'(\varphi(x)-t)+f''(\varphi(x)-t)]$$
$$=a_1\Big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\Big[\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)f(\varphi(x)+t)$$
$$+\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)+t)+\big(\varphi'(x)\big)^2 f''(\varphi(x)+t)\Big]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\Big[\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)f(\varphi(x)-t)$$
$$+\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)f'(\varphi(x)-t)+\big(\varphi'(x)\big)^2 f''(\varphi(x)-t)\Big]\Big\}$$
$$+a_2\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}[\psi_1'(x)f(\varphi(x)+t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)+t)]$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}[\psi_2'(x)f(\varphi(x)-t)+\varphi'(x)f'(\varphi(x)-t)]\big\}$$
$$+a_3\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}\big(\beta_1 f(\varphi(x)+t)+f'(\varphi(x)+t)\big)$$
$$+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}\big(\beta_2 f(\varphi(x)-t)-f'(\varphi(x)-t)\big)\big\}$$
$$+a_4\big\{e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{\psi_2(x)+\beta_2 t}f(\varphi(x)-t)\big\}. \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты при $f(\varphi(x)+t), f'(\varphi(x)+t), f''(\varphi(x)+t), f(\varphi(x)-t)$, $f'(\varphi(x)-t), f''(\varphi(x)-t)$ в левых и правых частях полученного равенства, имеем

$$\begin{cases}\beta_1^2=a_1\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\ 2\beta_1=a_1\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\ 1=a_1(\varphi'(x))^2,\\ \beta_2^2=a_1\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4,\\ -2\beta_2=a_1\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\ 1=a_1(\varphi'(x))^2.\end{cases}$$

Из этой системы видно, что неизвестные a_1, a_2, a_3, a_4 следует определить из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}a_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2},\\ 2\beta_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\big(2\psi_1'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)+a_3,\\ -2\beta_2=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\big(2\psi_2'(x)\varphi'(x)+\varphi''(x)\big)+a_2\varphi'(x)-a_3,\\ \beta_1^2=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\Big(\big(\psi_1'(x)\big)^2+\psi_1''(x)\Big)+a_2\psi_1'(x)+a_3\beta_1+a_4,\\ \beta_2^2=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\Big(\big(\psi_2'(x)\big)^2+\psi_2''(x)\Big)+a_2\psi_2'(x)+a_3\beta_2+a_4.\end{cases} \tag{10}$$

Из первых трех уравнений системы (10) $a_1,\ a_2,\ a_3$:

$$\begin{cases}a_1=\frac{1}{(\varphi'(x))^2},\\ a_2=\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3},\\ a_3=\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\big(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\big).\end{cases} \tag{11}$$

Используя найденные значения a_1, a_2, a_3 из четвертого уравнения системы (10) найдем a_4. Тогда, после некоторых вычислений, получим

$$a_4=\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2). \qquad (12)$$

Определение a_4 из пятого уравнения из системы (10) также приводит к результату (12), поэтому система (10) совместна. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. Уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+\left\{\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\right)\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+\left\{\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2)\right\}\cdot u$$

допускает общее решение уравнения (1).

Вывод. Выбор величин β_1, β_2, C и функций ψ_1, ψ_2, f, φ позволяет получить различные уравнения, часто встречающиеся в прикладных, технических и инженерных науках.

Аналогично можно доказать, что уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{(\varphi'(x))^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left\{\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{(\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{(\varphi'(x))^3}\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+\left\{\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)-\psi_2'(x)\right)\right\}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$+\left\{\frac{\beta_1^2+\beta_2^2}{2}+\frac{1}{2((\varphi'(x))^2}[(\psi_1'(x))^2+\psi_1''(x)+(\psi_2'(x))^2+\psi_2''(x)]\right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\beta_1-\beta_2}{\varphi'(x)}-\frac{\psi_1'(x)+\psi_2'(x)}{((\varphi'(x))^2}-\frac{\varphi''(x)}{((\varphi'(x))^3}\right]\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[\beta_1+\beta_2-\frac{1}{\varphi'(x)}\left(\psi_1'(x)+\psi_2'(x)\right)\right](\beta_1+\beta_2)\right\}\cdot u$$

и допускает общее решение вида

$$u(x,t)=e^{\psi_1(x)+\beta_1 t}f(\varphi(x)+t)+e^{C\psi_2(x)+\beta_2 t}f(\varphi(x)-t).$$

где β_1, β_2, C — произвольные постоянные числа, ψ_1, ψ_2, f, φ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, $\varphi'(x)\neq 0$.

Список использованной литературы

1. А.А. Самарский, А.П. Михайлов. Математическое моделирование. -М.: физматлит-2005, 313с.
2. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Дифференциальные уравнения. –Ростов-на-Дону 1991. 506с.
3. Я.Ацел, Ж.Домбр. Функциональные уравнения с несколькими переменными. – М.: физматлит-2003, 428с.
4. Р.Рафатов, А. Асанов.Дифференциалдыктендемелер. Бишкек-2007, 227 б.

5. В.С. Владимиров. Уравнения математической физики. –М.: физматлит -1991, 400с.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.: Наука-1977, 736с.

7. Кутунаев Ж.Н..Решение модельных задач с помощью уравнения гиперболического типа с переменными коэффициентами. // Проблемы автоматики и управления №1 (32), Бишкек-2017, С.11-14.