ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ВОЛЬТЕРРАНЫН ҮЧҮНЧҮ ТҮРДӨГҮ ТЕҢДЕМЕСИ КЕЛИП ЧЫГУУЧУ ЛОКАЛДУУ ЭМЕС ТЕСКЕРИ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Джумагулов Кубат Рыспекович – Ж. Баласагын атындагы Кыргыз улуттук университетинин математикалык талдоо кафедрасынын аспиранты, бизнес жана коммуникация кафедрасынын ага окутуучусу, Бишкек шаары, Фрунзе көчөсү, 547, e-mail: kubat_djumagulov@inbox.ru, моб. тел: (0555)990796.

Аннотация: Бул иште чектелбеген бөлүмдө экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме түрүндө берилген локалдуу эмес интегралдан көз каранды тескери маселеси каралат. Белгилүү шарттарда берилген теңдеме Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемесине айланат. Чыгып келүүчү маселенин чыгарылышы интегралдык кайтаруу жана регуляризация ыкмалары аркылуу далилденет. Интегралдан көз каранды тескери маселесинин чыгарылышынын алгоритми түзүлгөн. Чектелбеген бөлүмдө берилген тескери маселеси жардамчы функциясынын жаныртылган ыкмасы аркылуу Вольтерранын экинчи түрдөгү интегралдык теңдемесине айланат дагы, андан кийин Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемеси келип чыгат. Экинчи түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин чыгарылышы Банахтын принциби аркылуу келип чыгат, ал эми үчүнчү түрдөгү Вольтерранын интегралдык теңдемесинин жетиштүү чыгарылышы системалык регуляризация ыкмасы менен алынат. Бул ыкманын негизинде теңдемелердин системасына кичине параметрлерди киргизүү жана алар менен иштөө орун алат. Тескери маселелерди изилдөөдө чыгып келүүчү теңдеме классикалык эмес Вольтерранын үчүнчү түрдөгү интегралдык теңдемеси болгону анык жана алардын көпчүлүгү бүгүнкү күндө каралган эмес. Мындай тескери маселелери өз калыбына келтирүү процесстеринде кезигет. Ошондуктан тескери маселелери бул тармакта иштеген окумуштууларга бир гана теориялык эмес, натыйжалык дагы кызыкчылыгын түзөт.

Урунттуу сөздөр: локалдуу эмес тескери маселе; классикалык эмес теңдеме; регуляризация; келип чыгуучу теңдеме; чектелбеген бөлүм.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНО-НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩЕЙСЯ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

***Джумагулов Кубат Рыспекович** – аспирант кафедры математического анализа, старший преподаватель кафедры бизнеса и коммуникаций, г. Бишкек, Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, ул. Фрунзе, 547, e-mail: kubat_djumagulov@inbox.ru, моб. тел: (0555)990796.*

***Аннотация**:* В данной работе исследуется обратно-нелокальная задача с интегральной зависимостью в неограниченной области, заданной в виде дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Данное уравнение, в определенных случаях сводится к уравнению Вольтерра третьего рода. Разрешимость вырожденного уравнения доказана с помощью методов регуляризации и интегральных преобразований. Построен алгоритм решения обратной задачи с интегральной зависимостью, где исходная задача в неограниченной области с помощью модификации метода вспомогательной функции редуцируется в интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, а затем в

интегральное уравнение типа Вольтерра третьего рода. Разрешимость уравнения типа Вольтера второго рода легко доказывается при выполнении принципа Банаха, а достаточная разрешимость уравнения типа Вольтерра третьего рода получено с помощью методов системной регуляризации, где имеет место введение возмущенной малыми параметрами системы уравнений. Обратные задачи, где вырожденное уравнение является неклассическим уравнением Вольтерра третьего рода, на сегодняшний день мало изучены. Такие обратные задачи встречаются при исследовании процессов восстановления, поэтому изучение подобных задач представляет не только теоретический, но и практический интерес ученых, занимающихся в этой области.

Ключевые слова: обратно-нелокальная задача; неклассическое уравнение; регуляризация; вырожденное уравнение; неограниченная область.

SOLUTION OF A NONLOCAL INVERSE PROBLEM REDUCIBLE TO THE INTEGRAL EQUATION OF A VOLTERRA TYPE OF THE THIRD KIND

Dzhumagulov Kubat Ryspekovich, *post-graduate student of Kyrgyz national university named after J. Balasagyn, Kyrgyzstan, Bishkek, st. Frunze 547, e-mail: kubat_djumagulov@inbox.ru, phone: (0555)990796.*

Abstract: In this paper we consider the formulation of inverse nonlocal problem with integral dependence in an unbounded domain, represented as a nonclassical partial differential equation. This equation, under certain conditions reduces to integral equations of Volterra type of the third kind. The solvability of the degenerate equation is proved by means of regularization methods and integral transformations. An algorithm of solving the inverse problem with integral dependence where the initial task in an unlimited area using a modification of the method is called in the helper function is reduced in Volterra type integral equation of the second kind, and then Volterra type integral equation of the third kind. Solvability of equations of the second kind of Voltaire type easily proved when executing the principle of Banach and adequate solvability of the equation of Volterra type third kind obtained using methods of regularization of the system, where the introduction of the perturbed small parameter is the system of equations. Inverse problems where degenerate equation is non-classical equation of Volterra of the third kind, so far little explored. Such inverse problems found in the study of the processes of recovery, so the study of such problems is not only theoretical, but also practical interest of scientists working in this field.

Keywords: Inverse nonlocal problem; nonclassical equation; regularization; degenerate equation; unbounded domain.

Введение

На сегодняшний день без преувеличения можно назвать высокоактуальной область исследований теории интегральных уравнений, в частности интегральные уравнения типа Вольтерра первого и третьего родов [3,5], к которым, зачастую, сводятся многие задачи обратного характера [4,6,7,8]. Теория обратных задач является относительно молодой областью исследований высшей математики, актуальность которой обусловлена не только новыми теоретическими выводами, но и закрепляется важными физическими приложениями [1,2,5]. В настоящее время учеными исследован широкий спектр задач теории обратного характера [1,2,4,7], но масштабы потенциальных новшеств и достижений в этой области настолько велики, что невооруженным глазом, можно констатировать высокую важность физического и математического приложения данной теории к другим наукам.

Ниже в работе представлена обратно-нелокальная задача, вырождающаяся в уравнение Вольтерра третьего рода, достаточные условия разрешения которого, будут показаны с помощью методов интегральных преобразований и регуляризации[5,7].

I. Рассмотрим задачу вида

$$\begin{cases} U_{tt}+\lambda(x)U_{tx}=(Az)(t)+f(t,x,U(t,x)), \\ (Az)(t)\equiv\int\limits_0^t K_1(t,s)z(s)ds+\int\limits_0^{N(t)} K_2(t,s)z(s)ds. \end{cases} \quad (1)$$

$$U^{(i)}{}_t\big|_{t=0}=\varphi_i(x), x\in R, (i=0,1) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(U_t(t,x_i)+\lambda(x_i)U_x(t,x_i))=g(t), t\in[0,T], \quad (3)$$

$$\beta=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\neq 0, \quad (4)$$

где $\alpha_i=const, f, K_i, N, \varphi_i, g, \lambda$ - известные данные, причем

$f\in C^1(\overline{\Omega}),\quad \Omega=(0,T)\times R,\ K_i(t,s)\in C^{0,1}(D_1),(i=1,2),\ K_1(t,t)\geq\alpha>0$,

$K_2(t,N(t))\equiv 0,\quad D_1=\{(t,s):0\leq s\leq t\leq T\};\ N(0)=0,\quad 0\leq N(t)\leq t\leq T,\quad g\in C^2[0,T];$ где искомыми функциями задачи являются

$\Psi=(U,z)\in W_C(\overline{\Omega})=\{(U,z):U\in C^{2,1}(\overline{\Omega}), z\in C[0,T]\},\ \|\Psi\|_{W_C}=\|U\|_{C^{2,1}(\overline{\Omega})}+\|z\|_{C[0,T]}$.

II. Из заданной задачи видно, что она носит параболический характер. Для изучения разрешимости исходной задачи необходимо ее трансформировать к интегральным уравнениям. Так как требуется восстановление неизвестных функций (U,z), то должны получить систему уравнений содержащих эти функции. Отметим, что классические методы, такие как применение функции Римана, функции Грина и преобразования Фурье, к исходной задаче неприменимы. Поэтому воспользуемся модификацией метода вспомогательной функции, применение которой описано в [7], то есть, пусть новая функция имеет вид:

$$\begin{cases} U_t+\lambda(x)U_x=u(t,x), \forall(t,x)\in\overline{\Omega} \\ u\big|_{t=0}=\varphi_1(x)+\lambda(x)\varphi_0(x)\equiv\varphi_2(x), \forall x\in R. \end{cases} \quad (5)$$

выражая функцию U, в соответствии с (5), имеем

$$\begin{cases} U=\varphi_0\left(x-\int\limits_0^t\lambda(\rho(x,t,s'))ds'\right)+\int\limits_0^t u\left(\tau,x-\int\limits_\tau^t\lambda(\rho(x,t,s))ds\right)d\tau\equiv(Bu)(t,x), \\ \rho(x,t,s')\big|_{s'=t}=x, \\ \rho_t+\lambda(x)\rho_x=0. \end{cases} \quad (6)$$

Замечание 1. Аналогичная обратная задача, в случае, когда $\lambda(x)\equiv\lambda_0=const$, изучена в работе [6], поэтому в данной работе ведется обобщение результатов.

В самом деле, чтобы убедиться в правильности действий достаточно подвергнуть дифференцированию функцию U, то есть выражение (6) соответственно по переменным t и x,

$$\begin{cases} U_t = \varphi_{0l} \cdot (-\lambda(x) - \int\limits_0^t \lambda_\rho(\rho) \cdot \rho_t ds') + u(t,x) + \int\limits_0^t \left[u_{l_1} \cdot (-\lambda(x) - \int\limits_\tau^t \lambda_\rho(\rho)\rho_t ds) \right] d\tau, \\ U_x = \varphi_{0l} \cdot (1 - \int\limits_0^t \lambda_\rho(\rho)\rho_x ds') + \int\limits_0^t \left[u_{l_1} \cdot (1 - \int\limits_\tau^t \lambda_\rho(\rho)\rho_x ds) \right] d\tau, \\ l = x - \int\limits_0^t \lambda(\rho(x,t,s'))ds', l_1 = x - \int\limits_\tau^t \lambda(\rho(x,t,s))ds, \end{cases} \tag{7}$$

затем с помощью подстановки полученных значений U_t и U_x в (5) получим верное тождество. Принимая во внимание (5) и (6) из рассматриваемого уравнения (1) вытекает следующее

$$u_t(t,x) = (Az)(t) + f(t,x,(Bu)(t,x)). \tag{8}$$

Так как интегро-дифференциальное уравнение (8) с условием (5) является задачей Коши, то имеем

$$u(t,x) = \varphi_2(x) + \int\limits_0^t [(Az)(\tau) + f(\tau,x,(Bu)(\tau,x))] d\tau \equiv (Qu)(t,x). \tag{9}$$

В данном уравнении (9) содержатся две неизвестные функции (u,z). Для выяснения разрешимости полученного уравнения имеющихся условий недостаточно, поэтому учитывая условия задачи (3), (5) и уравнение (9), а также задавая условие $x = x_i$, имеем

$$g(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i u(t,x_i) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left\{ \varphi_2(x_i) + \int\limits_0^t (Az)(\tau)d\tau + \int\limits_0^t f(\tau,x_i,(Bu)(\tau,x_i))d\tau \right\}. \tag{10}$$

Вследствие условия заданного в (1), вытекает необходимость выразить

$\int\limits_0^t (Az)(\tau)d\tau \equiv Qz$, то есть из (10) следует

$$\int\limits_0^t (Az)(\tau)d\tau = \beta^{-1} \left\{ g(t) - \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \left[\varphi_2(x_i) + \int\limits_0^t f(\tau,x_i,(Bu)(\tau,x_i))d\tau \right] \right\} \equiv (B_1 u)(t), \tag{11}$$

а это означает, что из уравнения (9) исключается $\tilde{Q}z$, то есть подставим (11) в уравнение (9) и получим

$$u(t,x) = \varphi_2(x) + \int\limits_0^t f(\tau,x,(Bu)(\tau,x))d\tau + B_1 u(t) \equiv (Hu)(t,x). \tag{12}$$

Уравнение (12) содержит только неизвестную функцию u, и по классификации интегральных уравнений является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода по переменной $t \in [0,T]$.

При выполнимости условий

$$L_H < 1, \tag{13}$$

где L_H является коэффициентом Липшица оператора H [9],

$$H : S_r(u_0) \to S_r(u_0), S_r(u_0) = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : |u - u_0| \le r = const, \forall (t,x) \in \overline{\Omega}\}, \tag{14}$$

очевидно, что уравнение (12) имеет одно и только одно решение в $C^1(\overline{\Omega})$.

Лемма 1. При выполнении условий (13) и (14), уравнение (12) разрешимо в $C^1(\overline{\Omega})$.

В самом деле, при выполнении условий (13) и (14), оператор H сжимающий и отображает область определения в себя, то есть выполняются условия принципа Банаха [9], поэтому уравнение (12) разрешимо в $C^1(\overline{\Omega})$. Отметим, что если $t \in [0,\infty)$, то относительно уравнения (12) не применима теория уравнений Вольтерра, следовательно, не нарушая общности исследований интегральных уравнений второго рода, используем условия принципа Банаха [9]. Лемма 1 доказана.

III. Для нахождения функции $z(t)$ правую часть уравнения (11) обозначим через функцию $F(t)$, учитывая, что

$$F(0)=0,\ F(t)\in C^2\left[0,T\right] \tag{15}$$

получим

$$\int_0^t (Az)(\tau)d\tau = F(t), \tag{16}$$

Далее дифференцируя (16) по переменной *t,* имеем $(Az)(t)=F^{/}(t)$, пользуясь данным значением оператора Az из условия задачи (1), и вновь дифференцируя по t, получим следующее выражение

$$K_1(t,t)z(t)+\int_0^t K_{1t}(t,s)z(s)ds+\int_0^{N(t)} K_{2t}(t,s)z(s)ds = F''(t) \tag{17}$$

и интегрируя по частям (17), имеем

$$\begin{cases} p(t)\theta'(t)+K_0(t)\theta(t)=F_0(t)+(G\theta)(t) \\ \int_0^t z(s)ds=\theta(t), \\ \theta(0)=0; z(t)=\theta'(t); |\theta'|=|z|\le r, \forall t\in[0,T], \\ (G\theta)(t)\equiv \int_0^t K_{1ts}(t,s)\theta(s)ds+\int_0^{N(t)} K_{2ts}(t,s)\theta(s)ds, \\ p(t)\equiv K_1(t,t), F_0(t)\equiv F''(t); K_0(t)\equiv K_{1t}(t,t)\ge\alpha>0. \end{cases} \tag{18}$$

Регуляризируем данную систему (18) в $C[0,T]$, введем возмущенную систему [7]:

$$\begin{cases} (\varepsilon+p(t))\theta_\varepsilon{}'(t)+K_0(t)\theta_\varepsilon(t)\equiv(G\theta_\varepsilon)(t)+F_0(t), \\ \delta z_\delta(t)+\int_0^t z_\delta(s)ds=\theta_\varepsilon(t)+\delta z(0), \left(\theta_\varepsilon(0)=0\right), \end{cases} \tag{19}$$

где ε,δ - малые параметры. Тогда (19) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t)=\int_0^t W(t,s,\varepsilon)\dfrac{1}{\varepsilon+p(s)}\left\{G\theta_\varepsilon(s)+F_0(s)\right\}ds\equiv(P\theta)(t), \\ z_\delta(t)=-\dfrac{1}{\delta^2}\int_0^t W_0(t,s,\delta)\cdot[\theta_\varepsilon(s)-v_\varepsilon(t)]ds+\dfrac{1}{\delta}W_0(t,0,\delta)\theta_\varepsilon(t)+W_0(t,0,\delta)z(0), \end{cases} \tag{20}$$

где имеют место ограничения

$$\begin{cases} W\equiv e^{-\int_s^t \frac{K_0(\tau)d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}; |W(t,s,\varepsilon)|\le e^{-\int_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}}, \\ W_0\equiv e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)}, (s\le t). \end{cases} \tag{21}$$

Проведем оценку первого уравнения системы (20)

$$\begin{cases} |\theta_\varepsilon(t)| \le \int\limits_0^t e^{-\int\limits_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}} \dfrac{1}{\varepsilon+p(s)} \left\{ M_0 + M_1 \int\limits_0^t |\theta_\varepsilon(s')| ds' + M_2 \int\limits_0^{N(t)} |\theta_\varepsilon(s')| ds' \right\} ds \le \\ \le \dfrac{1}{\alpha} \int\limits_0^t e^{-\int\limits_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}} d\left(-\int\limits_s^t \dfrac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)} \right) \times \left\{ M_0 + (M_1 T + M_2 \|N(t)\|_C T) \|\theta_\varepsilon(t)\|_C \right\} = \\ = \dfrac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\int\limits_s^t \frac{\alpha d\tau}{\varepsilon+p(\tau)}} \right) \left\{ M_0 + d_0 \|\theta_\varepsilon(t)\|_C \right\} \le \dfrac{1}{\alpha} M_0 + \dfrac{1}{\alpha} d_0 \|\theta_\varepsilon(t)\|_C, \\ M_0 = \sup\limits_{[0,T]} |F_0(t)|, M_1 = \sup\limits_{D_1} |K_{1s}(t,s)|, M_2 = \sup\limits_{D_1} |K_{2s}(t,s)|, \\ d_0 = M_1 T + M_2 \|N(t)\|_C T, \gamma_0 = \dfrac{1}{\alpha} M_0, \end{cases} \tag{22}$$

и с учетом оценки (22), а также, полагая $\frac{1}{\alpha} d_0 = h < 1$, получим

$$\begin{cases} \|\theta_\varepsilon(t)\|_C \le (1-h)^{-1} \gamma_0, \\ \|z_\delta(t)\| \le L_{\theta_\varepsilon} \left(1 + e^{-1} \right) + |q_0| \le 2L_{\theta_\varepsilon} + |q_0| \equiv N_0 = const, \end{cases} \tag{23}$$

отсюда видно, что система уравнений (20) разрешима, так как функции $\theta_\varepsilon(t)$ и $z_\delta(t)$ ограничены по норме в $C[0,T]$.

Лемма 2. При выполнении условий (23) существует единственное решение системы (20) в указанном классе функций, причем это решение сходится равномерно к решению системы (18) при $\varepsilon \to 0 (\delta \to 0)$.

Для доказательства выполним подстановку вида

$$\begin{cases} \theta_\varepsilon(t) = \theta(t) + \xi_\varepsilon(t), \\ z_\delta(t) = z(t) + \eta_\delta(t), \forall t \in [0,T), \end{cases} \tag{24}$$

далее получим

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t W(t,s,\varepsilon) \dfrac{1}{\varepsilon+p(s)} \left\{ (G[\theta+\xi_\varepsilon])(s) - (G\theta)(s) - \varepsilon\theta_s(s) \right\} ds \equiv (Q\xi_\varepsilon)(t), \\ \eta_\delta(t) = -\dfrac{1}{\delta^2} \int\limits_0^t W_0(t,s,\delta) \left\{ \theta_\varepsilon(s) - \theta(s) \right\} ds + \dfrac{1}{\delta} \left\{ \theta_\varepsilon(t) - \theta(t) \right\} + \Delta(\delta, z), \\ \Delta(\delta, z) = -\dfrac{1}{\delta} \int\limits_0^t W_0(t,s,\varepsilon) \left\{ z(t) - z(s) \right\} ds - W_0(t,0,\delta)(z(t) - z(0)). \end{cases} \tag{25}$$

Оценивая исходную систему (25), имеем

$$\begin{cases} |\xi_\varepsilon(t)| \le \dfrac{1}{\alpha} \left(M_1 T + M_2 \|N_0(t)\|_C T \right) \|\xi_\varepsilon(t)\|_C + \dfrac{1}{\alpha} r_0 \varepsilon, \\ |\eta_\delta(t)| \le \dfrac{1}{\delta^2} \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\delta}(t-s)} |\theta_\varepsilon(s) - \theta(s)| ds + \dfrac{1}{\delta} |\theta_\varepsilon(t) - \theta(t)| + |\Delta(\delta, z)|, \left(|z| \le r, \forall t \in C[0,T) \right), \end{cases} \tag{26}$$

следовательно

$$\begin{cases} \left\|\xi_\varepsilon(t)\right\|_C \le (1-h)^{-1}\dfrac{1}{\alpha}r_0\varepsilon = N_0\varepsilon, (N_0 = \dfrac{1}{\alpha}r_0). \\ \left\|\eta_\varepsilon(t)\right\|_C \le 2N_0\dfrac{1}{\delta}\varepsilon + \left\|\Delta(\delta,z)\right\|_C, \\ \left\|\Delta(\delta,z)\right\|_C \le L_z(1+e^{-1})\delta \le 2L_z\delta, \left(0 < L_z, \dfrac{\varepsilon}{\delta}\xrightarrow[\delta\to0(\varepsilon\to0)]{}0\right). \end{cases} \tag{27}$$

Учитывая условия (24) и (27), следует

$$\begin{cases} \left\|\theta_\varepsilon(t)-\theta(t)\right\|_C \le N_0\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0, \\ \left\|z_\delta(t)-z(t)\right\|_C \le 2N_0\dfrac{1}{\delta}\varepsilon + \left\|\Delta(\delta,z)\right\|_C \xrightarrow[\delta\to0(\varepsilon\to0)]{} 0, \end{cases} \tag{28}$$

то есть

$$\begin{cases} \xi_\varepsilon(t)\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0, \forall t\in C[0,T), \\ \eta_\delta(t)\xrightarrow[\delta\to0]{}0, \forall t\in C[0,T), \\ z_\delta(t)\xrightarrow[\delta\to0]{}0, \forall t\in C[0,T), \end{cases} \tag{29}$$

а это означает

$$(\theta_\varepsilon(t); z_\delta(t))\xrightarrow[\varepsilon\to0(\delta\to0)]{}(\theta(t); z(t)), \forall t\in[0,T], \tag{30}$$

что и требовалось доказать. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. При выполнении условий лемм 1 и 2 обратно-нелокальная задача (1)-(3) регуляризируема в $W_C(\overline{\Omega})$.

Заключение

В работе доказана достаточная разрешимость обратной задачи с интегральной зависимостью, которая с помощью модифицикации метода вспомогательной функции вырождается в интегральное уравнение Вольтерра третьего рода [8]. Для доказательства разрешимости исходной задачи в $W_C(\overline{\Omega})$ применены методы интегральных преобразований и методы регуляризации интегральных уравнений третьего рода.

Список литературы

1. *Аниконов Д.С.* К вопросу о единственности решения обратных задач для уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения . – 1979. – Т. 15,№1 – С.3-9.
2. *Бухгейм А.Л.* Уравнение Вольтерра и обратные задачи.- Новосибирск: Наука, 1983. - 207 с.
3. *Магницкий Н.А.* Линейные интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода // ЖВМ и МФ. – 1979. - Т.19, №4. – С.970-989.
4. *Нахушев А.М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Дифференциальные уравнения. – Т.10, №1, 1974. - С. 100-111.
5. *Омуров Т.Д.* Методы регуляризации интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода.- Бишкек: Илим, 2003.- 162с.
6. *Омуров Т.Д., Алыбаев А.М., Джумагулов К.Р.* Обратно-нелокальная задача в неограниченной области, где вырождается неклассическое интегральное уравнение Вольтерра третьего рода //Наука, техника и образование. - №1(31)., 2017. с.10-15
7. *Омуров Т.Д., Рыспаев А.О., Омуров М.Т.* Обратные задачи в приложениях математической физики. - КНУ им. Ж. Баласагына. – Б.: 2014. –192 с.

8. *Омуров Т.Д., Джумагулов К.Р., Омуров М.Т.* Регуляризация обратных задач, где вырождается уравнение Вольтерра первого рода с особым решением // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XLII междунар. науч.-практ. конф. №5(40).- Новосибирск: СибАК,2016.- с.98-110.

9. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.