УДК 624.073.02

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧАСТКОМ БЕЗ ОСНОВАНИЯ НА УДАЛЕНИИ ОТ КРАЯ ПОД БАЛКОЙ

Маруфий Адилжан Таджимухамедович, *д.т.н., профессор кафедры “Прикладная механика” Ошского технологического университета им. М.М. Адышева, Кыргызстан, 723500, г.Ош, e-mail: oshtu-marufi@rambler.ru*

Эгенбердиева Акмарал Аширбековна, *старший преподаватель кафедры “Прикладная механика” Ошского технологического университета им. М.М. Адышева, Кыргызстан, 723500, г.Ош, e-mail: lady.mary.10@mail.ru*

Аннотация. В данной статье получено точное аналитическое решение задачи изгиба полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной на удалении от края полубесконечной балки методом обобщенных решений с использованием интегральных преобразований Фурье.

Ключевые слова: метод обобщенных решений, преобразование Фурье, упругое основание, изгиб

THE ALGORITHM FOR CALCULATION OF A SEMI-INFINITE BEAM ON A TWO-PARAMETRIC ELASTIC BASE WITH A PLOT WITHOUT A BASIS ON DELETION FROM THE EDGE UNDER THE BEAM

Marufi Adiljan Tadjimuhamedovich, *doctor of technical sciences, professor of the Department "Applied Mechanics" Osh Technological University named after M.M.Adysheva, Kyrgyz Republic, 723500, Osh, e-mail: oshtu-marufi@rambler.ru*

Egenberdieva Akmaral Ashirbekovna, *Senior Lecturer of the Department "Applied Mechanics" Osh Technological University named after M.M.Adysheva, Kyrgyz Republic, 723500, Osh, e-mail: lady.mary.10@mail.ru*

Abstract. This article discusses the exact analytical solution of the bending problem of a semi-infinite beam on a two-parameter elastic base with regard to incomplete contact with the base in the form of a trench located at a distance from the edge of the semi-infinite beam by the method of generalized solutions using Fourier integral transforms.

Keywords: generalized solution method, Fourier transform, elastic base, bend

Введение

При проектировании ленточных фундаментов зданий и сооружений, опирающихся на грунт в виде лессовых отложений, необходимо учитывать, что под плитой при замачивании этих просадочных грунтов может образоваться провал (неполный контакт основания), подобное явление может произойти в известняках при больших откачках из них воды. Расположение отверстия (неполного контакта) в основании может быть в различных местах конструкций фундаментов: в центре, вблизи края.

Цель исследования

Получение точного аналитического решения задачи об изгибе полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной на удалении от края полубесконечной балки.

Метод исследования

Для получения точного аналитического решения использован метод обобщенных решений с применением интегральных преобразований Фурье.

Рассмотрим задачу изгиба полубесконечной балки, лежащей на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной под балкой шириной *2a* на удлинении *b* от края полубесконечной балки (рис.1).

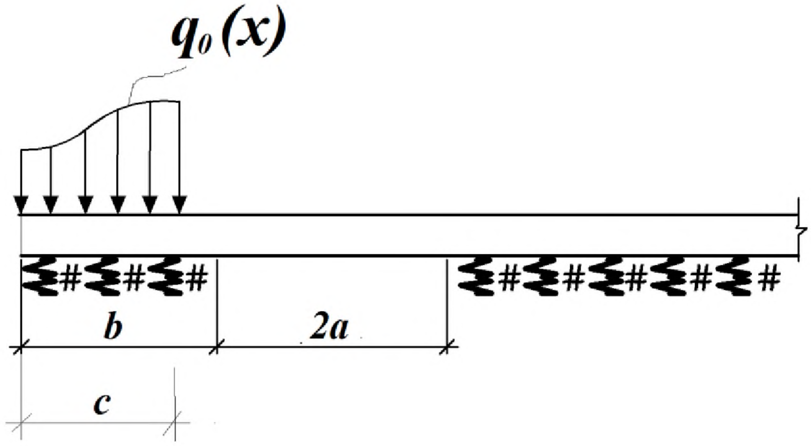

Рисунок 1. Полубесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной на удалении *b* от края полубесконечной балки

Дифференциальное уравнение изгиба балки в безразмерных координатах и функциях имеет следующий вид [1,3,4,6]:

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4}-2r^2\frac{d^2W(x)}{dx^2}+s^4W(x)\theta(b-x)+s^4W(x)\theta(x-b-2a)=q_0(x) \qquad (1)$$

На левом конце балки при $x=0$ следует удовлетворить граничным условиям:

$$L_iW(x)=0 \qquad (i=1,2) \qquad (2)$$

Для наиболее распространённого на практике свободного опирания конца балки:

$$L_1=-\frac{d^2}{dx^2};\; L_2=-\frac{d^3}{dx^3} \qquad (3)$$

Решение уравнения (1) можно получить, используя метод обобщенных решений [6,7], согласно которому следует продлить функцию прогибов от края балки до ∞, т.е.

$\left(-\infty \le x \le +\infty\right)$, а в правую часть уравнения наряду с заданной внешней нагрузкой $q_0(x)$ вводятся дополнительные функции

$$q_i\left(x\right) = A_i L_i \delta\left(x\right) \tag{4}$$

Здесь $\delta(x)$ - дельта функция,

L_i - оператор граничных условий из (3),

A_i - неизвестные пока коэффициенты.

Если на балку действует вертикальная нагрузка, то на дополнительной части при $\left(-\infty \le x \le +0\right)$ можно предположить нагрузку, симметричную заданной. В этом случае второе граничное условие будет удовлетворяться автоматически и в правую часть уравнения (1) достаточно будет ввести одну функцию $q_1(x)$.

Таким образом, правая часть уравнения (1) будет иметь вид:

$$q(x) = q_0(x) + q_1(x) \tag{5}$$

Для решения дифференциального уравнения (1), применим косинус-преобразование Фурье. В результате получим трансформанту Фурье прогиба балки в следующем виде [5,7]:

$$W\left(\lambda\right) = \frac{Q_0(\lambda) + Q_1(\lambda)}{\lambda^4 + 4} + 4\int_b^{b+2a} W(x)\cos\lambda x dx \tag{6}$$

Здесь функции $W(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ представляют собой трансформанту Фурье функций $W(x)$ и $q_0(x)$.

Применим к равенству (6) обратное косинус-преобразование Фурье, получим интегральное уравнение, из которого можно определить функцию прогиба балки:

$$W(x) = W_\infty(x) + \int_b^{b+2a} W(t)K(x,t)dt - A_1\frac{1}{2}\psi_{2\prec}(x) \tag{7}$$

В формуле (7) $W_\infty(x)$ - прогиб в бесконечной балке, условно полностью лежащей на упругом двухпараметрическом основании и загруженной нагрузкой на заданной и дополнительной частях балки.

Ядро этого уравнения $K(x,t)$ определяется из зависимостей [2]. В уравнение (7) входит ещё одно слагаемое с неизвестным коэффициентом A_1. Для его определения можно использовать граничное условие на левом конце балки.

Перейдем к решению интегрального уравнения (7).

Рассмотрим сначала участок балки на котором $\left(0 \le x \le b\right)$. Подставив соответствующее значение ядра $K(x,t)$ в формулу (7), перепишем её в виде:

$$W(x) = W_\infty(x) + \sum_{i=1}^{2} C_{i\prec}\varphi_{i\prec}(x) - A_1\frac{1}{2}\psi_{2\prec}(x) \tag{8}$$

Здесь $C_{i\prec} = \int_0^{b+2a} W(t)\psi_{i\prec}(t)dt$

Определим неизвестный коэффициент A_1. Для этого, как уже упоминалось, используем граничное условие на левом конце балки:

$$W''(0) = 0$$

Продифференцируем дважды уравнение (8), с учетом значения функций $\varphi''_{i\prec}(0)$ и $\psi''_{i\prec}(0)$, в результате найдем:

$$A_1 = -\left[W''_\infty(0) + 2C_{i\prec}\right] \tag{9}$$

Следовательно, функция прогиба может быть записана в виде:

$$W(x)=\left[W_{\infty}(x)+\frac{1}{2}W''(0)\psi_{2\prec}(0)\right]+C_{1\prec}\varphi_{1\prec}(x)+C_{2\prec}\left[\varphi_{2\prec}(x)+\psi_{2\prec}(x)\right] \tag{10}$$

Для определения коэффициентов $C_{i\prec}$ умножим обе части уравнения (10) на $\psi_{i\prec}(x)$, в результате получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_{1\prec}(1-\varPhi_{1\prec 1\prec})-C_{2\prec}F_{2\prec 1\prec}=F_{1\prec} \\ C_{1\prec}\varPhi_{1\prec 2\prec}-C_{2\prec}(1-F_{2\prec 2\prec})=F_{2\prec} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Входящие в эти уравнения функции имеют вид:

$$F_{1\prec}=\frac{1}{4}\left\{e^{-2b}\cos 2b-e^{-2(b+2a)}\cos 2(b+2a)\right\}$$

$$F_{2\prec}=\frac{1}{8}\left\{e^{-2(b+2a)}\left[1-\sin 2(b+2a)\right]-e^{-2b}(1-\sin 2b)\right\}$$

$$(12)$$

$$F_{2\prec 1\prec}=\frac{1}{8}\left\{2\sin 2a\left[\sin 2(b+2a)-\cos 2(b+2a)\right]+e^{-2(b+2a)}\left[1-\sin 2(b+2a)+\cos 2(b+2a)-3\right]-\right.$$
$$\left.-e^{-2b}(2\sin 2b+\cos 2b-3)+4a\right\}$$

$$F_{2\prec 2\prec}=\frac{1}{8}\left\{-2\sin 2a\left[\sin 2(b+a)-\cos 2(b+a)\right]+e^{-2(b+2a)}\left[2\sin 2(b+2a)+\cos 2(b+2a)-3\right]-\right.$$
$$\left.-e^{-2b}(2\sin 2b+\cos 2b-3)+4a\right\},$$

а функции $\varPhi_{i\prec k\prec}$ $(i=1,2;k=1,2)$ определяются выражениями [2] в зависимости от вида нагрузки.

Решение системы уравнений (11) даст:

$$C_{i\prec}=O_i\cdot O^{-1}$$

$$\text{где}\quad \left.\begin{aligned} O&=(1-\varPhi_{1\prec 1\prec})(1-F_{2\prec 2\prec})-\varPhi_{1\prec 2\prec}\cdot F_{2\prec 1\prec} \\ O_1&=F_{1\prec}(1-F_{2\prec 2\prec})+F_{2\prec}\cdot F_{2\prec 1\prec} \\ O_2&=F_{2\prec}(1-\varPhi_{1\prec 1\prec})+F_{1\prec}\cdot F_{1\prec 2\prec} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, определив коэффициенты $C_{i\prec}$ по формулам (13), найдем функцию прогиба (10) и затем, дифференцируя ее, определим значения изгибающих моментов и поперечных сил в балке.

Приведем эти значения для полубесконечной балки, загруженной на краю силой P при $(0\le x\le b)$ (рис.2)

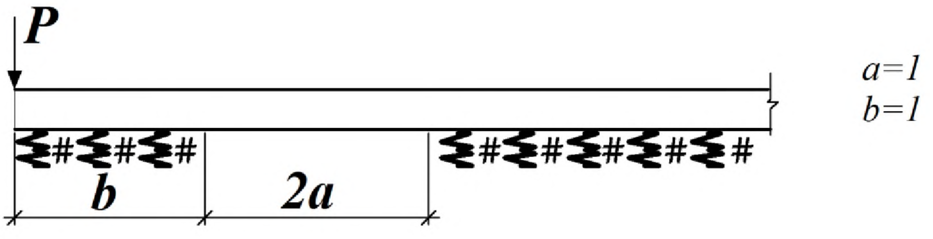

Рисунок 2. Полубесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной на удалении b от края полубесконечной балки, загруженной на краю балки силой P

$$\left.\begin{aligned}
W(x) &= \frac{P}{EJ\beta^3}\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\cos x + C_{1\prec}\cos xchx + C_{2\prec}\left[\sin xshx + e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]\right\}\\
\varphi(x) &= \frac{P}{EJ\beta^2}\left\{-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C_{1\prec}(\cos xshx - \sin xchx) + C_{2\prec}(\cos xshx + \sin xchx + 2e^{-x}\cos x)\right\}\\
M(x) &= -\frac{P}{\beta}\left\{e^{-x}\sin x - 2C_{1\prec}\sin xchx + 2C_{2\prec}\left[\cos xchx - e^{-x}(\cos x + \sin x)\right]\right\}\\
Q(x) &= -P\left\{e^{-x}(\cos x - \sin x) - 2C_{1\prec}(\sin xchx + \cos xshx) + 2C_{2\prec}(\cos xshx - \sin xchx + 2e^{-x}\sin x)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

При загружении края балки длиной $C(C \prec b)$ равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (рис.3), прогиб балки имеет вид:

при $x \le c$

$$W(x) = \frac{q}{8EJ\beta^4}\left\{1 - e^{-c}(\cos c\cos xchx + \sin c\sin xshx) + 4C_{1\prec}\cos xchx + 4C_{2\prec}\sin xshx - \right.$$
$$\left. -\left(\frac{e^{-C}\sin c}{2} - C_{2\prec}\right)e^{-x}(\sin x - \cos x)\right\};$$

при $(C \le x \le b)$

$$W(x) = -\frac{q}{8EJ\beta^4}\left\{e^{-x}(\cos x\cos cchc + \sin x\sin cshc) - 4C_{1\prec}\cos xchx - 4C_{2\prec}\sin xshx + \right.$$
$$\left. +\left(\frac{e^{-C}\sin c}{2} - C_{2\prec}\right)e^{-x}(\sin x - \cos x)\right\}$$

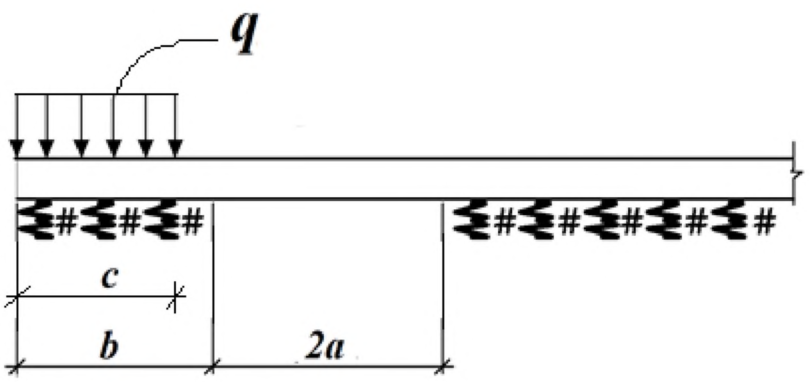

Рисунок 3. Полубесконечная балка на двухпараметрическом упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи, расположенной на удалении b от края полубесконечной балки, загруженной на краю балки равномерно распределенной нагрузкой

Перейдем теперь к решению уравнения (7) на участке $\left[(b+2a) \le x \le \infty\right]$. В этом случае как следует из (7) и [1], прогиб балки для рассматриваемых значений x имеет вид:

$$W(x) = W_\infty(x) + \sum_{i=1}^{2} C_{i\succ}\varphi_{i\succ}(x) - \frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}(x) \quad (15)$$

Очевидно, что значение коэффициента A_1 определяется равенством (9), а для определения коэффициентов $C_{i\succ}$ умножим обе части равенства (15) на $\psi_{i\succ}(x)$, что приводит к системе алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} C_{1\succ}(1-\Phi_{1\succ1\succ})-C_{2\succ}\Phi_{2\succ1\succ}&=F_{1\succ}\\ -C_{1\succ}\Phi_{1\succ2\succ}+C_{2\succ}(1-\Phi_{2\succ2\succ})&=F_{2\succ}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Решая систему (16), найдем

$$C_{i\succ}=O_i\cdot O^{-1}$$

$$\left.\begin{aligned} O&=(1-\Phi_{1\succ1\succ})(1-\Phi_{2\succ2\succ})-\Phi_{1\succ2\succ}\cdot\Phi_{2\succ1\succ}\\ O_1&=F_{1\succ}(1-\Phi_{2\succ2\succ})+F_{2\succ}\cdot\Phi_{2\succ1\succ}\\ O_2&=F_{2\succ}(1-\Phi_{1\succ1\succ})+F_{1\succ}\cdot\Phi_{1\succ2\succ}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Здесь функции $F_{i\succ}$ выражаются через уже известные функции $\Phi_{i\succ K\succ}$, определенные из выражений и функции $\Phi_{i\succ}$, определяемые в зависимости от вида нагрузки из выражений [2]:

$$\left.\begin{aligned} F_{1\succ}&=\Phi_{1\succ}-\frac{1}{2}A_1\left(\Phi_{2\succ1\succ}-\Phi_{1\succ1\succ}\right)\\ F_{2\succ}&=\Phi_{2\succ}-\frac{1}{2}A_1\left(\Phi_{2\succ2\succ}-\Phi_{1\succ2\succ}\right)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Таким образом, значения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил для балки загруженной силой P на краю полубесконечной балки имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} W(x)&=\frac{P}{EJ\beta^3}e^{-x}\left[0,5\cos x+C_{1\succ}\cos x+C_{2\succ}\sin x+C_{2\prec}(\sin x-\cos x)\right]\\ \varphi(x)&=\frac{P}{EJ\beta^2}e^{-x}\left[-\left(0,5+C_{1\succ}\right)(\cos x+\sin x)+C_{2\succ}(\cos x-\sin x)+2C_{2\prec}\cos x\right]\\ M(x)&=-\frac{P}{\beta}e^{-x}\left[\left(1+2C_{1\succ}\right)\sin x-2C_{2\succ}\cos x-2C_{2\prec}(\cos x+\sin x)\right]\\ Q(x)&=-Pe^{-x}\left[\left(1-2C_{1\succ}\right)\left(\cos x-\sin x\right)+2C_{2\succ}(\cos x+\sin x)+4C_{2\prec}\sin x\right]\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

При действии равномерно распределенной нагрузки на участке балки $C\left(C\prec b\right)$ прогиб балки имеет вид:

$$W(x)=-\frac{q}{8EJ\beta^4}\left[e^{-x}(\cos c\,ch c\cos x+\sin c\,sh c\sin x)-4C_{1\succ}e^{-x}\cos x-\right.$$
$$\left.-4C_{2\succ}e^{-x}\sin x+(0,5e^{-c}\sin c-C_{2\prec})e^{-x}(\sin x-\cos x)\right]$$

На оставшемся участке балки при $(b\le x\le b+2a)$ из (7) и [1] следует:

$$W(x)=W_\infty(x)+\sum_{i=1}^{2}\left[\varphi_{i\succ}(x)\int_b^x W(t)\psi_{i\succ}(t)dt+\varphi_{i\prec}(x)\int_x^{b+2a}W(t)\psi_{1\prec}(t)dt\right]-\frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}(t) \tag{20}$$

Для определения прогибов в различных точках этого интервала разделим его на n частей и заменим интегралы конечными суммами. Тогда, прогиб в точке x_k имеет вид:

$$W(x_k)=W_\infty(x_k)+\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{x_k-b}{k}\varphi_{i\succ}(x_k)\sum_{j=0}^{k-1}\psi_{i\succ}(x_j)W(x_j)+\right.$$
$$\left.+\frac{(b+2a)-x_k}{n-k}\varphi_{i\prec}(x_k)\sum_{\xi=k}^{n-1}\psi_{i\prec}(x_\xi)W(x_\xi)\right]-\frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}(x_k); \tag{21}$$

Коэффициент A_1 определяется по формуле (9).

Давая параметру k различные значения, получим систему уравнений, из решения которой определим искомое значение прогиба $W(x_k)$.

Приведем эту систему при $n=5$.

$$C\vec{W} = \vec{F}$$

Здесь матрицы C и $\vec{F}$ определяются формулами [2]. Компоненты матрицы C определяются формулами [7], а компоненты вектора $\vec{F}$ определяются следующим образом:

$$f_{5-k} = -\left\{\sum_{i=1}^{2}\varphi_{i\succ}(x_k)\psi_{i\succ}(b)W(b) + \frac{n-k}{(b+2a)-x_k}\left[W_\infty(x_k) - \frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}(x_k)\right]\right\}; \quad (k=1,2,3,4) \quad (22)$$

Приведем выражение для определения производных функций прогиба:

$$W^{(p)}(x) = W_\infty^{(p)}(x) + \sum_{i=1}^{2}\left[\varphi_{i\succ}^{(p)}(x)\int_b^x W(t)\psi_{i\succ}(t)dt + \int_x^{b+2a} W(t)\psi_{i\prec}(t)dt\right] + T_p(x) - \frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}^{(p)}(x) \quad (23)$$

Здесь p – номер производной, а функции $T_p(x)$ определяются выражениями [2].

Для вычисления значений $W^{(p)}(x)$ в различных точках делим интервал $(b, b+2a)$ на n частей. В результате, получим:

$$W^p(x_k) = W_\infty^{(p)}(x_k) + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{x_k-b}{k}\varphi_{i\succ}^{(p)}(x_k)\sum_{j=0}^{n-1}\psi_{i\succ}(x_j)W(x_j) + \frac{(b+2a)-x_k}{n-k}\varphi_{i\prec}^{(p)}(x_k)\sum_{\xi=k}^{n-k}\psi_{i\prec}(x_\xi)W(x_\xi)\right] +$$

$$+T_p(x_k) - \frac{1}{2}A_1\psi_{2\prec}^{(p)}(x_k) \quad (24)$$

Давая параметру k различные значения $(k=1,2,\ldots,n-1)$, получим систему уравнений для определения значений прогибов $W(x_k)$. В правую часть этой системы входят функции $W_\infty(x_k)$, определяемые для сосредоточенной силы по формуле [2], а для распределенной нагрузки также по формулам [2] в зависимости от положения точки x_k.

Выводы: Итак, получено точное аналитическое решение задачи об изгибе полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании в виде траншеи, расположенной на удалении от края полубесконечной балки.

Список литературы:

1. Маруфий, А.Т. Изгиб полубесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с неполным контактом с основанием на краю балки [Текст]/А.Т. Маруфий, А.А. Эгенбердиева/ Вестник КГУСТА №1, Бишкек, 2019.
2. Маруфий, А.Т. Изгиб бесконечной балки на двухпараметрическом упругом основании с одним участком неполного контакта с основанием [Текст]/А.Т. Маруфий, Э.С. Рысбекова и А.А. Эгенбердиева/ Вестник КГУСТА №1, Бишкек.–2016.– 252-256 с.
3. Маруфий, А.Т. Изгиб различных схем плит на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием [Текст]/ А.Т. Маруфий. – М.: Издательство АСВ, СНГ, 2003. –206с.
4. Маруфий, А.Т. Расчет плит на упругом основании при отсутствии основания под частью плиты [Текст]/ А.Т. Маруфий. – «Основания, фундаменты и механика грунтов» №4,1999. –27-31с.
5. Травуш, В.И. Влияние локального увлажнения лессовых грунтов на перераспределение реактивных отпоров под фундаментами / В.И. Травуш, А.Т. Маруфий, А.В. Цой// Основание, фундаменты и механика грунтов, 2016. -№2.–2-4с.
6. Травуш, В.И. Метод обобщенных решений в задачах изгиба плит на линейно-деформируемом основании [Текст]/ В.И. Травуш. – Строительная механика и расчет сооружений №1, 1982.–24-28 с.
7. Травуш В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на винклеровском основании [Текст]/В.И. Травуш// Сб. трудов «Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры».- М.- 1976.- №4. –С. 83-89