УДК 517.9

ЕЩЕ ОДИН ВАРИАНТ ВВЕДЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Одной из самых больших проблем современной математики в значительной степени является ее оторванность от явлений окружающей жизни. Большой вклад в решение этой проблемы может внести широкое использование линейных разностных уравнений. На языке этих уравнений прекрасно излагаются задачи финансовой математики. И, как можно понять из процесса изучения разностных уравнений, это далеко не единственное их достоинство. В частности, имеется непосредственная связь между теорией линейных разностных уравнений и теорией линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому мы убеждены в необходимости изучения этих уравнений в максимально широком числе математических, экономических и др. курсов. Надеемся, что эта работа поможет приобщиться к линейным разностным уравнениям большому количеству исследователей.

Ключевые слова: линейные разностные уравнения; обыкновенные дифференциальные уравнения; финансовая математика; приложения математики.

СЫЗЫКТУУ АЙЫРМА ТЕҢДЕМЕЛЕРИНЕ КИРИШҮҮНҮН ДАГЫ БИР ВАРИАНТЫ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова

Заманбап математиканын эң чоң көйгөйлөрүнүн бири, бул, көпчүлүк учурда, аны курчап турган жашоо кубулуштарынан обочолонтуу. Сызыктуу айырма теңдемелеринин кеңири колдонулушу бул маселени чечүүгө чоң салым кошо алат. Ушул теңдемелердин тили менен айтканда финансылык математиканын маселелери эң сонун баяндалат. Айырма теңдемелерин изилдөө процессинен бул алардын бир гана артыкчылыгы эмес экендигин түшүнсө болот. Атап айтканда, сызыктуу айырма теңдемелери теориясы менен сызыктуу жөнөкөй дифференциалдык теңдемелер теориясынын ортосунда түздөн-түз байланыш бар. Ошондуктан, биз бул теңдемелерди математикалык, экономикалык жана башка курстарда мүмкүн болушунча көп санда изилдөөнүн зарылдыгына ынандык. Бул эмгек көптөгөн изилдөөчүлөргө сызыктуу айырма теңдемелери менен таанышууга жардам берет деп ишенебиз.

Түйүндүү сөздөр: сызыктуу айырма теңдемелери; кадимки дифференциалдык теңдемелер; финансылык математика; математиканын тиркемелери.

ANOTHER VARIANT OF INTRODUCTION TO LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova

One of the biggest problems of modern mathematics is, to a large extent, its isolation from the phenomena of the surrounding life. The widespread use of linear difference equations can make a great contribution to solving this problem. In the language of these equations, the problems of financial mathematics are beautifully presented. And as can be understood from the process of studying difference equations, this is far from their only advantage. In particular, there is a direct connection between the theory of linear difference equations and the theory of linear ordinary differential equations. Therefore, we are convinced of the need to study these equations in the widest possible number of mathematical, economic, ... courses. We hope that this work will help a large number of researchers become familiar with linear difference equations.

Keywords: linear difference equations; ordinary differential equations; financial mathematics; applications of mathematics.

Введение. Несмотря на то, что процесс моделирования явлений из окружающей жизни на языке разностных уравнений проще, чем использование дифференциальных уравнений, разностные уравнения практически не изучаются в программах обучения экономистов [1–4]. Возможно, дело в том, что соответствующая теория недостаточно развита [5, 6]. Надеемся, что эта работа, в которой дается еще одно, адаптированное для пользователей введение в теорию линейных разностных уравнений, в какой-то мере сумеет восполнить этот пробел.

1. *Идёт крестьянин и плачется: «Эхма! Жизнь моя горькая! Заела нужда совсем! Вот в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они ещё деньги получают? Право, хоть бы кто помочь мне захотел». Только успел это сказать, как глядь, а перед ним чёрт стоит.*

– Что ж, – говорит, – если хочешь, я тебе помогу. И это совсем не трудно. Вот видишь этот мост через реку?

– Вижу! – говорит крестьянин, а сам заробел.

– Ну, так стоит тебе перейти только через мост – и у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдёшь назад, опять станет вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

– Ой ли? – говорит крестьянин.

– Верное слово! – убеждает чёрт. – Только, чур, уговор! За то, что я тебе удваиваю деньги, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки. Иначе не согласен.

– Ну, что же, это не беда! – говорит крестьянин. – Раз деньги всё будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не отдать? Ну-ка, попробуем!

Перешёл он через мост один раз, посчитал деньги. Действительно, стало вдвое больше. Бросил он 24 копейки чёрту и перешёл через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, отдал чёрту и перешёл через мост в третий раз. Денег снова стало вдвое больше. Но только и оказалось их ровнёхонько 24 копейки, которые по уговору ... он должен был отдать чёрту. Отдал он их и остался без копейки.

И пошел крестьянин, палимый солнцем и гонимый ветром…

Сколько же у крестьянина было денег сначала?

Ответ можно найти, начав решение с конца. После третьего перехода через мост у крестьянина стало 24 копейки. Значит, перед этим у него было 12 копеек, и после второго перехода – 36 копеек. Соответственно, до этого перехода 18 копеек, и 42 копейки до первой выплаты чёрту. Отсюда следует, что до первого удвоения (то есть начальная сумма) крестьянин имел 21 копейку.

2. *Дело давнее. В те времена и копейка значила очень много. Перенесемся в современность. Действие происходит около того же моста. Там прогуливался некий олигарх и, что удивительно, думы у него были похожи на те, которые были у крестьянина. «Как это так» – думал он: «У соседа денег больше, чем у меня, несправедливо». В этот момент появился чёрт и предложил олигарху удваивать имеющуюся у того сумму, если олигарх каждый раз будет отдавать ему по 5 120 000 рублей. Сколько денег было у олигарха, который заключил сделку с чертом, если его деньги закончились после 15-ой выплаты чёрту?*

Эту задачу можно решить так же, как и исходную, но перспектива – просчитать 15 шагов – не радует. К тому же возможна ситуация, когда число шагов будет измеряться сотнями.

Нужен несколько иной подход.

Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + c \tag{1}$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка.

Здесь, *a* и *c* – коэффициенты уравнения; x_{n-1} – неизвестное, описывающее состояние системы в момент $(n-1)$; x_n – в момент n.

Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент. В связи с этим, уравнения вида (1) часто называются ***рекуррентными***.

Например, в исходной задаче x_{n-1} – это количество денег у крестьянина до перехода моста в *n*-ый раз, в частности, x_0 – количество денег у крестьянина в начальный момент, x_n – количество денег у крестьянина после *n*-ой выплаты чёрту, коэффициент а равен *2*, коэффициент *b* равен *–24*.

Эти величины связаны уравнением: $x_n = 2x_{n-1} - 24$.

Для того чтобы решить это уравнение, отнимем от обеих сторон уравнения 24: $x_n - 24 = 2x_{n-1} - 24 - 24 => x_n - 24 = 2(x_{n-1} - 24)$ и обозначив $b_n = x_n - 24$, получим $b_n = 2b_{n-1}$. Следовательно, b_n являются членами геометрической прогрессии со знаменателем 2.

Известно, что если члены геометрической прогрессии определяются равенством $b_n = qb_{n-1}$, то два любых члена такой прогрессии связаны равенством $b_n = q^{n-m}b_m$. Поэтому, $b_n = 2^n b_0$.

Вернемся к исходным обозначениям, и получим:

$$x_n - 24 = 2^n\left(x_0 - 24\right) => x_n = 2^n \cdot x_0 - 2^n \cdot 24 + 24 => x_n = 2^n \cdot x_0 - 24(2^n - 1).$$

Таким образом, в исходной задаче: $0 = x_3 = 2^3 \times x_0 - 24(2^3 - 1) => x_0 = 21$.

Точно так же можно решить задачу про олигарха.

Соответствующее разностное уравнение $x_n = 2x_{n-1} - 5120000$.

Отнимем от обеих сторон уравнения 5120000:

$$x_n - 5120000 = 2x_{n-1} - 5120000 - 5120000 => x_n - 5120000 = 2(x_{n-1} - 5120000)$$

и обозначив $b_n = x_n - 5120000$, получим $b_n = 2b_{n-1}$. Поэтому, $b_n = 2^n b_0$.

Далее, вернемся к исходным обозначениям, и получим:

$$x_n - 5120000 = 2^n\left(x_0 - 5120000\right) => x_n = 2^n \cdot x_0 - 5120000(2^n - 1)$$

Таким образом, в задаче про олигарха: $0 = x_{15} = 2^{15} \cdot x_0 - 5120000(2^{15} - 1) => x_0 = 5119843{,}75.$

Итак, выяснилось, что в начальный момент времени олигарх имел 5119843,75 рублей.

3. *Вернемся к нашему крестьянину. Шел он, шел, в тоске и печали, и, к счастью, встретился с человеком, знающим разностные уравнения. Поделился он своей бедой и, получив в ответ 21 копейку и хороший совет в придачу, вернулся к мосту.*

А там его уже поджидает чертёнок, перед которым уже похвастался чёрт.

– Не хочешь ли возобновить сделку – спрашивает чертёнок у крестьянина.

– Отчего ж не возобновить – отвечает крестьянин. – Я буду давать тебе каждый раз 40 копеек вместо 24, при условии, что ты разрешишь мне не платить в первый раз.

Чертёнок быстро подсчитал, что потерю копеек от неуплаты за первый раз он с лихвой возместит за счет повышенной платы уже за два последующих перехода, и согласился. Крестьянин начал ходить вперед и назад, и при этом исправно платил по 40 копеек. Но вскоре чертёнок с удивлением обнаружил, что его деньги, которые он использовал для удвоения денег крестьянина, начали убывать.

После того как чертёнок в десятый раз удвоил деньги крестьянина, его деньги закончились. Поэтому, получив 40 копеек, он под благовидным предлогом сбежал.

Сколько денег заработал крестьянин?

Обратим внимание на то, что повторяющийся процесс имеет место, начиная со второго перехода моста. Поэтому, на математическом языке ситуация будет записана в следующем виде:

$$y_n = 2y_{n-1} - 40\ ;\ \ y_0 = 42;\ \ y_9 = ?$$

Преобразуем разностное уравнение:

$$y_n - 40 = 2y_{n-1} - 40 - 40 \Rightarrow y_n - 40 = 2(y_{n-1} - 40).$$

Следовательно, имеет место равенство: $y_n - 40 = 2^n(y_0 - 40)$.

Отсюда, $y_n = 2^n \cdot y_0 - 40(2^n - 1)$ и $y_9 = 2^9 \cdot 42 - 40(2^9 - 1) = 1064.$

Итак, чертёнок сбежал, когда у крестьянина было 10 рублей 64 копейки. Так как 21 копейка у него была с собой, крестьянин заработал 10 рублей 43 копейки.

4. *Выпоров чертёнка, чёрт послал на мост своего отца, строго-настрого наказав ему брать плату за каждый переход моста. Старый чёрт встретил крестьянина, возвращающегося с книгой, и предложил ему сделку на тех же условиях, на которых крестьянин заключал сделку с самим чёртом. Как это ни странно, но крестьянин согласился. Он только сказал, что он не хочет, чтобы старый черт бегал с одного конца моста на другой – жалко ему старика. Поэтому, он готов платить разом за два перехода – перейдя через мост туда и обратно, он будет отдавать по 48 копеек. Старому черту предложение понравилось, он охотно согласился и присел на краю моста. Но долго сидеть ему не пришлось. Очень быстро 51 рубль и 15 копеек из его денег перешли к крестьянину, после чего старый чёрт предпочел откланяться.*

Сколько раз переходил через мост крестьянин на этот раз?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, нужно заметить, что в этом случае разностное уравнение выглядит так: $z_n = 4z_{n-1} - 48$.

Здесь n – это число переходов через мост туда и обратно, $a = 4$ – так как при переходе моста туда и обратно произойдет два удвоения.

Нужно увидеть, как прийти к геометрической прогрессии. Для этого, давайте вычтем от обеих частей разностного уравнения число d:

$z_n - d = 4z_{n-1} - 48 - d$ такое, что $z_n - d = 4(z_{n-1} - d)$. Отсюда получаем, что

$-4d = -48 - d$. Следовательно, $d = 16$, и $z_n - 16 = 4(z_{n-1} - 16)$.

Тогда, $z_n - 16 = 4^n(z_0 - 16)$ и $z_n = 4^n z_0 - 16(4^n - 1)$. Отсюда,

$$5115 + 21 = z_n = 4^n \cdot 21 - 16(4^n - 1) \Rightarrow 5120 = 4^n \cdot 5 \Rightarrow 1024 = 4^n.$$

Прологарифмируем полученное равенство: $lg1024 = n \cdot lg\,4$. Отсюда, $n = 5$.

Итак, крестьянин 10 раз переходил через мост. (Те, кто помнит о том, что $1024 = 2^{10}$ или 4^5 могут обойтись без логарифмирования.)

5. *Узнав про историю со своим отцом, страшно злой, чёрт вышел к мосту и встретил там студента, который, сбежав с занятий по математике, шел на свидание. Чёрт начал с комплиментов прогульщику и сказал, что решил подарить ему 100 рублей. Но так как студент ему очень понравился, ему не хочется быстро расставаться. Поэтому, деньги будут переданы следующим образом: Каждый раз, как только студент перейдет через мост, количество денег, которое он имеет, уменьшится на 10 %, а черт подарит ему 10 рублей.*

Студент быстро прикинул: у него 5 рублей, после первого перехода он потеряет 0,5 рублей, а получит 10 рублей; если дело так пойдет и далее, то он быстро получит 100 рублей от черта и пойдет дальше, имея 105 рублей.

... Девушка студента давно уже вышла замуж за другого, а он, худой, обросший и одичавший, все еще ходит по тому мосту.

Приведем соответствующие расчеты.

В данном случае разностное уравнение имеет вид:

$$x_n = 0{,}9x_{n-1} + 10\ ;\ x_0 = 5.$$

Давайте не будем продолжать решать отдельные задачи, а решим задачу в общем виде. При этом будем придерживаться ранее опробованной схемы. Итак, преобразуем уравнение $x_n = ax_{n-1} + c$ так, чтобы прийти к геометрической прогрессии. Для этого вычтем от обеих частей разностного уравнения число d: $x_n - d = ax_{n-1} + c - d$ такое, что $x_n - d = a(x_{n-1} - d)$.

То есть должно быть справедливо равенство $c - d = -ad$. Следовательно,

$c = (1 - a)d \leftrightarrow d = c/(1 - a)$, и $x_n - c/(1 - a) = a(x_{n-1} - c/(1 - a))$.

Тогда, $x_n - c/(1-a) = a(x_{n-1} - c/(1-a))$ и $x_n = a^n x_0 - a^n \dfrac{c}{1-a} + \dfrac{c}{1-a}$.

Отсюда получаем, что решение уравнения (1)

$$x_n = ax_{n-1} + c \tag{1}$$

можно получить из формулы:

$$x_n = a^n x_0 + c\frac{1-a^n}{1-a}. \tag{2}$$

Поэтому решение задачи о студенте-прогульщике можно найти из соотношения: $105 = 5 \cdot 0{,}9^n + 10 \cdot \dfrac{1-(0{,}9)^n}{1-0{,}9}$.

Преобразовав это равенство, получим уравнение $0{,}9^n = -5/95$, которое не имеет решения, потому что левая часть уравнения всегда положительна.

В частности, после пятого перехода через мост у студента-прогульщика будет 43,90345 рублей; после десятого перехода будет 66,875548 рублей. Конечно, с каждым переходом количество денег у студента увеличивалось, но чем дальше, тем на меньшую сумму.

Нетрудно установить, что сумма, которая может получиться у студента, ограничена 100 рублями: $0{,}9^n$ в равенстве (5) при очень больших n очень близка к нулю, следовательно, x_n при этом приблизительно 100. А как мы помним, по договору с чёртом, студент сможет уйти после того, как у него будет 105 рублей. Заметим, что 10 рублей, которые каждый раз выдает чёрт, составляют 10 % от 100 рублей – суммы, к которой приближается количество денег у студента. Будь у прогульщика больше знаний, возможно он сумел бы договориться с чёртом на 8 %, вместо 10 %. Тогда задача заиметь 105 рублей была бы выполнима.

Предлагаем вашему вниманию еще несколько задач на разностные уравнения.

6. Задача

В 150-тысячном городе естественный прирост имеет отрицательный знак: (–4 %). Из других мест в этот город ежегодно переезжает на 10 000 человек больше, чем уезжает. Предполагая, что *эти тенденции сохранятся, ответьте на вопросы: а) каким будет население через 8 лет? б) какова максимально возможная численность горожан?*

Переведя условия задачи на математический язык, получим, что нужно решить уравнение $x_n = 0{,}96x_{n-1} + 10000$ *при условии* $x_0 = 150000$.

Тогда, ответ на первый вопрос получим из формулы (2):

$$x_8 = 150000 \cdot (0{,}96)^8 + 10000 \cdot \frac{1 - (0{,}96)^8}{1 - 0{,}96} = 177861.$$

Для ответа на второй вопрос нужно устремить *n* к бесконечности:

$$x = 150000 \cdot 0 + 10000 \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0{,}96} = 25000.$$

В то же время можно догадаться, что население стабилизируется, когда 4 % от него будут равны 10 000.

7. Задача

Однажды барон Мюнхгаузен рассказал такую историю.

– Я с друзьями охотился на уток. Мы рассредоточились по берегам пяти озер. После того как большая стая уток села на 1-м озере, началась стрельба. Охотникам удалось подстрелить одну третью часть стаи и треть утки, а оставшаяся часть стаи перелетела на 2-ое озеро. И на этом озере охотники подстрелили одну третью часть стаи и треть утки, а оставшаяся часть стаи перелетела на 3-ее озеро. ... . И наконец, оставив на 5-м озере третью часть стаи и треть утки, дальше улетела 31 утка.

Слушатели подняли барона на смех, говоря, как это могут летать две трети от утки. Но он клялся и божился, говоря, что это произошло на самом деле. Проверьте, могла ли случится эта история?

На первый взгляд ответ очевиден – барон Мюнхгаузен окончательно заврался. Разве могут летать две трети утки. Но не будем торопиться с наклеиванием ярлыков, и проведем математический анализ ситуации. Обозначив через x_n количество уток, взлетевших с озера с номером *n*, получим разностное уравнение:

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3} \qquad (3)$$

и условие $x_5 = 31$.

Далее, подставив значения в формулу (2), получим:

$$31 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 x_0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (2/3)^5}{1 - (2/3)}$$. Отсюда, $x_0 = 242$.

Итак, из рассказа барона следует, что первоначально в стае было 242 утки. Последовательно подставляя значения в уравнение (3), приходим к неожиданному выводу: Мюнхгаузен поведал совершенно правдивую историю, так как

с 1-го озера взлетели $x_1 = \frac{2}{3} \cdot 242 - \frac{1}{3} = 161$ утка,

со 2-го озера $x_2 = \frac{2}{3} \cdot 161 - \frac{1}{3} = 107$ уток, с 3-го озера $x_3 = \frac{2}{3} \cdot 107 - \frac{1}{3} = 71$ утка,

с 4-го озера $x_4 = \frac{2}{3} \cdot 71 - \frac{1}{3} = 47$ уток,

и с 5-го озера $x_5 = \frac{2}{3} \cdot 47 - \frac{1}{3} = 31$ утка.

8. Задача

Температура воды в стакане в начальный момент времени была 98^0, через минуту 88^0, через 2 минуты 82^0. Определите: а) температуру воды через 5 минут; б) температуру окружающей среды.

Для составления разностного уравнения используем закон Ньютона: изменение температуры тела прямо пропорционально разности между температурой окружающей среды и температурой тела. Обозначим через x_n температуру тела в момент времени *n*, через T – температуру окружающей среды. Тогда, $x_n - x_{n-1} = k\left(T - x_{n-1}\right)$.

Это уравнение, переписанное в виде (1), примет вид:

$$x_n = (1-k)x_{n-1} + kT\,. \tag{4}$$

Подставив начальные условия в уравнение (4), получим систему:

$88 = (1 - k)98 + kT,\ 82 = (1 - k)88 + kT,$

решение которой $1 - k = 0{,}6$; $k\mathrm{T} = 29{,}2$ позволяет ответить на вопросы:

а) $x_5 = 98 \cdot (0{,}6)^5 + 29{,}2 \cdot \frac{1-(0{,}6)^5}{1-0{,}6} = 74{,}944;$ б) $T = 73$.

Стоит отметить, что температуру окружающей среды можно найти по той же формуле, что и при нахождении ответа на пункт а, отправив количество минут в бесконечность – через большой промежуток времени температура тела сравняется с температурой окружающей среды.

Литература

1. *Bailey D.* Mathematics in Economics / D. Bailey. McGraw-Hill, Inc., Bercshire, England, 1998. 485 p.
2. *Cozzens M.* Mathematics with Calculus / M. Cozzens, R. Porter. USA: Heath and Company, 1987. 676 p.
3. *Guterman M.M.* Differential Equations. A Fist Course / M.M. Guterman, Z.H. Nitecki. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1988. 689 p.
4. *Томас Р.* Количественные методы анализа хозяйственной деятельности / Р. Томас. М.: ДиС, 1999. 432 с.
5. *Кыдыралиев С.К.* Основы финансовых вычислений. Практикум / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: Изд-во КРСУ, 2015. 170 с.
6. *Кыдыралиев С.К.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения: учеб. пособие / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: БГИЭиК, 2000. 145 с.