УДК 539.215

РАСЧЕТНАЯ ОГИБАЮЩАЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ КРУГОВ НАПРЯЖЕНИЙ ГОРНЫХ ПОРОД

Рычков Борис Александрович, *д.ф.-м.н., профессор, КРСУ, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44, e-mail: rychkovba@mail.ru*
Комарцов Никита Михайлович, *к.ф.-м.н., зав. каф., КРСУ, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44, e-mail: komartsovnm@mail.ru*
Кулагина Маргарита Алексеевна, *аспирант, КРСУ, Кыргызстан, 720000, г. Бишкек, ул. Киевская 44, e-mail: kulagina_m.a@mail.ru*

Аннотация. На основе критерия прочности горных пород Дуйшеналиева-Койчуманова предложен способ построения огибающей предельных кругов Мора при использовании только экспериментального значения предела прочности на сжатие и постулируемую зависимость для угла среза. Рассмотрены случаи неравномерного трёхосного напряженного состояния и переход от одноосного растяжения к одноосному сжатию.

Ключевые слова: трёхосное сжатие, пределы прочности, круги Мора, огибающая предельных кругов.

CALCULATED ENVELOPE OF THE MOHR LIMIT CIRCLES OF STRESS FOR ROCKS

Rychkov Boris Aleksandrovich*, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, KRSU, 720000, Kyrgyzstan, Bishkek, 44 Kievskay st., e-mail: rychkovba@mail.ru*
Komartsov Nikita Michailovich, *Candidate of Physico-Mathematical Sciences, head of a chair, KRSU, 720000, Kyrgyzstan, Bishkek, 44 Kievskay st., e-mail: komartsovnm@mail.ru*
Kulagina Margarita Alekseevna*, Postgraduate Student, KRSU, 720000, Kyrgyzstan, Bishkek, 44 Kievskay st., e-mail: kulagina_m.a@mail.ru*

Abstract. The method, based on the rocks strength criterion of Duishenaliev-Koychumanov's, is proposed for constructing the envelope of the Mohr limit circles, using only the experimental value of the compressive strength and the postulated dependence for the cut angle. The cases of non-uniform triaxial stress state and the transition from uniaxial tension to uniaxial compression are considered.

Keywords: triaxial compression, limits of strength, Mohr's diagram, envelope of limit stress circles.

Введение

В практике горного дела получила наибольшее распространение теория прочности Мора, согласно которой разрушение происходит в результате сдвигов по плоскости, наклоненной под определенным углом к главным напряжениям. Сопротивляемость сдвигу в этой плоскости (касательное напряжение τ) зависит от нормального напряжения (σ) на ней. Однако до настоящего времени нет универсальной зависимости $\tau(\sigma)$, отражающей предельные значения главных напряжений σ_1, σ_3 при разрушении. Поэтому по экспериментальным данным трехосного сжатия по схеме Кармана цилиндрических образцов строят в координатах $\sigma - \tau$ круги (Мора) предельных напряженных состояний, центр (O_c) и радиус (R) которых определяются выражениями:

$$O_c = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3), \qquad R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Огибающая кругов предельных напряжений, разграничивающая область опасных и неопасных напряженно-деформированных состояний горных пород принимается, согласно ГОСТ 211153.8-88 [1], в качестве паспорта прочности. Если уравнение огибающей известно, то можно установить прочность пород при различных видах трехосного напряженного состояния, характеризуемых параметром $c = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$.

Т.Б. Дуйшеналиев и К.Т. Койчуманов [2] представили уравнение предельных кругов Мора в пространстве главных напряжений (σ_1, σ_3) в виде:

$$\sigma_3 = A + \sqrt{\sigma_1^2 + B^2}, \qquad (1)$$

где параметры A и B определяются для конкретной горной породы по экспериментальным значениям пределов прочности при каких-либо двух видах осуществленного в опыте напряженного состояния, которые выбираются в качестве «опорных точек».

Показано [3], что в соответствии с критерием (1) на основании теоремы [4] о существовании огибающей к семейству предельных кругов напряжений в случае трехосного сжатия координатами огибающей будут:

$$\sigma = \frac{\sigma_1(\sigma_1 + 2c(\sigma_1)'_c)}{(\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)'_c)}, \quad \tau = \frac{(1-c)\sigma_1\sqrt{\left(\sigma_1 + c(\sigma_1)'_c\right)(\sigma_1)'_c}}{\sigma_1 + (1+c)(\sigma_1)'_c} \qquad (2)$$

где

$$(\sigma_1)'_c = \frac{c\left[2A^2 - (1-c^2)B^2\right] - A(1+c^2)\sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}}{(1-c^2)^2\sqrt{A^2 - (1-c^2)B^2}} \qquad (3)$$

Для рассматриваемого случая, как установлено в [5], согласно уравнению линии тренда для огибающей имеем:

$$g\sigma^2 + e\sigma - \tau + f = 0, \qquad (g, e, f - const). \qquad (4)$$

В соответствии со значениями инвариантов алгебраического уравнения (4), оно представляет собой параболу [6].

При рассмотрении предельных напряжений в интервале от предела прочности на растяжение до предела прочности при одноосном сжатии вместо соотношений (2) и (3) нужно использовать следующие зависимости [2]:

$$\sigma = \frac{\sigma_3 + \sigma_1\sigma'_3}{1+\sigma'_3}, \quad \tau = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1+\sigma'_3}\sqrt{\sigma'_3} \qquad \left(\sigma'_3 = \frac{\partial\sigma_3}{\partial\sigma_1}\right). \qquad (5)$$

$$\sigma'_3 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + B^2}}. \qquad (6)$$

В этом случае уравнение огибающей также можно аппроксимировать линией тренда вида (4) с соответствующими коэффициентами.

Ставится задача: определить коэффициенты уравнения (4), используя минимальное количество исходных экспериментальных данных для конкретной горной породы и установленное свойство огибающей линии.

1. Случай трехосного напряженного состояния.

Нормальное и касательное напряжения в плоскости, повернутой на угол α относительно главного напряжения σ_1 определяются по формулам:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[(1+c)\sigma_1 - (1-c)\sigma_1 \cos 2\alpha\right], \qquad \tau = \frac{1}{2}(1-c)\sigma_1 \sin 2\alpha , \tag{7}$$

где угол α, если он характеризует положение плоскости среза, зависит [3] от вида напряженного состояния:

$$\cos 2\alpha = \frac{-(1+c) + k\sqrt{(1+k^2)(1-c)^2 - (1+c)^2}}{(1-c)(1+k^2)} . \tag{8}$$

Для многих горных пород $k = 2$. Другие значения k рассмотрены в [3].

Учитывая выражение (4), можно записать следующую систему уравнений.

При $c = 0$:

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha_0, \qquad \sigma = \frac{1}{2}\sigma_c m_0 , \tag{9}$$

где σ_c – предел прочности одноосного сжатия, $\alpha_0 = \alpha\big|_{c=0}$

$$m_0 = 1 - \cos 2\alpha_0 . \tag{10}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha_0 = \frac{1}{4} g\sigma_c^2 m_0^2 + \frac{1}{2} e\sigma_c m_0 + f . \tag{11}$$

При $c > 0$:

$$\frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha = \frac{1}{4} g\sigma_c^2 m^2 + \frac{1}{2} e\sigma_c m + f , \tag{12}$$

где

$$m = (1+c) - (1-c)\cos 2\alpha . \tag{13}$$

Кроме соотношений (9) и (12) из условий касания огибающей предельных кругов вытекают еще два условия.

При $c = 0$:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = g\sigma_c m_0 + e = ctg2\alpha_0 . \tag{14}$$

При $c > 0$:

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = g\sigma_c m + e = ctg2\alpha . \tag{15}$$

Из системы двух уравнений (14) и (15) определим два коэффициента, входящих в уравнение огибающей:

$$g = \left(ctg2\alpha - ctg2\alpha_0\right)/Z , \tag{16}$$

$$e = \left(m\sigma_1 ctg2\alpha_0 - m_0\sigma_c ctg2\alpha\right)/Z , \tag{17}$$

где

$$Z = m\sigma_1 - m_0\sigma_c . \tag{18}$$

Подставляя выражения коэффициентов g и e в уравнение (11), из него выразим третий коэффициент:

$$f = \left(v\sigma_c\sigma_1 + w\sigma_c^2\right)/Z , \tag{19}$$

где

$$v = \frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha_0 - m_0 ctg2\alpha_0\right)m ,$$

$$w = \frac{1}{4}\left[\left(ctg2\alpha_0 - ctg2\alpha\right)m_0^2 + 2m_0^2 ctg2\alpha - 2m_0 \sin 2\alpha_0\right]. \qquad (20)$$

Найденные таким образом константы параболы подставим в ее уравнение, представленное в виде соотношения (12). Из последнего можно выразить главное напряжение σ_1 как функцию от вида напряженного состояния:

$$\sigma_1 = \left(T + \sqrt{T^2 + 4\Pi H}\right)\sigma_c \Big/ 2\Pi . \qquad (21)$$

где

$$\Pi = m\left[2(1-c)\sin 2\alpha - m\left(ctg2\alpha_0 + ctg2\alpha\right)\right],$$
$$T = 2\left[(1-c)m_0 \sin 2\alpha - m_0 m ctg2\alpha + 2v\right],$$
$$H = 4w . \qquad (22)$$

2. Случай предельных напряжений в интервале от предела прочности на растяжение (σ_p) до предела прочности при одноосном сжатии.

В указанном здесь интервале изменения предельных напряжений также можно представить уравнение огибающей (подобное уравнению (4)) к соответствующим кругам. Это уравнение совместно с условиями для определения его констант доставляет следующую систему трех уравнений.

$$\tau_0 = -g_2\sigma_0^2 + e_2\sigma_0 + f_2 ,$$
$$-2g_2\sigma_0 + e_2 = ctg2\alpha_0 ,$$
$$-g_2\sigma_p^2 + e_2\sigma_p + f_2 = 0 , \qquad (23)$$

где

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha_0 , \qquad \sigma_0 = \frac{1}{2}\sigma_c (1 - \cos 2\alpha_0) . \qquad (24)$$

Решая систему уравнений (23), получим:

$$g_2 = \left[0,5\sigma_c \sin 2\alpha_0 - \left(0,5\sigma_c\left(1-\cos 2\alpha_0\right) - \sigma_p\right)ctg2\alpha_0\right] \Big/ Z_2 ,$$
$$e_2 = \left[0,5\sigma_c^2\left(1-\cos 2\alpha_0\right)\sin 2\alpha_0 - \left(0,25\sigma_c^2\left(1-\cos 2\alpha_0\right)^2 - \sigma_p^2\right)ctg2\alpha_0\right] \Big/ Z_2 ,$$
$$f_2 = 0,5\left[\sin 2\alpha_0\left(\sigma_p - \sigma_c\left(1-\cos 2\alpha_0\right)\right) + \left(1-\cos 2\alpha_0\right)\left(0,5\sigma_c\left(1-\cos 2\alpha_0\right) - \sigma_p\right)ctg2\alpha_0\right]\sigma_p\sigma_c \Big/ Z_2 ,$$
$$Z_2 = \left(0,5\sigma_c\left(1-\cos 2\alpha_0\right) - \sigma_p\right)^2 . \qquad (25)$$

3. Пример. Рассмотрим экспериментальные данные для талькохлорида [7]. Для определения констант (A и B) критерия прочности, представленного формулой (1), получены следующие формулы:

$$A = \frac{\left(c^2 - 1\right)\sigma_1^2 + \sigma_c^2}{2c\sigma_1} , \qquad B = \sqrt{A^2 - \sigma_c^2} \qquad (26)$$

Как указано во введении, в качестве «опорных точек» примем экспериментальные значения главных напряжений при $c = 0$ и $c = 0,51$ из имеющихся табличных данных [7]:

$\sigma_1, МПа \cdot 9,81^{-1}$	945	1320	1420	1730	2340	2790	3820	5480
c	0	0,069	0,116	0,178	0,233	0,321	0,407	0,51

В результате получим:

$$A = -3815,38 МПа \cdot 9,81^{-1} , \qquad B = 3696,50 МПа \cdot 9,81^{-1} .$$

Сумма этих двух констант доставляет значение предела прочности на растяжение:

$$\sigma_p = -118,88 МПа \cdot 9,81^{-1}.$$

Для построения огибающей в интервале от предела прочности на растяжение (σ_p) до предела прочности при одноосном сжатии, кроме указанного значения σ_p, потребуется еще значение угла среза при $c = 0$. Согласно формулы (8) при $k = 2$

$$\cos 2\alpha_0 = \cos 2\alpha\big|_{c=0} = 0,6.$$

Используя исходные экспериментальные и расчетные данные, вычислим константы (g_2, e_2, f_2), через которые выражается уравнение огибающей в рассматриваемом случае

$$\tau = -g_2\sigma^2 + e_2\sigma + f_2. \qquad (27)$$

В результате получено:

$$g_2 = 0,002824, \quad e_2 = 0,792696, \quad f_2 = 187,5448. \qquad (28)$$

Проверка: определим координаты представленной таким образом огибающей при ее касании круга Мора на сжатие, т.е. при $c = 0$. Для этого сравним значение координаты τ, определяемого по двум способам. Из рассмотрения круга Мора на сжатие следует:

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_c \sin 2\alpha_0 = \frac{1}{2} \cdot 945 \cdot 0,8 = 378\left(МПа \cdot 9,81^{-1}\right). \qquad (29)$$

При $\sigma = \frac{1}{2}\sigma_c\left(1 - \cos 2\alpha_0\right)$ из формул (27) и (28) получим то же самое значение τ (29).

Этот результат служит доказательством того, что условие сопряжения при переходе от одноосного сжатия к трехосному сжатию выполняется.

Заключение. В случае трехосного сжатия по представленным в п. 1 зависимостям можно построить огибающую к кругам Мора при различных видах напряженного состояния. Кроме того, используя только экспериментальное значение предела прочности на одноосное сжатие и предложенную аналитическую зависимость для определения угла среза, можно получить также расчетную зависимость главного напряжения σ_1 от вида напряженного состояния.

Список литературы

1 ГОСТ 21153.8-88 Породы горные. Метод определения предела прочности при объемном сжатии [Текст]. – Введ. 1988–15–03. – М.: Изд-во стандартов, 1988. – 15 с.

2 Дуйшеналиев Т.Б., Койчуманов К.Т. Уравнение огибающей линии предельных кругов напряжений. Бишкек: Илим, 2006. 130 с.

3 Лужанская Т.А. О пределах прочности горных пород при сложном напряженном состоянии [Текст] / Б.А. Рычков, Т.А. Лужанская // Материалы IV международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – Алматы, 2014. – Т.2. – С. 197-202.

4 Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

5 Рычков Б.А. О критерии прочности горных пород –Изв. КГТУ, 2018, №46,-с.89-93.

6 Корн Г.Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977. 322 с.

7 Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 305 с.