

КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ В СЕЧЕНИИ ТОЛСТОЙ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ

ФОРМАСЫН ЭСКЕ ТУТУП КАЛУУ ЭФФЕКТИСИ БАР ЖООН ПРУЖИНАНЫН КЕСИЛИШЕНДЕГИ БУРАМА МОМЕНТ

Дюшекеев К.Д. – доцент кафедры “МуПИ”; dkuban@rambler.ru

Доталиева Ж.Ж. – доцент кафедры “МуПИ”; zh.dotalieva@gmail.com

Кожошов Т.Т. – доцент кафедры “МуПИ”; tkojoshov7@gmail.com

Джолдошбаева М.Б. – преподаватель кафедры “МуПИ”; meerimdzholdoshbaeva@gmail.com

Краткая аннотация. Рассмотрена цилиндрическая пружина с эффектом памяти формы, нагруженная осевой силой.

Основываясь на общих уравнениях теории упругости, проведены исследования распределения касательных напряжений в сечениях проволоки пружины и определен крутящий момент.

Ключевые слова:

Память формы, цилиндрическая пружина, крутящий момент, касательное напряжение, распределение напряжений.

TORQUE THROUGH A THICK SCREW SPRING WITH A FORM MEMORY EFFECT

Brief annotation. Cylinder spring with shape memory effect loaded with axial force is considered.

Based on the general equations of elasticity theory, studies of the distribution of tangent stresses in the sections of the spring wire have been carried out and the torque has been determined.

Keywords:

Shape memory, cylindrical spring, torque, tangent tension, distribution of tension.

Введение

Обычно цилиндрические винтовые пружины рассчитывают на кручение как прямой брус. Нелинейность распределения касательных напряжений по сечению витка пружины учитывают поправочными коэффициентами, которые принимаются в зависимости от индекса пружины [1].

Аналитическое решение задачи о кручении толстостенного кольца при его нагружении осевой силой предложено С.П.Тимошенко [2]. Он определил напряжения только в крайних точках сечения, по-видимому, из-за отсутствия в то время вычислительных средств, не было рассмотрено распределение напряжений по всему сечению кольца.

Изучение распределения касательных напряжений в поперечных сечениях пружин из толстой проволоки, вычисление крутящего момента является актуальной задачей в свете определения реактивных усилий таких пружин с эффектом запоминания формы.

Касательные напряжения в сечениях проволоки

Общеизвестно, что при растяжении цилиндрической винтовой пружины ее витки в основном работают на кручение. При этом крутящий момент определяется через осевую силу P следующим выражением:

$$M_{кр} = PR \cos \alpha, \quad (1)$$

где α – угол подъема винтовой линии, R – радиус пружины.

Под действием крутящего момента в сечениях витка возникают касательные напряжения, характер распределения которых по сечению рассматривается в настоящей работе.

При кручении прямого бруса круглого поперечного сечения касательные напряжения распределяются по сечению витка пропорционально текущему радиусу, а эпюра напряжений пересекает диаметральною ось в его центре. Такой закон распределения напряжений хорошо согласуется с экспериментальными данными [2]. Как показывают эксперименты [3], при кручении криволинейного бруса, например витка цилиндрической пружины, касательные напряжения распределяются по его сечению не симметрично относительно диаметра сечения, как у прямого бруса. Во внутренних волокнах витка пружины напряжения оказываются больше, чем на внешних волокнах.

Теоретическому объяснению такого факта посвящалось много работ, анализ которых излагается в работе [3]. В одной из них [4], виток пружины рассматривается как сектор кольца и приводится строгое решение задачи распределения напряжений при его кручении. Вкратце изложим суть этой задачи.

Пусть имеется сектор кольца, находящийся под действием двух равных и прямо противоположных сил P , приложенных по оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной к плоскости кольца. Эти силы вызывают одинаковый крутящий момент $M_k = PR \cos \alpha$ во всех поперечных сечениях проволоки кольца.

Если размеры поперечного сечения проволоки малы по сравнению с радиусом R , то при определении напряжений, формулы, выведенные для кручения прямолинейных стержней, могут дать достаточную точность.

В случае мощных винтовых пружин, т.е. при сопоставимых значениях радиуса поперечного сечения и радиуса пружины, должна быть учтена разность в длинах между наружными и внутренними кольцевыми волокнами.

В [4] с применением общих уравнений теории упругости для составляющих касательных напряжений получены следующие выражения:

$$\tau_{r\theta} = \frac{2M_k}{\frac{\pi a^3}{2}} \left[\zeta + \frac{5\xi\zeta}{4R} + \frac{\zeta}{16R^2} (27\xi^2 + 5\zeta^2 - 10a^2) \right]; \quad (2)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{2M_k}{\frac{\pi a^3}{2}} \left[\xi + \frac{7\xi^2}{8R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) + \frac{13\xi^3}{16R^2} - \frac{9\xi\zeta^2}{16R^2} + \frac{1a^2\xi}{4R^2} \right]. \quad (3)$$

Здесь, a – радиус проволоки, R – радиус пружины, ξ, ζ – координаты точек сечения, начало координат расположено в центре тяжести сечения. Компонента напряжения $\tau_{r\theta}$ направлена перпендикулярно к оси пружины, а $\tau_{\theta z}$ – параллельно.

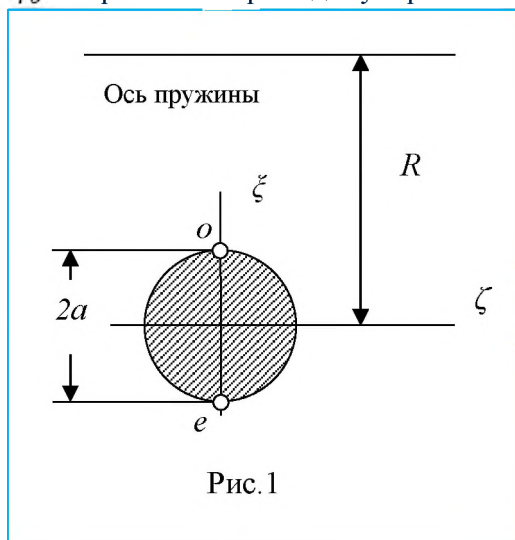


Рис.1

Следует отметить, что в [4] не установлен характер распределения напряжений. Результаты ограничены определением их максимальных значений, которые возникают, согласно (2), (3), на внутренней поверхности проволоки кольца.

Попробуем проанализировать распределение напряжений по сечению проволоки. Вычислим касательное напряжение в крайней внутренней точке O (рис.1). Координаты этой точки $\zeta=0, \xi=a$ и тогда напряжение окажется равным

$$\tau_o = \tau_{\theta z} = \frac{M_k a}{\frac{\pi a^4}{2}} \left(1 + \frac{5a}{4R} + \frac{17a^2}{16R^2} \right). \quad (4)$$

Приведем выражения (2), (3) к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения:

$$t_x = \frac{\tau_{\theta z}}{\tau_o}, \quad t_y = \frac{\tau_{r\theta}}{\tau_o}, \quad \frac{\xi}{a} = y, \quad \frac{\zeta}{a} = x, \quad cn = 1 + \frac{5}{4c} + \frac{17}{16c^2}, \quad \text{индекс пружины } \frac{R}{a} = c. \quad (5)$$

Разделив (2), (3) на (4) с учетом введенных обозначений (5), получим следующие выражения для составляющих напряжений в безразмерном виде:

$$t_x = \frac{1}{cn} \left[x + \frac{5}{4c} xy + \frac{x}{16} (27y^2 + 5x^2 - 10) \right]; \quad (6)$$

$$t_y = \frac{1}{cn} \left[y + \frac{7}{8c} y^2 - \frac{3}{8c} (x^2 - 1) + \frac{13}{16c^2} y^3 - \frac{9}{16c^2} yx^2 + \frac{1}{4c^2} y \right]. \quad (7)$$

Учитывая, что полное касательное напряжение равно

$$t = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}, \quad (8)$$

по выражениям (6), (7) и (8) построим эпюры распределения напряжений, возникающих на осях x и y и показанных на рис. 2,3.

Как видно из эпюры, приведенной на рис.2, полное касательное напряжение на внутренней точке "о" больше чем на наружной точке "е". Эпюра напряжений пересекает ось y не в центре сечения, а на некотором расстоянии δ_y от него в наружную сторону сечения. Выражение для вычисления напряжений на оси x (7) находится под квадратным корнем. Поэтому эпюра их распределения построена только для положительных значений (рис. 3) и

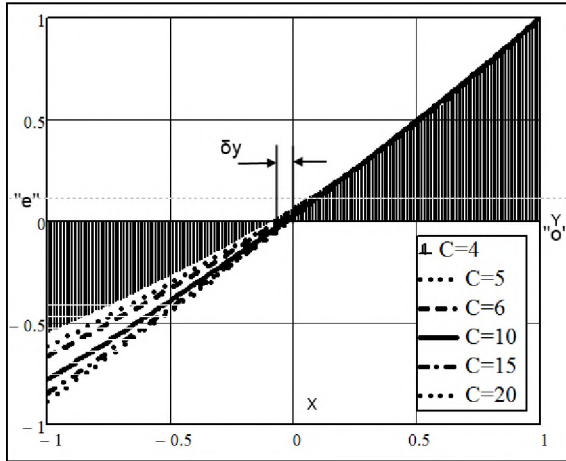


Рис.2

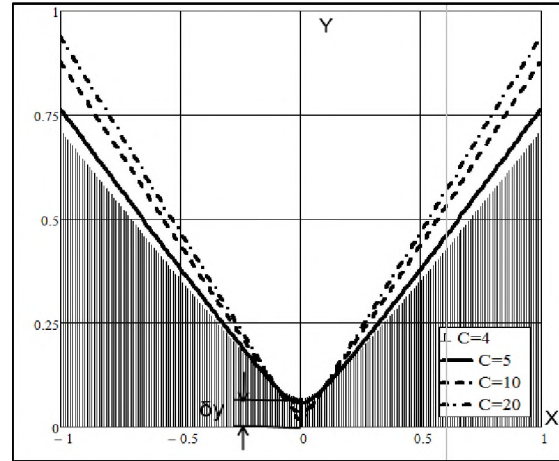


Рис.3

является симметричной относительно оси Y , не пересекая ось X . Минимальное значение напряжения возникает в точке, отстоящей от оси X на расстоянии δ_y . Характер обеих эпюр нелинейный.

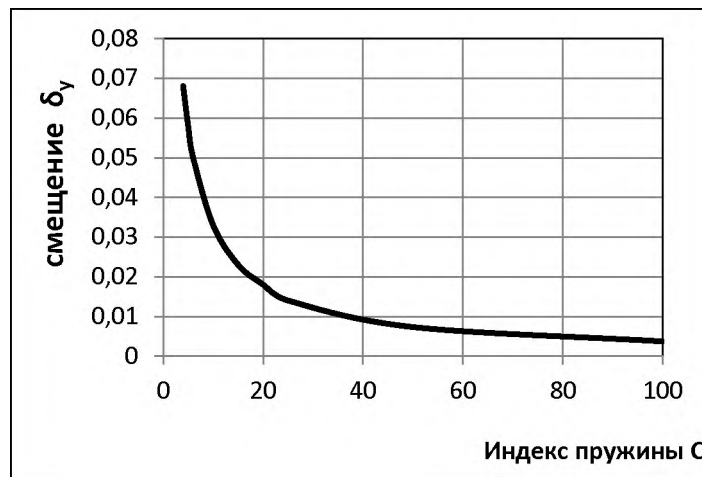


Рис.4

Построим зависимость δ_y от индекса пружины C (рис. 4).

Из представленного рисунка видно, что для толстых пружин, где индекс $C < 20$, невозможно не учитывать отношение радиусов пружины и проволоки. В тонких пружинах ($C > 20$) отношение радиусов практически не влияют на характер распределения напряжений в сечении пружины.

Теперь обратимся к задаче о распределении напряжений по всему сечению проволоки. Из выражений (6), (7) и рис.2,3 становится понятным, что в равноотстоящих от центра круга точках значения напряжения не одинаковы. Попробуем найти точки, в которых эти напряжения могут иметь равные значения. Для этого приравняем полное касательное напряжение некоторому постоянному значению

$$t = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = const. \quad (9)$$

Решая уравнение (9) относительно x и y , найдем геометрическое место точек, в которых равенство напряжений имеет место.

Задавая значение индекса пружины C , вычислим для различных t значения координат x и y . По полученным данным для индекса пружины $C=5$ построены и показаны на рис.5 изолинии. Как видно из представленных графиков, линия 4, в которой напряжение равно $t=1$, касается линии окружности сечения 1 только в точке O , расположенной на внутренней стороне пружины. С уменьшением значения напряжения изолинии начинают пересекать окружности сечения (линия 3). При некотором значении напряжения изолиния 2 касается окружности сечения только во внешней точке "е". Линии,

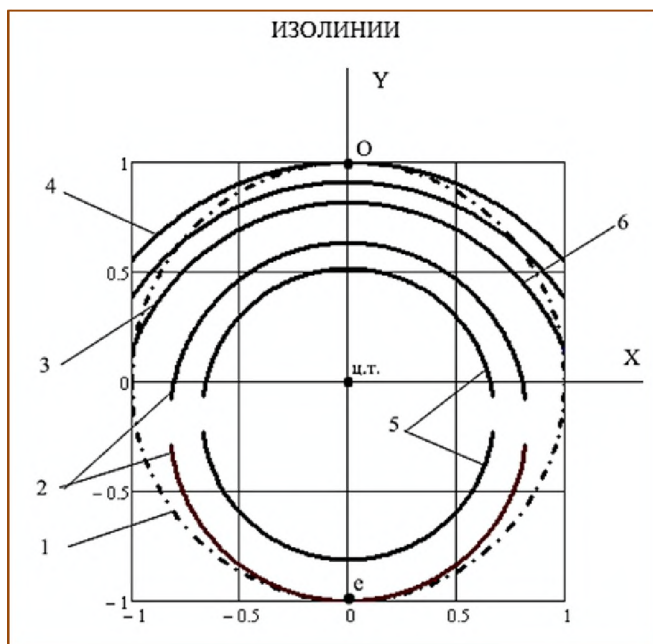


Рис.5

имеющее ещё меньшее значение напряжения (например, линия 5), располагаются внутри окружности сечения. Как видно из рис. 6, изолинии очень похожи на кривые второго порядка, в частности, на окружности. Для определения вида изолинии поступим следующим образом. Из данных, по которым построены изолинии, берем координаты любых трех точек и по ним составим систему из трех уравнений для определения характеристик линии

$$\begin{cases} (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2 \\ (x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2 \\ (x_3 - a)^2 + (y_3 - b)^2 = r^2 \end{cases} \quad (10)$$

Решив образованную систему уравнений, найдём параметры a, b, r .

Затем по найденным параметрам напишем уравнение окружности и построим по этому уравнению окружность. В качестве примера взята изолиния напряжения $t=0.5$, для которой найдено $a = 0, b = -0,261, r = 1,078$.

Построенная по этим данным линия на рис.6 показана позицией 6. Понятно, что она полностью совпадает с линией 3, построенной по формуле (9). Отсюда следует вывод о том, что изолинии по форме являются окружностями, центры которых смещены от центра сечения в наружную сторону. Смещение указанных центров, а также радиусы изолиний показаны в виде графиков на рис. 6,7. По графикам устанавливаем, что с уменьшением значения напряжения центр окружности, в которой оно возникает, приближается к центру сечения, причем характер зависимости получается нелинейным. В тонких пружинах центры изолиний находится ближе к центру сечения, чем в толстых пружинах. Радиусы окружностей, где возникают одинаковые напряжения, почти линейно увеличиваются с увеличением значения напряжения, индекс пружины слабо влияет на эту зависимость (рис.7).

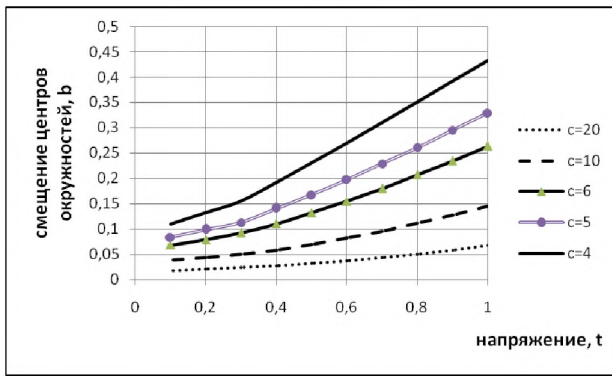


Рис.6

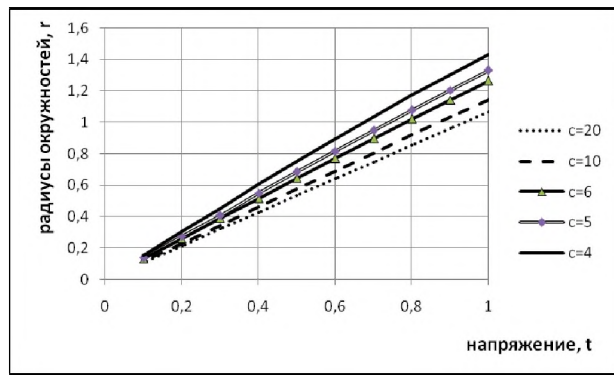


Рис.7

Таким образом, при вычислении крутящего момента в сечениях витка пружины с индексом $C < 20$ необходимо учесть вышеприведенную картину распределения напряжений.

Крутящий момент в сечении проволоки

Теперь рассмотрим определение крутящего момента в сечении проволоки из материала, имеющего диаграмму деформирования с линейным упрочнением (рис.8). Такая диаграмма деформирования характерна для материалов с эффектом памяти формы и представлена в виде трехзвенной ломаной линией в работе [5].

Очевидно, что в пределах упругости модуль сдвига $G = tg\alpha$, в фазовой области $nG = tg\alpha_1$,

где n – коэффициент упрочнения материала.

В зависимости от значения напряжения в сечении могут возникать упругие и фазовые деформации, поэтому с применением принципа суперпозиции крутящий момент складывается из упругой $M_{упр}$ и фазовой $M_{ф}$ составляющих

$$M_{кр} = M_{упр} + M_{ф}. \tag{11}$$

Сначала рассмотрим определение упругой компоненты крутящего момента. Известно, что крутящий момент в сечении проволоки пружины вычисляется как двойной интеграл

$$M_{кр} = \iint (\tau_{r\theta}\zeta + \tau_{\theta z}\xi) d\zeta d\xi, \tag{12}$$

где ζ и ξ – координаты точки сечения.

Компоненты $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ касательного напряжения определяются по формулам (2) и (3):

$$\tau_{r\theta} = Gq \left[\zeta + \frac{5\xi\zeta}{4R} + \frac{\zeta}{16R^2} (27\xi^2 + 5\zeta^2 - 10a^2) \right]; \tag{13}$$

$$\tau_{\theta z} = Gq \left[\xi + \frac{7\xi^2}{8R} - \frac{3}{8R} (\zeta^2 - a^2) + \frac{13\xi^3}{16R^2} - \frac{9\xi\zeta^2}{16R^2} + \frac{1a^2\xi}{4R^2} \right]. \tag{14}$$

где q — некоторая постоянная величина.

Для удобства вычислений выражения (12)-(14) приведем к безразмерному виду, используя обозначения (5).

Подставим выражения (13) и (14) в (12) с учетом обозначений (5). Далее, переходя к полярной системе координат подстановкой $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ (ρ, φ – полярные радиус и угол), вместо интеграла (12) получим

$$M_{кр} = Gqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(\rho, \varphi, c) \rho d\rho, \quad (15)$$

где

$$f(\rho, \varphi, c) = \rho^2 \cos^2 \varphi + \frac{5 \rho \sin \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi}{4c} + \frac{27 \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin^2 \varphi}{16c^2} + \frac{5 \rho^4 \cos^4 \varphi}{16c^2} - \frac{5 \rho^2 \cos^2 \varphi}{8c^2} + \rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{7 \rho^3 \sin^3 \varphi}{8c} - \frac{3 \rho \sin \varphi \rho^2 \cos^2 \varphi}{8c} + \frac{3 \rho \sin \varphi}{8c} + \frac{13 \rho^4 \sin^4 \varphi}{16c^2} - \frac{9}{16c^2} \rho^2 \cos^2 \varphi \rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \rho^2 \sin^2 \varphi}{4c^2}. \quad (16)$$

В случае, когда в сечении возникают только упругие деформации, пределы интегрирования будут следующими:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, \rho_0 = 0, \rho_1 = 1. \quad (17)$$

С учетом (12) для определения $M_{упр}$ можем записать

$$M_{упр} = \frac{Gq\pi a^4}{2} \left(1 + \frac{3}{16c^2} \right). \quad (18)$$

Решая (18) относительно q , будем иметь

$$q = \frac{2M_{кр\ упр}}{G\pi a^4 \left(1 + \frac{3}{16c^2} \right)}. \quad (19)$$

Возвращаясь к формулам (13) и (14), для компонент касательных напряжений будем иметь следующие выражения

$$\tau_{r\theta} = \frac{2M_{кр}}{\pi a^3 \left(1 + \frac{3}{16c^2} \right)} \left[x + \frac{5xy}{4c} + \frac{x}{16c^2} (27y^2 + 5x^2 - 10) \right], \quad (20)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{2M_{кр}}{\pi a^3 \left(1 + \frac{3}{16c^2} \right)} \left[y + \frac{7y^2}{8c} - \frac{3}{8c} (x^2 - 1) + \frac{13y^3}{16c^2} - \frac{9yx^2}{16c^2} + \frac{1y}{4c^2} \right]. \quad (21)$$

Заметим, что для тонких пружин, т.е. при стремлении индекса пружины C к большим значениям, значение напряжений будет совпадать с решением для прямых брусьев и имеет вид

$$\tau = \frac{M_{кр}}{\frac{\pi a^4}{2}} \rho.$$

Теперь рассмотрим случай, когда в сечении к упругим добавляются и фазовые деформации. Границей упругой и фазовой областей является часть линии окружности радиуса r_1 , в которой напряжение равно началу фазовой текучести τ_H^ϕ . Эта линия пересекает окружность сечения в точках C_1 и C_2 (рис.10). В части круга, лежащей выше этой линии,

возникают фазовые деформации, а в нижней части – только упругие деформации. Крутящий момент в этом случае складывается из двух составляющих – упругой $M_{упр}$ и фазовой M_{ϕ} (11).

Выражения для напряжений с учетом диаграммы деформирования (рис.8) будут иметь вид:

– для упругой области

$$\tau = Gqf(\rho, \varphi, c) \quad \text{при} \quad \rho_0 \leq \rho \leq \rho_1, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2; \quad (22)$$

– для упруго-фазовой области

$$\tau = nGqf(\rho, \varphi, c) + \tau_n^{\phi} \quad \text{при} \quad \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2. \quad (23)$$

Здесь ρ_2 – радиус точки O , φ_1, φ_2 – полярные углы точек C_1 и C_2 соответственно (рис.9).

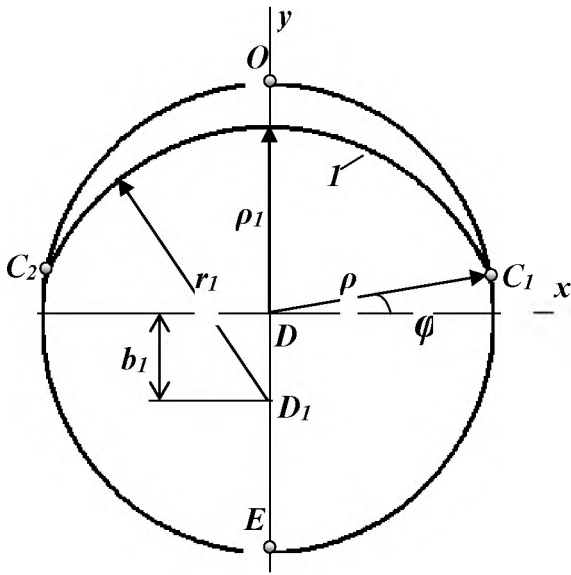


Рис.9.

Запишем выражение для крутящего момента для случая упруго-фазового деформирования

$$M_{кр} = Gqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_0}^{\rho_1} [f(\rho, \varphi, c)] \rho d\rho + nGqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} [f(\rho - \rho_1, \varphi - \varphi_1, c)] \rho d\rho + \iint_{F_{\phi}} \tau_n^{\phi} u dF. \quad (24)$$

В последнем слагаемом элемент площади $dF = u du d\varphi$, пределы интегрирования определяются согласно (23). В этом интеграле u – размерный полярный радиус, при приведении его к безразмерному виду он поделен на радиус сечения – $\rho = u/a$. Как выше говорилось, τ_n^{ϕ} – напряжение начала фазовой текучести на границе упругой и фазовой областей и имеет изолинию 1. Используя (13) и (14) и учитывая, что координаты точки на изолинии определяются величинами ρ_1, φ_1 , запишем выражение для τ_n^{ϕ} в форме

$$\tau_n^{\phi} = Gqa \sqrt{(\tau_{r\theta n}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c))^2 + (\tau_{\theta z n}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c))^2}. \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), будем иметь

$$M_{кр} = Gqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_0}^{\rho_1} [f(\rho, \varphi, c)] \rho d\rho + nGqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} [f(\rho - \rho_1, \varphi - \varphi_1, c)] \rho d\rho + Gqa^4 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \sqrt{(\tau_{r\theta n}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c))^2 + (\tau_{\theta z n}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c))^2} \rho^2 d\rho. \quad (26)$$

Приведем выражение (26) к безразмерному виду. Для этого определим из (20) и (21) при $x=0, y=a$ напряжение начала фазовой текучести τ_n^{ϕ} , полагая в выражении (19) $q = q_{\phi n}$

$$q_{\phi n} = \frac{\tau_n^{\phi}}{Ga \left(1 + \frac{5}{4c} + \frac{17}{16c^2} \right)}. \quad (27)$$

Из выражений (25) и (27) найдем

$$\frac{q}{q_{\text{фн}}} = \frac{\left(1 + \frac{5}{4c} + \frac{17}{16c^2}\right)}{\sqrt{\left(\tau_{r\theta_{\text{н}}}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c)\right)^2 + \left(\tau_{\theta z_{\text{н}}}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c)\right)^2}} \quad (28)$$

Полагая в (18)

$$M_{\text{упр}} = M_{\text{фн}} = \frac{Gq_{\text{фн}}\pi a^4}{2} \left(1 + \frac{3}{16c^2}\right), \quad (29)$$

и разделив (26) на (29), получим выражение крутящего момента в безразмерном виде:

$$m = \frac{M_{\text{кр}}}{M_{\text{фн}}} = A \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_0}^{\rho_1} [f(\rho, \varphi, c)] \rho d\rho + n \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} [f(\rho - \rho_1, \varphi - \varphi_1, c)] \rho d\rho \right] + B \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 d\rho. \quad (30)$$

где

$$A = \frac{2 \left(1 + \frac{5}{4c} + \frac{17}{16c^2}\right)}{\pi \left(1 + \frac{3}{16c^2}\right) \sqrt{\left(\tau_{r\theta_{\text{н}}}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c)\right)^2 + \left(\tau_{\theta z_{\text{н}}}^{\phi}(\rho_1, \varphi_1, c)\right)^2}}, \quad B = 2 \frac{\left(1 + \frac{5}{4c} + \frac{17}{16c^2}\right)}{\pi \left(1 + \frac{3}{16c^2}\right)}.$$

Отметим, что значения полярного угла φ_1, φ_2 и полярного радиуса ρ_1 меняются в зависимости от углубления фазовой деформации по сечению. Здесь в качестве параметра углубления фазой деформации примем значение полярного радиуса ρ_1 при полярном угле $\varphi = \frac{\pi}{2}$. А для определения связи полярного радиуса и полярного угла совместно решаем уравнение окружности сечения и уравнение окружности изолинии, из чего находим смещение центра изолинии b_1 и ее радиус r_1 .

$$\rho = b_1 \sin(\varphi) + \sqrt{r_1^2 - b_1^2 \cos^2(\varphi)} \quad (31)$$

Очевидно, что значения пределов интегрирования равны $\rho_0 = 0, \rho_2 = 1$. Таким образом, задавая значением полярного радиуса ρ_1 , можно вычислить крутящий момент (30)

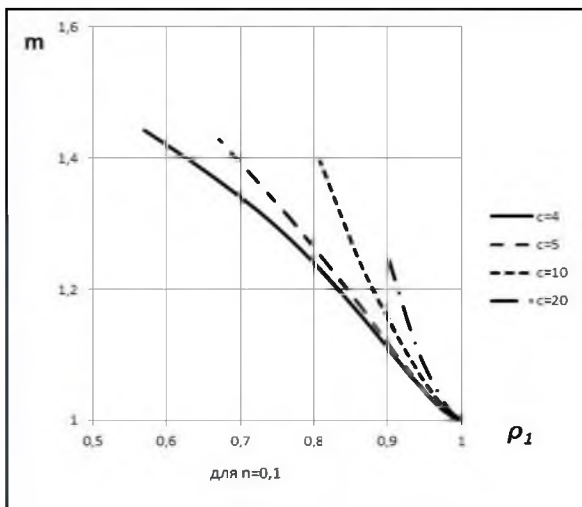


Рис.10

в сечении проволоки. В связи с громоздкостью выражения, получаемого при вычислении интеграла (30), его здесь не приводим. Вычислим крутящий момент в сечении проволоки пружины при различных значениях индекса пружины $c = R/a$ и коэффициента упрочнения n .

Результаты приводим в виде графиков (рис. 10,11).

Выводы.

Как видно из приведенных рисунков, с увеличением глубины фазовых деформаций увеличивается значение крутящего момента. При одинаковом значении крутящего момента у пружин с тонкой проволокой глубина проникновения фазовых деформаций меньше, чем у пружин с толстыми витками. Независимо

от толщины проволоки пружины увеличение коэффициента упрочнения материала приводит к увеличению крутящего момента.

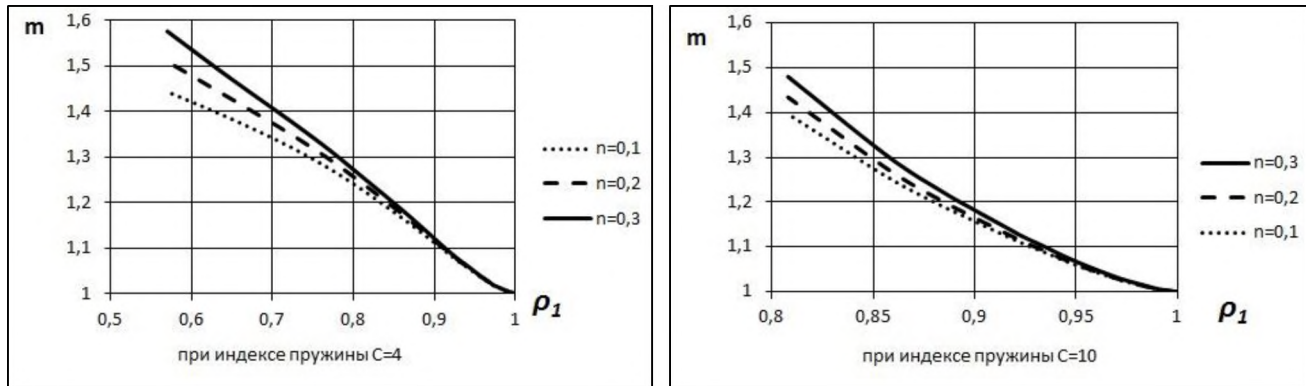


Рис.11

Литература

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М. “Машгиз”, 1962. 456 стр.
2. Писаренко Г.С. Курс сопротивления материалов. —Киев: Изд-во АН УССР, 1964.
3. Пономарев С.Д. Расчет и конструкции витых пружин.—Л.:ОНТИ, 1938.
4. Тимошенко С.П. Теория упругости. —М.:ОНТИ, 1937.
5. Абдрахманов С.А. Аналитическое исследование характеристик цилиндрических пружин с памятью формы / Абдрахманов С.А., Кожошов Т.Т., Джаналиев Н.Р., Доталиева Ж.Ж. Механика Композиционных Материалов и Конструкций: Всероссийский научный журнал. – Москва 2010. - том 16. - №1. -С.64-72.