

УДК 539.215

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

*Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина*

Рассмотрены известные результаты испытания цилиндрических образцов горных пород при сложном нагружении по схеме Т. Кармана. Определены упругие константы таких материалов в соответствии с основным постулатом теории упругости о независимости от истории нагружения связи между конечными значениями напряжений и деформаций. Показано, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона действительно являются константами материала, а не переменными величинами, как это иногда трактуется.

*Ключевые слова:* горные породы; модуль Юнга; коэффициент Пуассона; сложное нагружение.

---

## ТАТААЛ ЖҮКТӨӨДӨ ТОО ТЕКТЕРИНИН СЕРПИЛГИЧТИК МОДУЛУН АНЫКТОО

*Б.А. Рычков, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина*

Макалада Т. Кармандын схемасы боюнча татаал жүктөрдө цилиндр формасындагы тоо тектеринин үлгүлөрүн сыноонун белгилүү жыйынтыктары каралды. Чыңалуунун акыркы маанилери менен майышуунун ортосундагы байланыш жүктөө тарыхына көз каранды эместиги жөнүндө серпилгичтик териясынын негизги постулатына ылайык мындай материалдардын серпилгичтиги аныктады. Юнгдын модулу жана Пуассондун коэффициенти чындыгында материалдык туруктуу, ал эми кээде чечмеленгендей, өзгөрүлмө чоңдуктар эмес экени көрсөтүлгөн.

*Түйүндүү сөздөр:* тоо тектери; Юнгдын модулу; Пуассондун коэффициенти, татаал жүктөө.

---

## DETERMINATION OF THE ROCKS ELASTICITY MODULUS UNDER COMPLEX LOADING

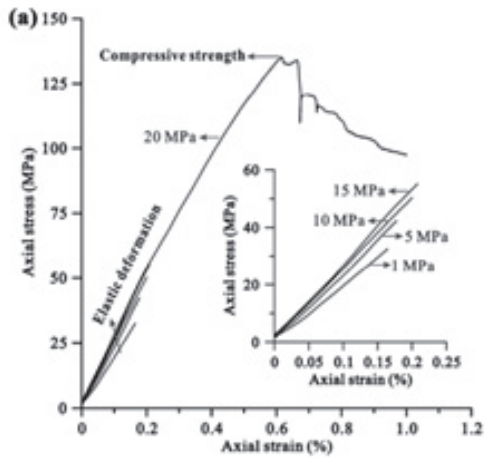
*B.A. Rychkov, I.V. Goncharova, N.M. Komartsov, M.A. Kulagina*

The article considers the well-known results of cylindrical rock specimens test under complex loading on the T. Karman's scheme. The research determines the elastic constants of such materials in accordance with the basic postulate of the theory of elasticity, which says that the relationship between the finite values of stresses and strains are independent of the loading history. It shows that Young's modulus and Poisson's ratio are indeed material constants, but not a variable, as it is sometimes interpreted.

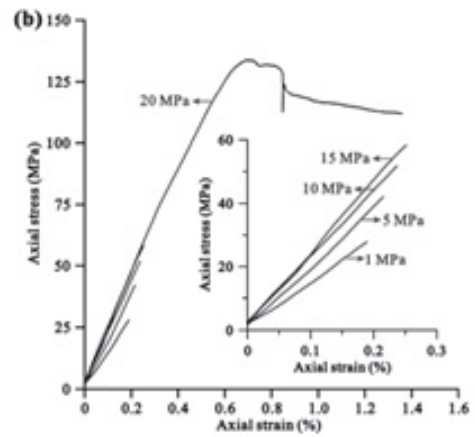
*Keywords:* rocks; Young's modulus; Poisson's ratio; complex loading.

**Введение.** Одним из распространённых видов механических испытаний образцов горных пород в лабораторных условиях является первоначальное гидростатическое сжатие стандартного цилиндрического образца с последующей догрузкой его осевым давлением при постоянном достигнутом боковом давлении. В результате таких испытаний определяются механические свойства пород [1–4]. Именно результаты подобных испытаний представлены в статье [5] (см. рисунок 1) для шести типов горных пород из китайского континентального бассейна.

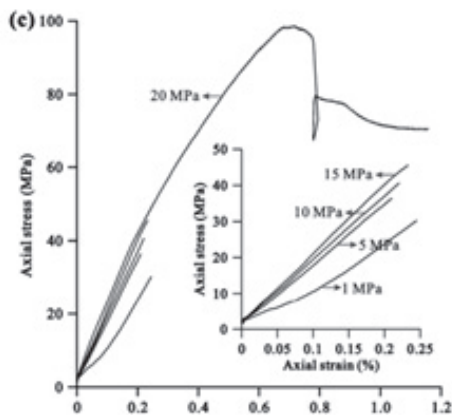
По данным графикам авторами статьи [5] вычислен модуль Юнга как тангенс угла наклона касательной к линии упругой деформации на диаграмме «осевое напряжение – приращение осевой деформации». Полученные данные приведены в таблице 1.



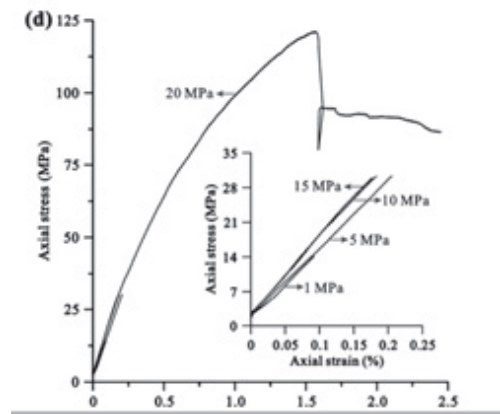
а) сланец – FA



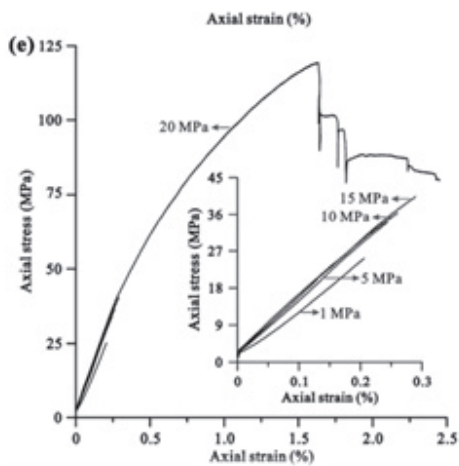
б) аргиллит – FB



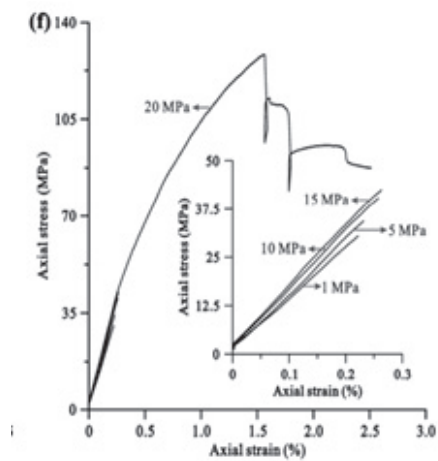
в) аргиллит – HC



г) сланец – YD



д) сланец – YE



е) сланец – YF

Рисунок 1 – Исходные диаграммы «осевое напряжение – приращение осевой деформации» при наложении различного бокового давления (1, 5, 10, 15, 20 МПа) после начального гидростатического сжатия образцов указанных горных пород (а, б, ..., е)

Таблица 1 – Модуль Юнга в трактовке авторов эксперимента [1] при различных боковых давлениях (Confining stress)

Confining stress (MPa)	Young's modulus (GPa)					
	FA	FB	HC	YD	YE	YF
1	19.922	15.280	14.319	14.325	12.319	13.172
5	24.099	20.263	16.753	13.702	13.337	14.620
10	24.870	20.920	17.626	15.944	13.618	15.102
15	26.782	22.642	19.092	15.474	13.038	15.533
20	25.916	22.494	19.537	15.386	13.860	15.854

Как видно из данных таблицы 1, модуль Юнга, в трактовке авторов эксперимента, оказался переменной величиной. Ввиду этого обстоятельства в статье [5] предложена некоторая аналитическая зависимость для описания полученных значений такого модуля Юнга. Однако это нарушает формулировку закона Гука, согласно которому модуль Юнга должен быть константой материала. На самом деле подобные затруднения возникают даже при определении модуля Юнга при одноосном сжатии. Считается [6], что ГОСТ 28985–97 [7] в настоящее время устарел, т. к. он не учитывает современного развития экспериментальной техники. Определенные недостатки отмечаются [6] также у стандартов DINEN 14580:2005–07 [8] и ASTM D7012–10 [9].

В настоящей работе будет показано, как определять действительный модуль Юнга, используя представленные в реальном масштабе экспериментальные диаграммы «осевое напряжение – приращение осевой деформации» в их совокупности при всех реализованных боковых давлениях.

### 1. Определение (фиктивного) модуля упругости

Оцифровывая графики (рисунок 1) с помощью программы GetData, получены табличные значения приращения осевой деформации ( $\Delta\varepsilon_1$ ) в зависимости от приращения осевого напряжения ( $\Delta\sigma_1$ ) при разных боковых давлениях (1, 5, 10, 15, 20 МПа).

На основе полученных данных построены соответствующие диаграммы  $\Delta\varepsilon_1 \sim \Delta\sigma_1$  для каждого материала. В качестве примера на рисунке 2 приведены такие диаграммы для материала Аргиллит-НС, которые с достаточно большой достоверностью  $R^2$  аппроксимируются линейными линиями тренда. Этим гарантируется достаточная точность проведенной оцифровки.

Дальнейшие расчеты проведены без учета напряжения от бокового давления в 1 МПа, поскольку в этом случае на диаграмме деформации наблюдается значительный нелинейный начальный участок.

В полученных уравнениях линии тренда ( $y \sim \Delta\sigma_1$ , а  $x \sim \Delta\varepsilon_1$ ) коэффициент при  $x$  представляет расчетное значение фиктивного модуля упругости в результате оцифровки исходных экспериментальных графиков. Для проверки этих расчетных значений найдем процентное расхождение  $\delta, \%$  (таблица 2) между расчетными ( $E_p$ ) и табличными ( $E_{\text{табл}}$ ) значениями (таблица 1) указанного модуля по формуле:

$$\delta = \frac{E_p - E_{\text{табл}}}{E_{\text{табл}}} 100\% . \quad (1)$$

Как видно из данных таблицы 2, расчетные значения фиктивного модуля упругости мало отличаются от полученных в статье [5].

Этот результат еще раз свидетельствует о достоверности диаграмм  $\Delta\varepsilon_1 \sim \Delta\sigma_1$ , полученных при оцифровке исходных экспериментальных графиков. Следовательно, эти диаграммы можно

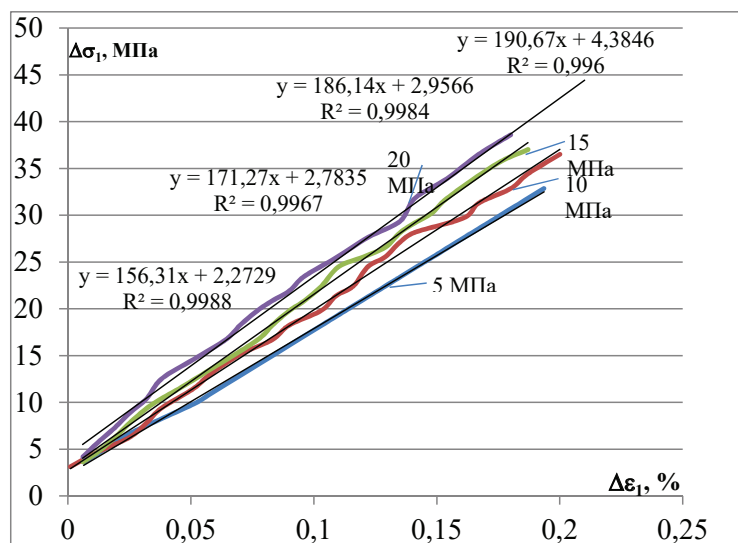


Рисунок 2 – Диаграммы  $\Delta\varepsilon_1 \sim \Delta\sigma_1$  материала Аргиллит-НС

Таблица 2 – Расчетные значения фиктивного  $\delta\%$  модуля упругости и его отклонения от экспериментальных значений, представленных в таблице 1

Conf. Stress (MPa)	FA $E_p$	FA $\delta\%$	FB $E_p$	FB $\delta\%$	HC $E_p$	HC $\delta\%$	YD $E_p$	YD $\delta\%$	YE $E_p$	YE $\delta\%$	YF $E_p$	YF $\delta\%$
5	20,07	-16	20,29	-1,6	15,6	-6,86	13,4	-2,1	13,32	-0,3	13,57	-7,1
10	23,84	-4,1	23,43	11,9	17,12	-2,83	15,76	-1,1	13,44	-1,1	14,19	-6
15	24,43	-5,6	24,34	7,5	18,61	-2,5	15,76	1,8	13,89	6,6	15,35	-1,1
20	25,91	-2,8	25,81	12	19,06	-2,4	15,99	3,9	13,93	0,5	15,5	-1,8

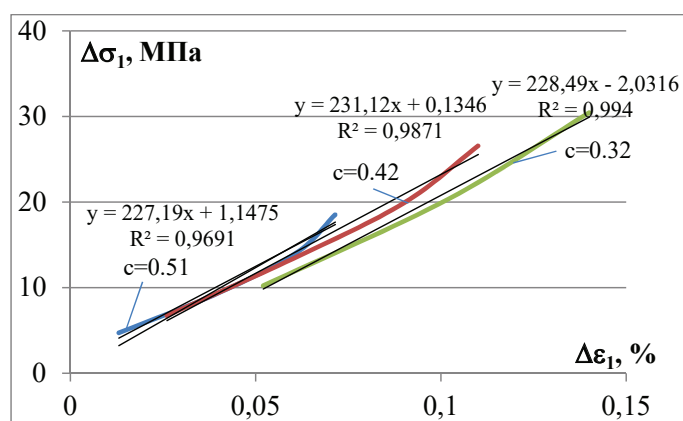


Рисунок 3 – Аргиллит-НС

использовать для определения действительного модуля упругости, как это предлагается ниже при надлежащем применении обобщенного закона Гука.

## 2. Замена траектории сложного нагружения траекторией пропорционального нагружения

Вид напряженного состояния характеризуется параметром  $c$ , который представляется отношением среднего главного напряжения ( $\sigma_2$ ) к максимальному главному напряжению ( $\sigma_1$ ). Для рассматриваемого сложного нагружения этот параметр вычисляется по формуле:

$$\tilde{n} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2^* + \Delta\sigma_1}, \quad (2)$$

где  $\sigma_2$  – напряжение, достигнутое от равномерного бокового давления разного уровня;  $\sigma_2^*$  – напряжение бокового давления при предварительном гидростатическом давлении;  $\Delta\sigma_1$  – приращение напряжения от приращения осевого давления.

По полученным (в результате оцифровки) табличным данным, для приращений напряжений ( $\Delta\sigma_1$ ) и деформаций ( $\Delta\varepsilon_1$ ) вычислены значения параметра вида напряженного состояния ( $c$ ). Из этих значений  $c$  выбраны на всех траекториях сложного нагружения точки при трех разных значениях  $c^*$ , характеризующих замену траектории сложного нагружения траекторией пропорционального нагружения. В результате, для выбранных траекторий пропорционального нагружения определено приращение осевой деформации от приращения осевого напряжения. Соответствующие диаграммы (в качестве примера) приведены для аргиллита-НС на рисунке 3, которые аппроксимируются линейной линией тренда также с большой достоверностью.

Следовательно, при указанных расчетных траекториях пропорционального нагружения соответствующие экспериментальные значения приращения осевой деформации подчиняются обобщенному закону Гука в его классической формулировке.

## 3. Определение коэффициента Пуассона и действительного модуля упругости (модуля Юнга)

Закон Гука для рассматриваемого сложного напряженного состояния представляется в виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)), \quad (3)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона, считаются константами материала.

Для определения указанных упругих констант воспользуемся следующей справедливой при рассматриваемом пропорциональном нагружении формулой:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{E} (1 - 2c\nu). \quad (4)$$

Зависимость (4) при двух выбранных значениях параметра  $c$  представляет систему линейных алгебраических уравнений относительно констант  $E$  и  $\nu$ . Найденные из решения указанной системы уравнений значения  $E$  и  $\nu$  представлены в таблицах 3, 4 для всех рассмотренных горных пород (FA, FB, HC, YD, YE, YF).

Судя по полученным значениям коэффициента Пуассона, все рассмотренные горные породы представляют собой достаточно пластичные материалы.

В отличие от строгого метода применения закона Гука, при произвольном пропорциональном нагружении в виде формулы (4), авторы эксперимента использовали этот закон в форме, справедливой только при одноосном напряженном состоянии; т. е. полагали применимой следующую формулу:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{E_{\text{Табл}}}. \quad (5)$$

Таблица 3 – Коэффициент Пуассона  $\nu$

FA	FB	HC	YD	YE	YF
0,48	0,35	0,42	0,29	0,31	0,32

Таблица 4 – Модуль Юнга  $E$ , ГПа

FA	FB	HC	YD	YE	YF
18,9	16,4	14,24	14,82	11,6	13,07

Если сравнить формулы (4) и (5), то указанный фиктивный модуль выражается через действительный модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$E_T = \frac{E}{(1 - 2\nu)}. \quad (6)$$

Из последней формулы видно, что модуль  $E_T$  является переменной величиной, зависящей от вида напряженного состояния и от достигаемой упругой деформации.

Как видно из сравнения данных таблиц 4 и 1, значения действительного модуля Юнга (как константы материала) меньше значения фиктивного (переменного) модуля упругости  $E_{Табл}$ . Это является следствием справедливости закона Гука (представленного формулой (4)), согласно которому при осуществленном в опыте сложном напряженном состоянии следует учитывать влияние коэффициента Пуассона (который также является константой материала).

**Закключение.** Данное исследование подтверждает полученные ранее результаты [10]. Доказано, что для всех рассмотренных горных пород (представленных в [5]), модуль Юнга и коэффициент Пуассона действительно являются константами материала. Апробирована предложенная в [10] методика определения этих констант на основе имеющихся экспериментальных данных сложного нагружения.

#### Литература

1. Mogi K. Experimental rock mechanics / K. Mogi. London: CRC Press, 2007. 375 p. DOI: 10.1201/9780203964446.
2. Al-Shayea N.A. Effects of testing methods and conditions on the elastic properties of limestone rock / N.A. Al-Shayea // Engineering Geology. 2004. Vol. 74. № 1–2. P. 139–156. DOI: 10.1016/j.enggeo.2004.03.007.
3. Xu H. Characterization of Rock Mechanical Properties Using Lab Tests and Numerical Interpretation Model of Well Logs / H. Xu, W. Zhou, R. Xie et al. // Mathematical Problems in Engineering. 2016. Vol. 2016. № 1. 5967159. 13 p. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0\_1.
4. Stefanov Yu.P. Some nonlinear rock behavior effects / Yu.P. Stefanov // Physical Mesomechanics. 2018. Vol. 21. № 3. P. 234–241. DOI: 10.1134/S1029959918030074.
5. Junqian Li. Quantitative evaluation on the elastic property of oil-bearing mudstone/shale from a Chinese continental basin / Li Junqian, Lu\*Shuangfang, Xue Haitao, Xie Liujuan and Zhang Pengfei // Energy exploration & exploitation. 2015. Vol. 33. N. 6. P. 851–868.
6. Suknev S.V. Methods of determination of rock elastic properties / S.V. Suknev, S.P. Fedorov // Nauka i obrazovanie. 2014. № 1(73). P. 18–24 (In Russian).
7. GOST 28985–97. Rocks. Method of determination of deformation characteristics under uni-axial compression. Moscow: Izdatel'stvo Standartov, 2004. 10 p. (In Russian).
8. DIN EN 14580:2005–07. Prüfverfahren für Naturstein – Bestimmung des statischen Elastizitätsmoduls [Natural stone test methods – Determination of static elastic modulus]. Berlin: Deutsches Institut für Normung, 2005. 15 p. (In German).
9. ASTM D7012–10. Standard Test Methods for Compressive Strength and Elastic Moduli of Intact Rock Core Specimens under Varying States of Stress and Temperatures. West Con-shohocken, PA, ASTM international, 2010. DOI: 10.1520/D7012-10.
10. Комарцов Н.М. О трактовке модуля упругости горных пород / Н.М. Комарцов, М.А. Кулагина, Б.А. Рычков // Вестник Сам. ГТУ. Сер. физ.-мат. науки. 2018. Том 22. № 3. С. 487–503.