УДК 517.929

ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

П.С. Панков, Ж.К. Жээнтаева

Рассматриваются следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем. Отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим фактор-пространством; явление «размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» было названо «асимптотическое уменьшение размерности пространства решений». Отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим экспоненциальным фактор-пространством. Отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени, соответствующее фактор-пространство названо хаусдорфовым асимптотическим фактор-пространством. Показано, что асимптотическое уменьшение размерности пространства решений имеет место для различных видов дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в том числе для известного явления наличия специальных решений у систем операторно-разностных уравнений. Также продемонстрировано, что хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство порождает новые математические объекты для систем дифференциальных уравнений, в том числе для странных аттракторов.

Ключевые слова: отношение эквивалентности; фактор-пространство; асимптотическая эквивалентность; дифференциальное уравнение; начальная задача.

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ТЕОРИЯСЫНДАГЫ ФАКТОР-МЕЙКИНДИК

П.С. Панков, Ж.К. Жээнтаева

Бул макалада динамикалык системалар үчүн баштапкы маселелердин чыгарылышынын мейкиндигинде эквиваленттүүлүктүн төмөнкүдөй катыштары каралат. Асимптотикалык эквиваленттүүлүк катышы: убакыт көбөйгөндө эки чыгарылыштын ортосундагы аралык нөлгө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды; «асимптотикалык фактор-мейкиндиктин өлчөмү баштапкы мейкиндиктин өлчөмүнөн азыраак» деген кубулуш «чыгарылыштардын мейкиндигинин өлчөмүнүн асимптотикалык азаюусу» деп аталды. Асимптотикалык экспоненциалдык эквиваленттүүлүк катышы: убакыт көбөйгөндө эки чыгарылыштын ортосундагы аралык экспоненциалдык азаят, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык экспоненциалдык фактор-мейкиндик деп аталды. Хаусдорфтук асимптотикалык эквиваленттүүлүк катышы: убакыттын көбөйүшү менен аргументи кайра өзүнүн баштагы калыбына келүүчү өзгөрүү менен чыгарылыштардын чектелбеген жакындашуусу, дал келген фактор-мейкиндик хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды. Чыгарылыштардын мейкиндигинин өлчөмүнүн асимптотикалык азаюусу дифференциалдык теңдемелердин жана аргументи кечиккен дифференциалдык теңдемелердин ар башка түрлөрүндө, анын ичинде оператордук-айырмалык теңдемелер системаларында атайын чыгарылыштары бар болгон белгилүү кубулушарда орун алганы көрсөтүлдү. Ошондой эле, хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик дифференциалдык теңдемелер системалары үчүн, алардын ичинде таң калыштуу аттракторлор үчүн жаңы математикалык объекттерди жарата тургандыгы көрсөтүлдү.

Түйүндүү сөздөр: эквиваленттүүлүктүн катышы; фактор-мейкиндик; асимптотикалык эквиваленттүүлүк; дифференциалдык теңдеме; баштапкы маселе.

QUOTIENT SPACES IN THE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

P.S. Pankov, Zh. K. Zheentaeva

In the paper, the following equivalence relations are considered in spaces of solutions of initial value problems for dynamical systems. The asymptotical equivalence relation: distance between two solutions tends to zero while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical quotient space"; the phenomenon "the dimension of the quotient space is less than one of the initial space" was called "asymptotical reduction of dimension of space of solutions". The asymptotical exponential equivalence relation: distance between two solutions decreases exponentially while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical exponential quotient space". The Hausdorff asymptotical equivalence relation: distance between two solutions with invertible transformation of argument tends to zero while time increases; the corresponding quotient space is called "Hausdorff asymptotical quotient space". It is demonstrated that the asymptotical reduction of dimension of space of solutions takes place for various types of differential equations and delay-differential equations including the known phenomenon of special solutions of systems of operator-difference equations. Also, it is demonstrated that the Hausdorff asymptotical quotient spaces generate new mathematical objects for systems of differential equations including strange attractors.

Keywords: equivalence relation; quotient space; asymptotical equivalence; differential equation; initial value problem.

Введение. Понятия эквивалентности и фактор-пространства успешно применяются в топологии и функциональном анализе. Цель данной статьи – показать, что эти понятия могут быть использованы для получения новых результатов и представления в более общей форме известных результатов в теории дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Рассматриваются следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем:

- Отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени.
- Отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени.
- Отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени, соответствующее фактор-пространство названо хаусдорфовым асимптотическим фактор-пространством.

Основные определения

Обозначим: $\boldsymbol{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{R} = (-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{R}_+ = [0,\infty)$, $\boldsymbol{R}_{++} = (0,\infty)$; E_n – $n\times n$ – единичная матрица; $n \in \boldsymbol{N}$; $C^{m(k)}D$ – пространство функций $u\colon D\rightarrow \boldsymbol{R}^m$, непрерывных вместе с производными до k порядка; D – область в $\boldsymbol{R}$, $0\in D$, т $\in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}_0$; $C^{*m(k)}D$ – подпространство функций, удовлетворяющих условию $u(0) = 0\in \boldsymbol{R}^m$. $m = 1$ и $k = 0$ будем опускать.

Для единого изложения задач с непрерывным и дискретным временем будем предполагать, что аргумент искомых функций t принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ, имеющему наименьший элемент (будем обозначать его «0»), но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$ или $\Lambda = \boldsymbol{N}_0$.

В данной статье мы рассматриваем только начальные задачи. Если предположить, что начальная задача всегда имеет решение, оно является единственным и глобальным, то есть продолжается на все множество Λ, то пространство решений некоторой динамической системы с начальным условием ϕ можно представить в виде оператора $W(t,\phi)\colon\Lambda\times\Phi\rightarrow Z$; Φ – топологическое пространство начальных условий; Z – топологическое пространство значений решений. В случае $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$ будем предполагать, что $W(t,\phi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z: линейные одномерные ($\boldsymbol{R}$); линейные многомерные ($\boldsymbol{R}^d$); линейные нормированные; равномерные.

Определение 2. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением асимптотической эквивалентности:

Если Z – линейное нормированное пространство, то

$(\phi_1 \sim \phi_2) \Leftrightarrow (\lim\{ ||W(t,\phi_1) - W(t,\phi_2)||_Z: t \to \infty\} = 0).$ (1)

Если Z – метрическое пространство, то

$(\phi_1 \sim \phi_2) \Leftrightarrow (\lim\{ \rho_Z(W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)): t \to \infty\} = 0).$ (2)

Если Z – равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то

$(\phi_1 \sim \phi_2) \Leftrightarrow (\forall V \in \Gamma_Z)(\exists t_1 \in \Lambda)(\forall t > t_1)((W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)) \in V).$ (3)

Лемма 1. Введенное отношение является корректным отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения очевидна. Докажем транзитивность. Пусть $\phi_1 \sim \phi_2$, $\phi_2 \sim \phi_3$. Для (2) по заданному $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ найдем такое t_{12}, что $\rho_Z(W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)) < \varepsilon/2$ при $t > t_{12}$, и такое t_{23}, что $\rho_Z(W(t,\phi_2), W(t,\phi_3)) < \varepsilon/2$ при $t > t_{23}$.

Тогда при $t > t_{13} := \max\{ t_{12}, t_{23}\}$ получим:

$\rho_Z(W(t,\phi_1), W(t,\phi_3)) \le \rho_Z(W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)) + \rho_Z(W(t,\phi_2), W(t,\phi_3)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$

(1) получается, как следствие из (2).

Для (3) воспользуемся аксиомой композиции окружений диагонали: $(\forall V \in \Gamma_Z)(\exists V_1 \in \Gamma_Z)(V_1 \circ V_1 \subset V)$. По заданному $V \in \Gamma_Z$ найдем соответствующее V_1, такое t_{12}, что $(W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)) \in V_1$ при $t > t_{12}$, и такое t_{23}, что $(W(t,\phi_2), W(t,\phi_3)) \in V_1$ при $t > t_{23}$.

Тогда при $t > t_{13} := \max\{ t_{12}, t_{23}\}$ получим: $(W(t,\phi_1), W(t,\phi_3)) \in V_1 \circ V_1 \subset V$.

Лемма доказана.

Соответствующее фактор-пространство называется асимптотическим фактор-пространством. Явление «размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» называется «асимптотическое уменьшение размерности пространства решений».

Определение 3. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением λ – экспоненциальной асимптотической эквивалентности $(\lambda \in \boldsymbol{R}_{++})$:

Если Z – линейное нормированное пространство, то

$(\phi_1 \sim_\lambda \phi_2) \Leftrightarrow (\sup\{ ||W(t,\phi_1) - W(t,\phi_2)||_Z \exp(\lambda t): t \in \Lambda\} < \infty).$ (4)

Если Z – метрическое пространство, то

$(\phi_1 \sim_\lambda \phi_2) \Leftrightarrow (\sup\{ \rho_Z(W(t,\phi_1), W(t,\phi_2)) \exp(\lambda t): t \in \Lambda\} < \infty).$ (5)

Соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим λ – экспоненциальным фактор-пространством.

Примечание. В ряде работ (см. например [1]) термин «асимптотическая эквивалентность» применялся в другом смысле: как близость между решениями различных уравнений с одним и тем же пространством начальных значений. В наших обозначениях:

$(W_1(t,\phi) \approx W_2(t,\phi)) \Leftrightarrow (\forall \phi_1 \in \Phi)(\exists \phi_2 \in \Phi)(\lim\{ ||W_1(t,\phi_1) - W_2(t,\phi_2)||: t \to \infty\} = 0).$

Определение 4. При $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$ следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением хаусдорфовой асимптотической эквивалентности:

Если Z – метрическое пространство, то $(\phi_1 \cong \phi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_{++}$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta: [s,\infty) \to \boldsymbol{R}_+$, что $(\forall t \in [s,\infty))(\rho_Z(W(t,\phi_1), W(\vartheta(t),\phi_2)) < \varepsilon)$.

Если Z – равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то $(\phi_1 \cong \phi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon \in \Gamma_Z$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta(t): [s,\infty) \to \boldsymbol{R}_+$, что

$(\forall t \in [s,\infty))((W(t,\phi_1), W(\vartheta(t),\phi_2)) \in \varepsilon).$ (6)

Лемма 2. Введенное отношение является корректным отношением эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность отношения $\cong$ очевидна (полагаем $\vartheta(t) \equiv t$).

Докажем симметричность. Пусть $\phi_1 \cong \phi_2$. По определению, существует обратная к функции $\vartheta(t)$, также непрерывная и возрастающая функция $\zeta(t){:}\boldsymbol{R}_+ \to [s,\infty)$. Подставляя $\zeta(t)$ вместо t в (6), получаем:

$(\forall\zeta(t)\in[s,\infty))(\ (W(\zeta((t)),\phi_1),\ W(\vartheta(\zeta(t)),\phi_2))\ \in\varepsilon)$.

Условие $\zeta(t)\geq s$ эквивалентно условию $\vartheta(\zeta(t))\geq \vartheta(s)$. Отсюда

$(\forall t\in[\vartheta(s),\infty))(W(t),\phi_2),\ (W(\zeta(t),\phi_1))\in\varepsilon)$; $\phi_2 \cong \phi_1$.

Докажем транзитивность. Для заданного $\varepsilon\in \Gamma_Z$ найдем такое $\varepsilon_1\in \Gamma_Z$, что $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1 \subset \varepsilon$. По условию, существуют такие s_{12}, s_{23}, $\vartheta_{12}(t)$, $\vartheta_{23}(t)$, что

$$(\forall t\in[s_{12},\infty))(\ (W(t,\phi_1),\ W(\vartheta_{12}(t),\phi_2))\ \in\varepsilon_1), \tag{7}$$

$$(\forall t\in[s_{23},\infty))(\ (W(t,\phi_2),\ W(\vartheta_{23}(t),\phi_3))\ \in\varepsilon_1). \tag{8}$$

Подставляя $\vartheta_{12}(t)$ вместо t в (8), получаем:

$$(\forall\vartheta_{12}(t)\in[s_{23},\infty))(\ (W(\vartheta_{12}(t),\phi_2),\ W(\vartheta_{23}(\vartheta_{12}(t)),\phi_3))\ \in\varepsilon_1). \tag{9}$$

Условие $\vartheta_{12}(t)\geq s_{23}$ эквивалентно условию $t \geq \zeta_{12}(s_{23})$. Отсюда соотношение (9) переписывается в виде с композицией функций:

$$(\forall t\in[\zeta_{12}(s_{23}),\infty))(\ W(\vartheta_{12}(t),\phi_2),\ (W((\vartheta_{23}\vartheta_{12})(t),\phi_3))\in\varepsilon_1). \tag{10}$$

Если выбрать $s_{13}=max\{s_{12},\ \zeta_{12}(s_{23})\}$, то из (7) и (10) следует:

$(\forall t\in[s_{13},\infty))((\ (W(t,\phi_1),\ W(\vartheta_{12}(t),\phi_2))\ \in\varepsilon_1)\wedge(\ W(\vartheta_{12}(t),\phi_2),\ (W((\vartheta_{23}\vartheta_{12})(t),\phi_3))\in\varepsilon_1))$.

Отсюда получаем: $(\forall t\in[s_{13},\infty))((W(t,\phi_1),\ W((\vartheta_{23}\vartheta_{12})(t),\phi_3))\in\varepsilon_1\circ\varepsilon_1)$.

Транзитивность доказана. Лемма доказана.

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство будем обозначать $\Phi^{*=}$.

Обзор результатов по асимптотике решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Для случая, когда $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$, $W(t,\phi(\cdot))$ – решение начальной задачи с начальным условием $\phi\in\Phi{:}=C[-h,0]$ для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [2], [3]) были найдены условия, когда существует такое конечномерное подпространство $\Phi_0 \subset\Phi$, что

$$(\forall\phi\in\Phi)(\exists\phi_0\in\Phi_0)(\ lim\ \{\ ||\ W(t,\phi)\ -\ W(t,\phi_0)||\ t\to\infty\}\ )=0, \tag{11}$$

то есть пространство решений «асимптотически конечномерно». Решения $W(t,\phi_0)$ $(\phi_0\in\Phi_0)$ были названы специальными.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу [4] о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментального типа эволюционных уравнений – разностных уравнений, и что результаты, полученные для разностных уравнений, могут улучшить известные для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Еще отметим, что для решений линейных автономных эволюционных уравнений различных типов вопрос о структуре пространства решений сводится к исследованию соответствующих характеристических (алгебраических в широком смысле) уравнений. Поэтому мы рассматриваем существенно неавтономные уравнения.

Пусть Ω – некоторое нормированное пространство. Рассмотрены четыре последовательности операторов (первая – числа, вторая – «функционалы»): a_n: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$; $b_n{:}\Omega \to\boldsymbol{R}$; c_n: $R\to\Omega$; $d_n{:}\Omega \to\Omega$, $n = 0,1,2,\ldots$ с ограничениями $a_n\in A = [a_-,a_+]$; $||b_n||\leq b>0$, $||c_n||\leq c>0$, $||d_n||\leq d>0$, и система разностных уравнений в $R\times\Omega$:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n,$$

$$y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n, n = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

Были доказаны

Т е о р е м а 1. Если существует такое $v>0$, что

1) $q_- := a_- - v\, b>0$; 2) $c+vd \le v\, q_-$,

то существует такое решение $\{X, Y\}$, что

$$(\forall n\in N)(\ X_n \ge q_-^{\ n};\ ||Y_n|| \le vX_n). \tag{13}$$

Такие решения также названы специальными.

Т е о р е м а 2. Если 1) $d<a_-$; 2) $(a_- - d)^2 > 4bc$, то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1. Можно взять $v = \left((a_- - d) - \sqrt{(a_- - d)^2 - 4bc}\right)/(2b)$.

Т е о р е м а 3. Если $\omega := (a_+ d + bc)\, q_-^{-2} < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\} := lim\ \{\ x_n/X_n : n\to\infty\}$.

Такие специальные решения названы аппроксимирующими.

Т е о р е м а 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ + bv) < 1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, $lim\{\ |x_n - \gamma\{x, y\}X_n| : n\to\infty\} = 0$.

Такие специальные решения названы асимптотически аппроксимирующими.

Данные результаты были применены к дифференциальным уравнениям с запаздыванием.

Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием:

$$z'(t) = P(t)z(t-h),\ t \in R_+,\ h = const > 0, \tag{14}$$

где $P(t)\in[p_-, p_+]$.

Результаты, обзор которых произведен в [2, 3], применительно к (14) дают оценку для наличия асимптотически аппроксимирующих специальных решений: $sup\ \{|P(t)h| : t \in R_+\} < 1/e = 0.367\ldots$

Представим пространство $C[-h,0]$ в виде декартова произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0)=0$. Обозначим:

$$Z_m(t) := W(t+mh, \phi(\cdot)),\ -h \le t \le 0,\ m=1,2,3,\ldots \tag{15}$$

$$S_m Z(\cdot)(t) := Z(0) + \int_{-h}^{t} P(s+mh+h)Z(s)ds \tag{16}$$

– интегральные операторы сдвига по траекториям уравнения (14) на шаг h. Полагая $Z(t)\equiv 1$, оцениваем для (16):

$[a_-, a_+] = 1+h[p_-, p_+] = [1+hp_-, 1+hp_+]$;

$$b = max\left\{\left|\int_{-h}^{t} [p_-, p_+]ds\right| : -h \le t \le 0\right\} = max\{|\,p_-\,|\,h, |\,p_+\,|\,h\}.$$

Если $Z(0) = 0$, то для оператора сдвига в общем виде:

$$SZ(\cdot)(t) = \int_{-h}^{t} P(s)Z(s)ds = \int_{-h}^{0} P(s)Z(s)ds + \int_{0}^{t} P(s)Z(s)ds.$$

Отсюда видно, что можно взять $c = b$; $d = b$.

Расчетами на компьютере доказана

Т е о р е м а 5. Условия наличия асимптотически аппроксимирующего свойства для уравнения (14):

$-\,0.12 \le P(t)h \le 0.39$; $-\,0.10 \le P(t)h \le 0.40$; $-\,0.08 \le P(t)h \le 0.41$;

$-\,0.06 \le P(t)h \le 0.42$; $-\,0.04 \le P(t)h \le 0.43$; $-\,0.02 \le P(t)h \le 0.44$.

Эти результаты дополняют результаты работ [2, 3]. В работах [5–7] получены аналогичные результаты для более узких классов дифференциальных уравнений с запаздыванием. Численные методы были также применены в [8].

Построение объектов при помощи хаусдорфовой асимптотической эквивалентности

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство $\Phi^{*=}$ может содержать и ранее неизвестные математические объекты.

В одномерном случае $\Lambda = \boldsymbol{R}_+$; $\Phi = Z = \boldsymbol{R}$. Фактор-пространство $\Phi^{*=}$ включает в себя:

- классы функций, имеющих конечный предел при $t \to \infty$ (эквивалентные константам);
- класс функций, возрастающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных сверху;
- класс функций, убывающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных снизу;
- классы функций, эквивалентных периодическим и изменяющимся в диапазонах вида $[a,b] \subset \boldsymbol{R}$ при $t>t_0$ для некоторого t_0 функциям;
- различные классы функций, для которых различаются (конечные или бесконечные) значения $\lim\sup\{u(t): t\to\infty\}$ и $\lim\inf\{u(t): t\to\infty\}$

и т. д.

Пусть $\Phi = Z = \boldsymbol{R}^2$. Рассматривается система двух автономных уравнений с начальным условием:

$$x'(t) = y(t), y'(t) = x(t), x(0) = \varphi_1, y(0) = \varphi_2;$$

$$\big(x(t), y(t)\big) W(t, \varphi_1, \varphi_2) =$$

$$= \big((\varphi_1 + \varphi_2)/2 \exp t + (\varphi_1 \varphi_2)/2 \exp(-t),$$

$$(\varphi_1 + \varphi_2)/2 \exp t + (\varphi_2 - \varphi_1)/2 \exp(-t)\,.$$

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов:

- класс эквивалентности, представляемый решением: $W(t,0,0)=(0,0)$ (седло); еще – класс эквивалентности, представляемый решением: $W(t,1,0)$;
- класс эквивалентности, представляемый решением: $W(t,-1,0)$.

Для последних двух классов неизвестны названия. Мы предлагаем:

– «траектории без начала» $\{(x, y) = (t,t): t \in \boldsymbol{R}_+\}$; $\{(x, y) = (-\,t, -\,t): t \in \boldsymbol{R}_+\}$.

Отметим, что такие объекты существуют только для стационарных точек типа «седло», для неустойчивого фокуса или узла они не существуют.

Пусть $\Phi = Z = \boldsymbol{R}^3$. Странный аттрактор, притягивающее множество которого состоит из двух касающихся циклов.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов:

- (поскольку многократный обход в окрестности одного цикла можно заменить однократным обходом) класс эквивалентности, представляемый чередованием обхода циклов;
- класс эквивалентности, представляемый приближением к первому циклу;
- класс эквивалентности, представляемый приближением ко второму циклу.

Литература

1. *Levinson N.* The asymptotic behavior of system of linear differential equations / N. Levinson // American Journal of Mathematics. 1946. Vol. 68. P. 1–6.
2. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис. М.: Наука, 1972. 351 с.

3. *Панков П.С.* Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием / П.С. Панков // Дифференциальные уравнения. 1977. Том 13. № 4. С. 455–462.
4. *Жээнтаева Ж.К.* Асимптотика решений систем линейных операторно-разностных уравнений с переменными коэффициентами / Ж.К. Жээнтаева // Вестник КРСУ. Серия естественные и технические науки. 2016. № 5. С. 34–37.
5. *Mallet-Paret J*. Asymptotic homogenization for delay-differential equations and a question of analyticity / J. Mallet-Paret, R.D. Nussbaum // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2020. Vol. 40. Iss. 6. P. 3789–3812.
6. *Feher A.* Approximation of a Linear Autonomous Differential Equation with Small Delay / A. Feher, L. Marton, M. Pituk // Symmetry-Basel. 2019. Vol. 11. Iss. 10. 10 p.
7. *Ye Yu.* Asymptotic dichotomy in a class of higher order nonlinear delay differential equations / Yu. Ye, H. Liang // Journal of Inequalities and Applications. 2019. Vol. 2. 17 p.
8. *Chen Yu.* Numerical radius for the asymptotic stability of delay differential equations / Yu. Chen, Yi. Wei // Linear & Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65. Iss. 11. P. 2306–2315.