УДК 517.9

ПРЕИМУЩЕСТВА МЕТОДА ЦЕПОЧКИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

В отличие от классического подхода, метод цепочки позволяет решать линейные обыкновенные дифференциальные уравнения высоких порядков, используя единую методику, не зависящую от вида собственных чисел. Такой подход особенно выгоден для тех, кто использует дифференциальные уравнения для решения практических задач, в частности для инженеров. Существенным преимуществом метода цепочки является то, что все вышесказанное про дифференциальные уравнения относится и к линейным разностным уравнениям.

Ключевые слова: линейные обыкновенные дифференциальные уравнения; пространство решений; собственные числа; разностные уравнения; приложения дифференциальных уравнений.

СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ЖАНА АЙЫРМАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ЧЫГАРУУДА ЧЫНЖЫРЧА ЫКМАСЫНЫН АРТЫКЧЫЛЫГЫ

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Классикалык ыкмадан айырмаланып, чынжырча ыкмасы өздүк сандардын түрүнөн көз каранды болбогон бирдиктүү ыкманы пайдалануу менен жогорку тартиптеги кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди чыгарууга мүмкүндүк берет. Мындай ыкма практикалык маселелерди чечүү үчүн дифференциалдык теңдемелерди колдонгондор, айрыкча инженерлер үчүн өтө пайдалуу. “Чынжырча” ыкмасынын олуттуу артыкчылыгы болуп, жогоруда дифференциалдык теңдемелер жөнүндө айтылгандар сызыктуу айырмалык теңдемелерге да тиешелүү.

Түйүндүү сөздөр: кадимки сызыктуу дифференциалдык теңдемелер; чечимдер мейкиндиги; өздүк сандар; айырмалык теңдемелер; дифференциалдык теңдемелерге тиркемелер.

ADVANTAGES OF THE CHAIN METHOD FOR SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL AND DIFFERENT EQUATIONS

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, E.S. Burova

In contrast to the classical approach, the chain method allows one to solve high-order linear ordinary differential equations using a uniform technique that does not depend on the form of eigenvalues. This approach is especially beneficial for those who use differential equations to solve practical problems, in particular for engineers. A significant advantage of the chain method is that all, what was saying of the above about differential equations, applies to linear difference equations.

Keywords: linear ordinary differential equations; space of solutions; eigenvalues; difference equations; applications of differential equations.

В своей знаменитой статье [1] выдающийся математик В.И. Арнольд писал: “В середине двадцатого века была предпринята попытка разделить математику и физику. Последствия оказались катастрофическими. Выросли целые поколения математиков, незнакомых с половиной своей науки и, естественно, не имеющих никакого представления ни о каких других науках. Они начали учить своей уродливой схоластической псевдоматематике сначала студентов, а потом и школьников (забыв о предупреждении Харди, что для уродливой математики нет постоянного места под Солнцем). Поскольку ни для преподавания, ни для приложений в каких-либо других науках схоластическая, отрезанная от физики, математика не приспособлена, результатом оказалась всеобщая ненависть к математикам – и со стороны несчастных школьников (некоторые из которых со временем стали министрами), и со стороны пользователей".

К большому сожалению, мысли, высказанные В.И. Арнольдом, в большой степени справедливы для процесса обучения физиков, инженеров, дифференциальным уравнениям. Курс обычно начинается с солидного куска, посвященного доказательству существования решения. Далее, долго и упорно рассказывается о структуре общего решения линейных дифференциальных уравнений общего вида. И после всего этого выясняется, что получить общее решение уравнения с переменными коэффициентами в явном виде, обычно, невозможно. И только после этого переходят к вопросам, непосредственно интересующим пользователей – к методам, позволяющим найти явное решение уравнений с постоянными коэффициентами [2, 3].

В данной статье мы делаем упор на преимуществах метода разложения в цепочку [4–6]. На наш взгляд, этот метод является наиболее подходящим для тех, кто активно использует дифференциальные уравнения для решения задач из окружающей действительности. В частности, при решении инженерных задач очень часто приходится оперировать тригонометрическими функциями. Им в статье уделено особое внимание. Метод цепочки очень хорошо работает и в случае разностных уравнений. Справедливость этого утверждения иллюстрируется соответствующим примером.

1. ***Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами***

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{1.1}$$

с постоянными коэффициентами a и b можно представить в виде цепочки линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$z' - pz = f(x), \tag{1.2}$$

$$y' - qy = z, \tag{1.3}$$

где коэффициенты p и q являются корнями алгебраической системы $\begin{cases} p+q=-a; \\ p\cdot q=b. \end{cases}$. В справедливости утверждения легко убедиться, подставив значение z из (1.3) в (1.2) и приравняв коэффициенты при y' и y к соответствующим коэффициентам в (1.1).

Из теоремы Виета следует, что корни алгебраической системы есть корни характеристического уравнения для уравнения (1.1): $k^2 + ak + b = 0$.

Процесс представления исходного уравнения второго порядка в виде двух уравнений первого порядка будем называть методом цепочки.

Стоит отметить, что метод цепочки работает и в случае уравнений более высокого порядка.

Пример 1

Решим начальную задачу вида:

$$y'' - 2y' - 3y = -4e^{-x}, \quad y(0) = 7; \; y'(0) = 6. \tag{1.4}$$

Для этого воспользуемся корнями характеристического уравнения: $k^2 - 2k - 3 = 0$. Корни этого уравнения равны –1 и 3.

Разложим дифференциальное уравнение (1.4) в цепочку уравнений:

$$z' - 3z = -4e^{-x}, \tag{1.5}$$

$$y' + y = z. \tag{1.6}$$

Решим уравнение (1.5). Для этого заметим, что его левую часть можно представить в виде $z' - 3z = (ze^{-3x})'e^{3x}$. Тогда уравнение примет удобный для интегрирования вид: $(ze^{-3x})'e^{3x} = -4e^{-x}$. Разделим обе части уравнения на e^{3x} и возьмем интеграл от обеих его частей. Это даст равенство $z = e^{-x} + Ce^{3x}$, где C произвольная постоянная.

Воспользовавшись равенством (1.6) и начальными условиями задачи (1.4), получим: $y'(0) + y(0) = z(0) \Rightarrow 6 + 7 = 1 + C$. Отсюда, $z = e^{-x} + 12e^{3x}$.

Подставим эту функцию в правую часть уравнения (1.6), и получим уравнение вида $y' + y = e^{-x} + 12e^{3x}$. Запишем его в виде $(ye^{x})'e^{-x} = e^{-x} + 12e^{3x}$. Следовательно, $(ye^{x})' = 1 + 12e^{4x}$. Проинтегрировав, получим равенство $ye^{x} = x + 3e^{4x} + C_1$, где C_1 произвольная пстоянная.

Начальное условие $y(0) = 7$, позволяет выяснить, что $C_1 = 4$.

Итак, решение задачи (1.4): $y = xe^{-x} + 3e^{3x} + 4e^{-x}$.

Пример 2

Для того чтобы проинтегрировать уравнение

$$y'' - 14y' + 49y = 90x^{8}e^{7x}, \tag{1.7}$$

воспользуемся корнями характеристического уравнения и разложим уравнение (1.7) в цепочку уравнений:

$$z' - 7z = 90x^{8}e^{7x}, \tag{1.8}$$

$$y' - 7y = z. \tag{1.9}$$

Перепишем уравнение (1.8) в виде $(ze^{-7x})'e^{7x} = 90x^{8}e^{7x}$. Следовательно, $(ze^{-7x})' = 90x^{8}$, и $ze^{-7x} = 80x^{9} + C_1$. Таким образом, уравнение (1.9) примет вид: $y' - 7y = e^{7x}(80x^{9} + C_1)$. Записав его в виде $(ye^{-7x})' = 80x^{9} + C_1$, проинтегрируем, и получим: $ye^{-7x} = 8x^{10} + C_1x + C_2$.

Таким образом, общим решением уравнения (1.7) является функция $y = e^{7x}(8x^{10} + C_1x + C_2)$, где C_1 ,C_2 произвольные постоянные.

Далее рассмотрим случай комплексных корней характеристического уравнения.

Пример 3

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$y'' - 4y' + 5y = -4e^{2x}\sin x. \tag{1.10}$$

Его характеристическое уравнение имеет вид $k^2 - 4k + 5 = 0$. Это квадратное уравнение имеет комплексные корни: $2 - i$; $2 + i$. Покажем, что и в этом случае разложение исходного уравнения в цепочку линейных уравнений первого порядка позволяет довольно просто получить общее решение.

Предварительно отметим, что будет удобнее решить более общую задачу – проинтегрировать уравнение:

$$y'' - 4y' + 5y = -4e^{(2+i)x}. \tag{1.11}$$

Согласно формуле Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, линейность выражения $y'' - 4y' + 5y$ приводит к тому, что общим решением уравнения (1.10) будет мнимая часть общего решения уравнения (1.11) [3].

Корни характеристического уравнения позволяют представить уравнение (1.11) в следующем виде:

$$z' - (2 - i)z = -4e^{(2+i)x}, \tag{1.12}$$

$$y' - (2 + i)y = z. \tag{1.13}$$

Свернем уравнение (1.12): $(ze^{-(2-i)x})'e^{(2-i)x} = -4e^{(2+i)x}$.

Тогда, $(ze^{-(2-i)x})'e^{(2-i)x} = -4e^{(2+i)x} \Rightarrow (ze^{-(2-i)x})' = -4e^{2ix} \Rightarrow ze^{-(2-i)x} = 2ie^{2ix} + C \Rightarrow z = 2ie^{(2+i)x} + Ce^{(2-i)x}$.

Поэтому, из (1.13) $y' - (2+i)y = 2ie^{(2+i)x} + Ce^{(2-i)x}$.

Перепишем его в виде: $(ye^{-(2+i)x})'e^{(2+i)x} = 2ie^{(2+i)x} + Ce^{(2-i)x}$.

Отсюда $(ye^{-(2+i)x})' = 2i + Ce^{-2ix}$ => $ye^{-(2+i)x} = 2ix + C_1e^{-2ix} + C_2$.

Итак,

$$y = 2ixe^{(2+i)x} + C_1e^{(2-i)x} + C_2e^{(2+i)x}, \tag{1.14}$$

где C_1 ,C_2 – произвольные постоянные.

Как было отмечено, общим решением уравнения (1.10) будет мнимая часть функции (1.14). Выделив действительную и мнимую части функции (1.14), получим, что общее решение уравнения (1.10) имеет вид:

$y = e^{2x}(2x\cos x + A\sin x + B\cos x)$, где A, B – произвольные постоянные.

2. *Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами*

Очень важным преимуществом метода прямого интегрирования является то, что он может, фактически без изменений, использоваться в случае дискретного аналога дифференциальных уравнений – при решении разностных уравнений [6].

Решение уравнения второго порядка

$$y_{m+2} + py_{m+1} + qy_m = f(m), \tag{2.1}$$

можно получить, решив цепочку разностных уравнений первого порядка

$$z_{m+1} - k_1 z_m = f(m), \tag{2.2}$$

$$y_{m+1} - k_2 y_m = z_m. \tag{2.3}$$

Здесь p и q постоянные коэффициенты; f – заданная функция, k_1 и k_2 корни квадратного алгебраического уравнения: $k^2 + pk + q = 0$.

Для доказательства, подставим значение z из (2.3) в (2.2), и получим:

$$y_{m+2} - k_2 y_{m+1} - k_1 \left(y_{m+1} - k_2 y_m \right) = f\left(m\right).$$

Далее, перегруппировав слагаемые

$$y_{m+2} - (k_1 + k_2) y_{m+1} + k_1 k_2 y_m = f(m),$$

и воспользовавшись теоремой Виета, убедимся в том, что уравнение (2.1) равносильно цепочке разностных уравнений (2.2)–(2.3).

Доказанное утверждение позволяет свести процесс решения уравнения (2.1) к решению линейных разностных уравнений 1-го порядка вида:

$$x_{n+1} - ax_n = b_n, \tag{2.4}$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-ый период.

Известно [5], что если $b_n = g + hc^n$, решение уравнения (2.4) определяется формулой:

$$x_n = x_n a^n + g\frac{a^n - 1}{a-1} + h\frac{a^n - c^n}{a-c}, \tag{2.5}$$

Формула (2.5) не имеет места в случаях, когда $a = 1$ или $a = c$.

При $a = 1$ имеет место формула:

$$x_n = x_n a^n + ng + h\frac{1-c^n}{1-c} x_n \tag{2.6}$$

а при $a = c.$ формула

$$x_n = x_n a^n + g\frac{a^n - 1}{a-1} + nha^{n-} \ . \tag{2.7}$$

(Еще несколько формул, описывающих решение уравнения (2.5) при некоторых наиболее часто встречающихся вариантах b_n приведено в [5].)

Для иллюстрации применения метода прямого интегрирования рассмотрим паутинообразную модель. В ее рамках предполагается, что цена предыдущего периода определяет количество товара, которое будет предлагаться в текущем периоде. Развивая эту мысль, можно предполагать, что объем предложения текущего периода определяется некоторой линейной комбинацией цен n предыдущих периодов. Это предположение приводит к уравнению порядка ***n.***

Пример 5

Пусть функция спроса задается уравнением $q = 12 - 0,4p$, *функция предложения уравнением* $q = 1,22p - 0,96$, *цена в начальный момент времени равна 8,8, в 1-м периоде 7,9. Определить функцию, описывающую изменение рыночной цены, используя паутинообразную модель, в которой объем предложения в периоде с номером n определяется линейной комбинацией цен предыдущих периодов* $\left(41p_{n-1} + 20p_{n-2}\right)/61$.

Согласно паутинообразной модели, на рынке в каждом периоде продается весь товар, предложенный к продаже. То есть имеет место уравнение:

$$12 - 0,4p_n = 1,22\left[\left(41p_{n-1} + 20p_{n-2}\right)/61\right] - 0,96.$$

Перегруппируем слагаемые, и запишем уравнение в стандартном виде:

$$p_{n+2} + 2,05p_{n+1} + p_n = 32,4. \tag{2.8}$$

Так как характеристическое уравнение $k^2 + 2,05k + 1 = 0$ имеет корни –1,25 и –0,8, по теореме 1 уравнение (2.8) можно переписать в виде цепочки:

$$z_{n+1} + 0,8z_n = 32,4, \tag{2.9}$$

$$p_{n+1} + 1,25p_n = z_n. \tag{2.10}$$

Согласно формуле (2.5) решение уравнения (2.9) есть функция:

$$z_n = z_0(-0,8)^n + 32,4\frac{(-0,8)^n - 1}{-0,8 - 1}. \tag{2.11}$$

Воспользуемся уравнением (2.10) для определения z_0:

$$z_0 = p_1 + 1,25p_0 = 8,8 + 1,25 \cdot 7,9 = 18,9,$$

и перепишем функцию (2.11) в виде $z_n = 18 + 0,9\left(-0,8\right)^n$.

Подставим найденное значение в уравнение (2.10):

$$p_{n+1} + 1,25p_n = 18 + 0,9\left(-0,8\right)^n,$$

и еще раз использовав формулу (2.5), получим решение:

$$p_n = 8,8(-1,25)^n + 0,9\frac{(-0,8)^n - (-1,25)^n}{-0,8 - \left(-1,25\right)} + 18\frac{1 - (-1,25)^n}{1 - \left(-1,25\right)}.$$

Для того чтобы закончить решение, осталось привести подобные члены и записать ответ: $p_n = 8 + 2\left(-0,8\right)^n - 1,2\left(-1,25\right)^n$.

Закючение

Классический подход к решению линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ЛОДУ) предусматривает изучение свойств линейного дифференциального оператора, доказывающих, что размерность пространства решений совпадает с порядком уравнения. При этом предполагается, что коэффициенты уравнения, определяемого этим оператором, могут быть переменными. Далее, переходя к соответствующим уравнениям с постоянными коэффициентами, можно видеть, что функции определенного вида задают фундаментальную систему решений однородного уравнения. При этом вид функций, составляющих эту фундаментальную систему, зависит от того, являются ли собственные числа соответствующего характеристического уравнения: различными действительными, совпадающими или комплексными.

В итоге, мало кто из практиков, нуждающихся в решении конкретных математических задач, способен продраться через эти теоретические дебри.

Поэтому, мы считаем, что должен подвергнуться существенной переработке курс дифференциальных уравнений для будущих физиков и инженеров. На передний план должны быть выдвинуты прямые, конкретные методы решения дифференциальных уравнений. Значительное место в этих новых курсах должен занять метод разложения уравнений высоких порядков в цепочки уравнений первого порядка, который сводит процесс решения дифференциальных и разностных уравнений высоких порядков к последовательному решению уравнений первого порядка.

Литература

1. *Арнольд В.И.* О преподавании математики / В.И. Арнольд // Успехи математических наук. Uspehi Mat. Nauk. 1998. Т. 53. Вып. 1(319).
2. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М.: URSS, 2018. 336 с.
3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. М.: URSS, 2016. 512 с.
4. *Kydyraliev S.K.* Solving Linear Differential Equations by Operator Factorization / S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova // The College Mathematics Journal. USA, 1996. Vol. 27. № 3. С. 199–204.
5. *Кыдыралиев С.К.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова. Бишкек: БГИЭиК, 2000. 100 с.
6. *Кыдыралиев С.К.* Единый взгляд на уравнения Эйлера, Лагранжа и Чебышева / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова // Академический Вестник АУЦА. Бишкек. 2007. Т. 5, № 2. С. 217–223.