УДК 532.5

ЭРИХТИН МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ
ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЭРИХА
ON ONE TASK OF ERICH

Абдылдаев М.Ю. т.и.д., Токонбекова К.Ч. т.и.к., доцент
Волик Н.Н. магистрант, Медетбек уулу Д. магистрант
Керимов У. ага окуутучу, Джаманкулов А.А.магистрант

Аннотация: Бул статьяда каналга агым кирген учурдагы Эрихтин маселеси жана анын жалпылоосу каралган. Маселение комплекстик өзгөрмөлөрдүн функциясынын жана гидродинамикадагы Н.Е. Жуковскийдин функциясынын негизинде чечлди.

Аннотация: В данной статье рассматривается задача Эриха и ее обобщение, когда струя жидкости втекает в канал. Решение задачи основано на применении теории функции комплексного переменного и функции Н. Е. Жуковского к гидродинамике.

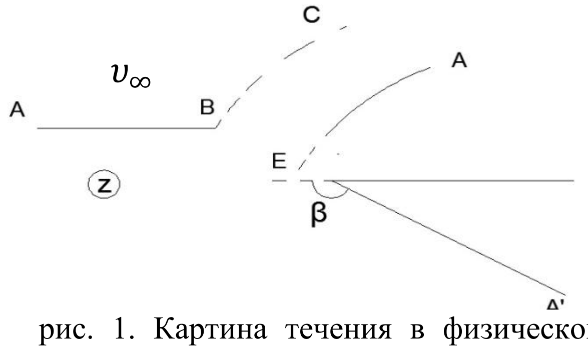
Abstract: This article discusses the problem of Erich and its generalization, when a jet of liquid flows into the channel. The solution of the problem is based on the application of the theory of a function of a complex variable and the function of N. E. Zhukovsky to hydrodynamics.

Ачкыч сөздөр: суюктук, жалпак агымдар теориясы, Эрихтин маселеси, агым, канал, Кристофель-Шварц интегралы, конформндук көрүнүш.

Ключевые слова: жидкость, теория струй, задача Эриха, поток, канал, интеграл Кристоффеля – Шварца, конформное отображение.

Keywords: fluid, jet theory, Erich problem, flow, channel, Christoffel – Schwartz integral, conformal mapping.

В работе Эриха сделана попытка применения теории струй к задачам истечения струи жидкости, вытекающей из отверстия в основной поток жидкости (рис. 1). На этой фигуре линия EA представляет собой свободные линии тока, вдоль которых давление и модуль скорости постоянны. Вдоль линии раздела BC между вытекающей струей и основным потоком, имеющим в бесконечности горизонтальную скорость υ_∞, давление и скорости непрерывны. Плотности жидкости в основном потоке и в струе равны между собой. Задача решается путем конформных отображений областей изменения комплексного потенциала ω и функции Н. Е. Жуковского [1] $\omega = \ln(\upsilon_\infty \frac{dz}{d\omega})$ на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t (Im t ≥ 0, рис. 2).



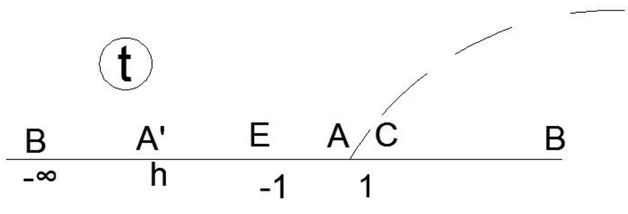


рис. 1. Картина течения в физической плоскости z = x + ιy

рис. 2. Параметрическая плоскость t = $\xi + i\eta$

Выражение для dw/dt находится методом особых точек С. А. Чаплыгина [1], то есть производная dw/dt имеет полюс второго порядка в точках A, C и простой полюс в точке A' (рис. 1).

Изучение истечения из различных сосудов представляет большой теоритический и практический интерес [1], однако математическое исследование возникающих задач, сопряжено со значительными трудностями.

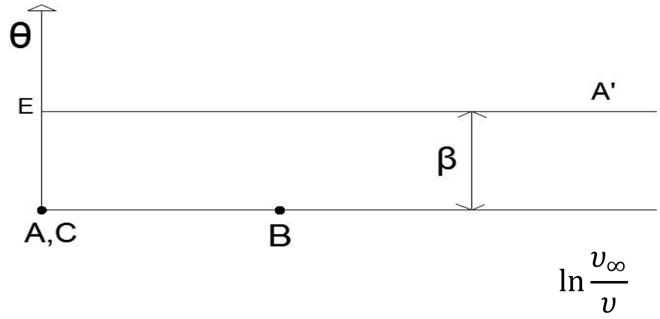


рис. 3. Плоскость Жуковского

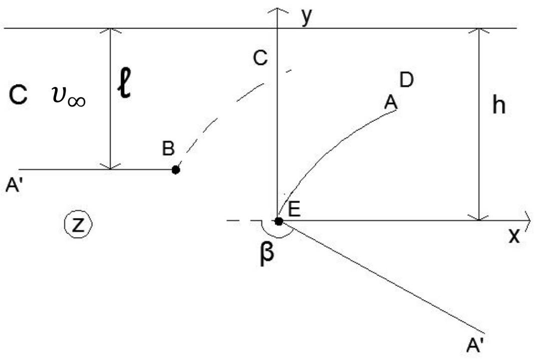


рис. 4. Втекание струи в канал

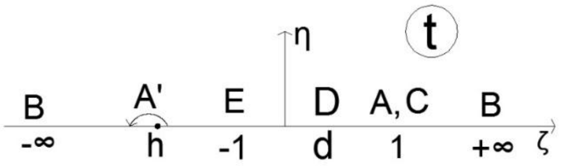


рис. 5. Параметрическая плоскость для канала

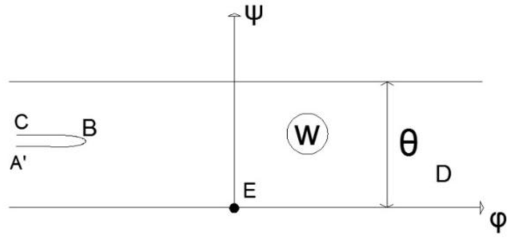


рис. 6. Область изменения комплексного потенциала

$$\frac{dw}{dt} = \frac{(1+h)^2 \cdot v_\infty \cdot c}{\pi \cdot (t+h)(t-1)^2} \qquad (1)$$

Постоянный множитель в этом выражении подобран так, чтобы расход через отверстие был равен заданной величине $v_\infty \cdot c$. Область изменения ω представляет собой полуполосу шириной θ = β (рис. 3) Отображение ω на верхнюю полуплоскость t Эрих находит с помощью формулы Кристоффеля-Шварца [1]:

$$\omega(t) = \frac{\beta}{\pi} \ln \frac{ht + 1 - \sqrt{(h^2-1)(t^2-1)}}{t+h} \qquad (2)$$

Зная dw/dt и ω, можно, конечно, рассчитать любые характеристики потока.

Рассмотрим теперь обобщение задачи Эриха, то есть, истечение струи жидкости, вытекающей из отверстия в основной поток жидкости, и тонущей в канале (рис. 4)

Линия EA представляет собой свободные линии тока, вдоль которых давление и модуль скорости постоянны. Плотности жидкости в канале и в струе равны между собой. Данная задача решается путем конформных отображений областей изменения комплексного потенциала w и $\omega = = \ln(v_\infty \frac{dz}{d\omega})$ на верхнюю полуплоскость параметрического переменного t (Im t ≥ 0, рис. 5).

Пусть на одной граничной линии тока A'ED функция тока φ = 0, а на другой граничной линии тока DC φ = Q, на линии CBA' $\psi = q_A$. При движении вдоль линии тока потенциал скоростей φ, очевидно, меняется от - ∞ до + ∞. Таким образом областью изменения w является полоса шириной Q с разрезом CBA' (рис. 6).

Отображение этой полосы на верхнюю полуплоскость параметрического t (рис. 5) осуществляется с помощью формулы Кристоффеля – Шварца [1] ($\alpha_D = 0$; $\alpha_C = 0$; $\alpha_B = 2\pi$; $\alpha_{A'} = 0$):

$$W(t) = C_1 \int_{-1}^{t} \frac{dt}{(t-1)(t+h)(t-d)} \qquad (3)$$

Так как формулу эту нужно будет интегрировать, то подынтегральное выражение удобно будет разложить на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(t-1)(t+h)(t-d)} = \frac{A_1}{t-1} + \frac{A_2}{t+h} + \frac{A_3}{t-d}.$$

Постоянные A_1, A_2, A_3 вычисляются методом неопределенных коэффициентов:

$$A_1 = \frac{1}{(1+h)(1-d)};\ A_2 = \frac{1}{(1+h)(h+d)};\ A_3 = -\frac{1}{(1-d)(h+d)}. \quad (4)$$

Коэффициент C_1 в формуле (1) определяется при обходе точки A' (t = - h)против часовой стрелки при бесконечно малом t (рис. 5):

$$C_1 = \frac{q_A}{\pi}(1+h)(d+h), \quad (5)$$

(q_A – расход жидкости через отверстие EB, рис. 1).

Так как

$$C_1A_1 = \frac{q_1}{\pi}\cdot\frac{d+h}{1-d};\ C_1A_2 = \frac{q_1}{\pi}; C_1A_3 = \frac{q_1}{\pi}\cdot\frac{1+h}{1-d},$$

то для функции W(t) имеем выражение:

$$W(t) = \frac{q_1}{\pi}\left\{\ln(\frac{1-t}{2})^{\gamma_1}\cdot(\frac{t+h}{h-1})\cdot(\frac{d-t}{1+d})^{\gamma_2}\right\},$$

$$\gamma_1 = \frac{d+h}{1-d};\ \gamma_2 = \frac{1+h}{d-1} \quad (6)$$

Легко убедиться в правильности формулы (6) непосредственно. В верхней полуплоскости t (Im t ≥ 0) функция (6) голоморфна. Значит остается проверить граничные условия. В промежутках A'E (- h < t < - 1) и ED (- 1< t < d) имеем:

$$I_m\,\omega = I_m\,\frac{q_1}{\pi}\ln(\frac{1+t}{2})^{\gamma_1}\cdot(\frac{h+t}{h-1})\cdot(\frac{d+t}{1+d})^{\gamma_2} = 0, \quad (7)$$

Для проверки на линиях DC и CB (1< t < +∞), учтем, что при обходе точки D (t = d) и C (t = 1) коэффициенты C_1' и C_1'' соответственно равны:

$$C_1{}' = \frac{Q}{\pi}(1-d)(d+h) \quad (7a)$$

$$C_1{}'' = \frac{q_c}{\pi}(1+h)(1-d) \quad (7б)$$

Таким же точно образом нетрудно убедиться, что на линиях DC (d < t < 1), CB (1 < t < + ∞) и на BA' (- ∞ < t < - h) часть комплексного потенциала соответственно равны: ψ = Q (расход жидкости вниз по течению канала (точка D) и ψ = q_C (расход жидкости в вверх по течению канала (точка C). Причем $Q = q_{A'} + q_C$.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{q_A}{\pi}(1+h)(d+h)\frac{1}{(t-1)(t+h)(t-d)}. \quad (7в)$$

Исследуем теперь область изменения $\omega = \ln\frac{v_\infty}{v} + j\theta$

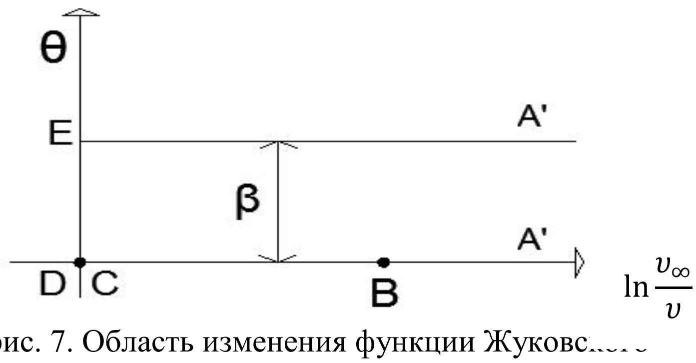


рис. 7. Область изменения функции Жуковс...

Вдоль линии тока A'E мнимая часть функции ω постоянна и равна β, а действительная меняется от нуля (E) до + ∞ (A'). На линии ED скорость $\upsilon_D = \upsilon_\infty$ откуда $\ln\frac{\upsilon_\infty}{\upsilon} = 0$. С другой стороны θ вдоль ED изменяется от β (E) до нуля (D), откуда ω изменяется от нуля до iβ. Так как в точке C $\upsilon = \upsilon_\infty$ и θ = 0, то точка C совпадает с точкой D (рис. 7). На линии CB, где $\upsilon_B < \upsilon_\infty$ и θ = 0, функция ω изменяется от нуля в точке C (D) до $\omega = \ln\frac{\upsilon_\infty}{\upsilon_B} > 1$ точки B (рис. 7). На линии BA' мнимая часть функции ω равна нулю, а действительная меняется от точки B до A', где υ = 0.

Таким образом область изменения ω представляет собой полуполосу, которую можно рассматривать как треугольник EDA', вершина A' которого удалена в бесконечность (рис. 7).

Для получения отображения треугольника EDA' на верхнюю полуплоскость t (Im t ≥ 0, рис. 5) можно воспользоваться формулой Кристоффеля – Шварца [1]. Углы треугольника при вершинах EDA' соответственно равны $\pi/2, \pi/2, 0$ Пусть в вершинах треугольника имеет значения: $t_E = -1, t_D = d, t_{A'} = -h.$ Отсюда формула Кристоффеля – Шварца дает выражение:

$$\omega(t) = C_1{}^* \int_d^t \frac{dt}{\sqrt{(t+1)(t-d)}(t+h)}. \qquad (8)$$

Интеграл вычисляется с применением одной из трех подстановок Эйлера.

$$\omega(t) = C_1{}^* \frac{1}{\sqrt{(h-1)(h+d)}} \ln\frac{\sqrt{(h+d)(t+1)} - \sqrt{(h-1)(t-d)}}{\sqrt{(h+d)(t+1)} + \sqrt{(h-1)(t-d)}} \qquad (9)$$

При обходе точки t = - h по бесконечно малой полуокружности против часовой стрелки (см. рис. 5) имеем выражение для коэффициента $C_1{}^*$:

$$C_1{}^* = -\frac{\beta}{\pi}\sqrt{(h+d)(h-1)}. \qquad (10)$$

Следовательно, окончательно для функции ω(t) имеем выражение:

$$\omega(t) = +\frac{\beta}{\pi} ln\frac{\sqrt{(h+d)(t+1)} - \sqrt{(h-1)(t-d)}}{\sqrt{(h+d)(t+1)} + \sqrt{(h-1)(t-d)}}. \qquad (11)$$

Правильность формул (7 в) и (11) легко проверить непосредственно. При d = 1 они дают решение задачи Эриха [1].

Перейдем к выражению геометрических элементов через параметры входящие в уравнения (6) и (11). Для выражения l и h нужно найти функцию z(t). Из (6) и (11) следует, что

$$z(t) = \frac{1}{\upsilon_\infty}\int \frac{\upsilon_\infty dz}{dw} dw = \frac{1}{\upsilon_\infty}\int \frac{1}{\frac{dw}{\upsilon_\infty dz}} \cdot \frac{dw}{dt} \cdot dt = \frac{1}{\upsilon_\infty}\int \frac{1}{\zeta^*}\frac{dw}{dt} \cdot dt,$$

где $\zeta^* = 1/\zeta.$

Так как $\omega = \ln\zeta = -\ln\frac{d\omega}{\upsilon_\infty dz} = +ln\frac{\upsilon_\infty}{\upsilon} + i\theta,$

то

$$\zeta = \left\{\frac{\sqrt{(h+d)(t+1)} - \sqrt{(h-1)(t-d)}}{\sqrt{(h+d)(t+1)} + \sqrt{(h-1)(t-d)}}\right\}^{\frac{\beta}{\pi}}. \qquad (12)$$

Откуда

$$\zeta^* = \frac{dw}{\upsilon_\infty dz} = \left\{\frac{\sqrt{(h+d)(t+1)} + \sqrt{(h-1)(t-d)}}{\sqrt{(h+d)(t+1)} - \sqrt{(h-1)(t-d)}}\right\}^{\frac{\beta}{\pi}}. \qquad (13)$$

Следовательно,

$$z(t) = \frac{q(1+h)(d+h)}{\pi v_\infty} \int \left\{ \frac{\sqrt{(h+d)(t+1)} + \sqrt{(h-1)(t-d)}}{\sqrt{(h+d)(t+1)} - \sqrt{(h-1)(t-d)}} \right\}^{\frac{\beta}{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \frac{dt}{(t-1)(t-d)(t+h)}. \qquad (14)$$

Уравнения (6),(11) и (14) дают общее решение задачи в параметрической форме.

Литература:

1. М. И. Гуревич. Теория струй идеальной жидкости. Гос.издат. физико – математической литературы. Москва 1961.
2. М. Ю. Абдылдаев. Плоские задачи теории струй идеальной жидкости. НАН КР. Институт автоматики. Бишкек, Илим. 1999 г.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории струй комплексного переменнного. Москва, наука 1973 г.
4. Г. Биркгоф, Э Сарантонелло. Струи, следы и каверны. Издат. «Мир» Москва. 1964 г.