

УДК 532.5

ЖЫЛЧЫКТАН СУЮКТУКТУН КАВИТАЦИЯ МЕНЕН АГЫП ЧЫГУУСУ  
 ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ ЖИДКОСТИ, ВЫТЕКАЮЩИЙ ИЗ ОТВЕРСТИЯ С КАВИТАЦИЕЙ  
 THE OUTFLOW OF A JET OF FLUID FLOWING FROM THE HOLE WITH CAVITATION

*М.Ю.Абдылдаев; К.Ч.Токонбекова; Медетбек уулу Д  
 Волик Н.Н.; Джаманкулов А.А.  
 И.Арабаев ат. КМУ*

**Аннотация:** Кавитция эффектиси менен аккан суюктуктун динамикасы каралды. Кокс-Клейдендин белгилүү кавитация схемасы колдонулду. Маселе комплекстик өзгөрмөлөрдүн функциясынын теориясы менен чечилди. Маселенин чыгарылышы параметрикалык түрдө алынды.

**Аннотация:** Рассматривается динамика жидкости с эффектом кавитация. Используются известная схема кавитации Кокса-Клейдена. Задача решается методом теории функции комплексного переменного. Решение задачи получены в параметрической форме.

**Abstract:** The dynamics of a fluid with the effect of cavitation is considered. The well-known Cox-Clayden cavitation scheme is used. The problem is solved by the method of the theory of a function of a complex variable. The solution of the problem is obtained in parametric form.

**Ачык сөздөр:** кавитация, динамика, параметр, комплекстик көрүнүш.

**Ключевые слова:** кавитация, динамика, параметр, комплексный вид.

**Keywords:** cavitation, dynamics, parameter, complex view.

В работе Эриха [4] сделана попытка применения теории струй к задачам истечения струи жидкости, вытекающей из отверстия в основной поток жидкости. Эрихом рассмотрены четыре схемы, две из которых относятся к теории струй, и отображены на рис. 1 и рис. 2. На этих фигурах линии EA представляют собой свободные линии тока, вдоль которых давление и модуль скорости постоянны. Вдоль линий раздела BC между вытекающей струей и основным потоком, имеющим в бесконечности горизонтальную скорость  $v_\infty$ , давления и скорости непрерывны. Плотности жидкости в основном потоке и в струе равны между собой. В обоих случаях задачи решаются путем конформных отображений областей изменения комплексного потенциала  $W$  и  $\omega = \ln(v_\infty dz/dw)$  на верхнюю полуплоскость параметрического переменного  $t$  (рис. 3).

В данной работе рассматривается задача Эриха истечения струи жидкости, вытекающей из отверстия в основной поток жидкости с образованием эффекта кавитации по схеме аналогической схеме Кокса – Клейдена [1] (рис.4)

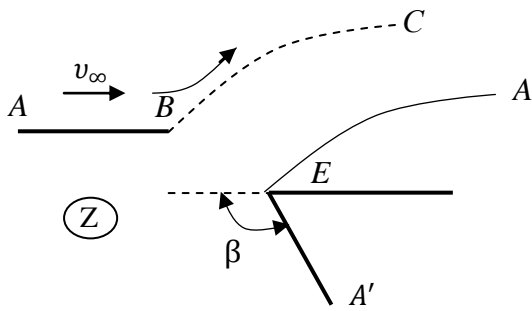


Рис. 2.

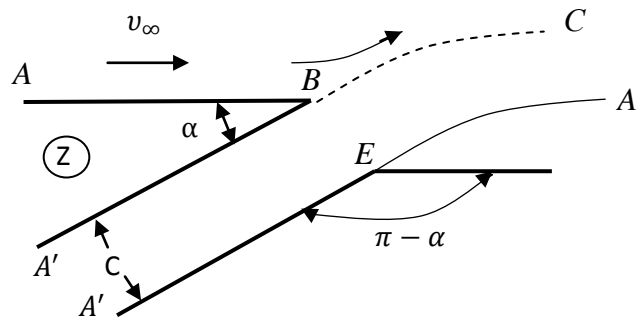


Рис. 1.

Задача решается методом К.Е. Жуковского [1]

$$\omega = \ln \zeta = -\ln \frac{dw}{v_0 dz} = -\ln \frac{v}{v_0} + i\theta$$

Для решения задачи (рис. 4) отобразим области изменения  $dw/(V_0 dz)$  и  $W = \varphi + i\psi$  на верхнюю полу плоскость параметрического переменного  $t$  ( $\text{Im}t \geq 0$ ), (рис. 5).

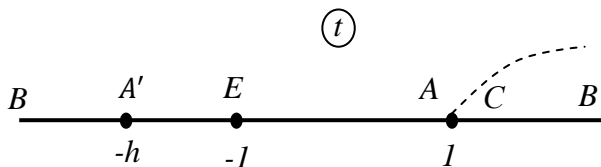


Рис. 3.

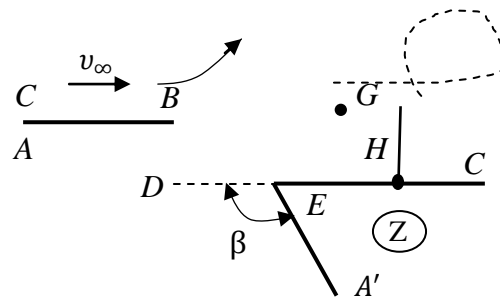


Рис. 4.

Пусть на одной граничной линии тока AEGD функция тока  $\psi = 0$ , а на другой граничной линии тока DH  $\psi = q_D$ , на линии BA,  $\psi = q_A$ . На поверхности струи EGD абсолютная величина скорости равна  $V_0$ . При движении вдоль линий тока потенциал скорости  $\varphi$ , очевидно меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом, область изменения  $W$  представляет собой верхняя полу плоскость  $W$  с разрезами вдоль линий DHC и CBA, которого можно рассматривать как пятиугольник  $A'DHCB$  (рис.6) с вершинами в точках

$$A'(\alpha_{A'} = 0); D(\alpha_d = 0); H(\alpha_H = 2\pi); C'C(\alpha_{C'C} = -\pi) \text{ и } B(\alpha_B = 2\pi),$$

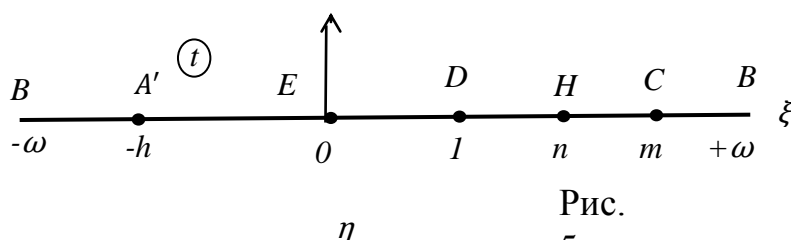


Рис.

Найдем конформное отображение  $W$ . Для получения отображения «пятиугольника» (рис. 6) на верхнюю полуплоскость  $t$  (рис. 5) легко воспользоваться формулой Кристоффеля – Шварца [1]

$$W(t) = C_1 \int_0^t \frac{(t-n)dt}{(t+h)(t-1)(t-m)^2}, \quad (1)$$

где постоянная  $C_1$  определяется следующим образом: при обходе точки  $t = 1$  (точка D, рис. 5) по бесконечно малой полуокружности против часовой стрелки (рис. 5) имеем

$$C_1 = \frac{q_D (1+h)(1-m)^2}{\pi (n-1)} \quad (2)$$

При обходе точки  $t = -h$  по бесконечно малой полуокружности против часовой стрелки (рис. 5) имеем:

$$C_1 = \frac{q_{A'} (1+h)(h+m)^2}{\pi (h-n)} \quad (2')$$

Формулы (2) и (2') дают связь между параметрами  $n, h, m$  а также между расходами

$$q_{A'} \text{ и } q_D : -\frac{q_{A'} (h+m)^2}{q_D (h+n)} \quad (2'')$$

Так как формулу (1) нужно будет интегрировать, то – интегральное выражение (1) удобно будет разложить на элементарные дроби:

$$\frac{(t-n)}{(t+h)(t-1)(t-m)^2} = \frac{A_1}{t+h} + \frac{A_2}{t-1} + \frac{A_3}{(t-m)^2} + \frac{A_4}{t-m} \quad (3)$$

Постоянные  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  определяются обычными способами (методом неопределенных коэффициентов)

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} A_1(t=-h) = \frac{h+n}{(h+1)(h+m)^2}; \quad A_2(t=1) = \frac{1-n}{(h+1)(1-m)^2}; \quad A_3 t=m = \frac{m-n}{(h+m)(m-1)^2}; \\ A_4 \text{ определяется из равенства, что } A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0; \text{ где } A_4 = -(A_1 + A_2) \\ A_4 = \frac{-1}{1+h} (n+h+h^2+h^3+m^2-2nm+nm^2-2mh^2) \end{array} \right.$$

Окончательно, после интегрировании функция (1) имеет вид:

$$W(t) = C_1 \left\{ \ln \left( \frac{t+h}{h} \right)^{A_1} \cdot (1-t)^{A_2} \cdot \left( \frac{m-t}{m} \right)^{A_4} + A_3 \frac{t}{m(m-t)} \right\}, \quad (5)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  определяются по формуле (4). Для установления правильности формулы (5) достаточно, очевидно, проверить выполнение граничных условий.

В промежутке  $A'ED$  ( $-h < t < 1$ ) имеем:

$$JmW = Jm \left\{ C_1 \left[ \ln \left( \frac{t+h}{h} \right)^{A_1} \cdot (1-t)^{A_2} \cdot \left( \frac{m-t}{m} \right)^{A_4} + A_3 \frac{t}{m(m-t)} \right] \right\} = 0$$

На линии  $DH$  ( $1 < t < n$ )  $JmW = C_1 \left\{ \ln \left( \frac{t+h}{h} \right)^{A_1} e^{-i\pi} \left( \frac{m-t}{m} \right)^{A_4} + A_3 \frac{t}{m(m-t)} \right\} = q_D$

где  $C_1 i\pi A_2 = iq_D$ , таким же точным образом нетрудно убедиться, что на линии тока  $A'B$  мнимая часть (через отверстие  $BE$ ) комплексного потенциала  $\psi = q_{A'}$ , функция  $W(t)$  (формула (5)) аналитична везде в верхней полуплоскости  $t$ . Найдем теперь функцию

$$\omega = \ln \frac{V_0}{v} + i\theta \quad (6)$$

При отображении область течения на плоскость Жуковского (рис. 7) имеем с полуполосу с разрезом вдоль действительной оси которого можно рассматривать как пятиугольник  $EDHCA'$  с вершинами в точках:

$$E \left( \alpha_E = \frac{\pi}{2} \right); D \left( \alpha_D = \frac{\pi}{2} \right); A' (\alpha_{A'} = 0); H (\alpha_H = 0); C (\alpha_C = 2\pi)$$

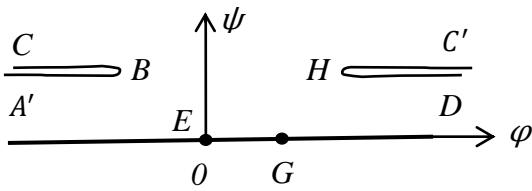


Рис. 6.

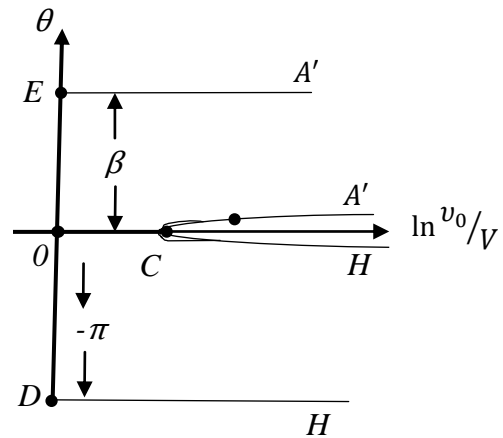


Рис. 7.

Из за громоздкости вычисления интеграла для отображения этой области на верхнюю полуплоскость  $t$ , отображение осуществляется при помощи интеграла Шварца [2]:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{JmF(\xi)}{\xi - t} d\xi \quad (7)$$

При этом функция  $F(t)$  легко определяется с помощью известного решения задачи об определении функции комплексного переменного в верхней полуплоскости по ее заданной мнимой части, то есть по формуле (7). Зная  $F(t)$  можно немедленно определить и

$$\omega(t) = F(t)\sqrt{t(t-1)} \quad (7a)$$

Для нахождения отображения области изменения  $\omega$  вводим вспомогательную функцию:

$$F(t) = \frac{\omega}{\sqrt{t(t-1)}} = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{v}\right) + i\theta}{\sqrt{t(t-1)}} \quad (8)$$

Для нашего случая, имеем на линиях:

$BA'(-\infty < t < h)$ ,  $ED(0 < t < 1)$  и  $HC(n < t < m)$   $JmF(t) = 0$ , а на линиях

$$A'E(-h < t < 0) \text{ и } DH(1 < t < n)$$

мнимая часть соответственно равны

$$JmF(t) = \frac{\beta}{\sqrt{t(t-1)}} \quad JmF(t) = \frac{-\pi}{\sqrt{t(t-1)}};$$

Для нашего случая формула (7) имеет вид:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-h}^0 \frac{\beta d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)}(\xi-1)} - \int_1^n \frac{\pi d\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)}(\xi-1)} \right\}$$

Интегрируя интегралы с применением одна из трех подстановок Эйлера окончательно, для функции  $dW/(V_0 dz)$  имеем выражение:

$$\zeta'(t) = \frac{dW}{V_0 dz} = \left\{ \frac{\sqrt{t(h+1)} - \sqrt{h(t-1)}}{\sqrt{t(h+1)} + \sqrt{h(t-1)}} \right\}^{\beta/\pi} \left\{ \frac{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right\} \quad (10)$$

Легко убедиться в правильности формулы (10) непосредственно. На верхней полуплоскости  $t(Jm(t \geq 0))$  функция голоморфна. Значит остается проверить граничные условия или одно и то же соответствие (10) с рис. 3 и рис. 4. В формуле (10) обеспечено ненужное соответствие характерных точек.

$$\zeta'(-h) = 0; \quad \zeta'(0) = \left\{ \begin{matrix} V = V_0 \\ \theta = \beta \end{matrix} \right\}; \quad \zeta'(1) = \left\{ \begin{matrix} V = V_0 \\ \theta = -\pi \end{matrix} \right\}; \quad \zeta'(n) = 0; \quad \zeta'(m) = \left\{ \begin{matrix} V = V_0 \\ \theta = 0 \end{matrix} \right\};$$

Уравнения (5) и (10) дают общее решение задачи в параметрической форме. Полученные формулы позволяют найти интересную для данной задачи число кавитации  $\Lambda = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} - 1$ , (11) где  $V_\infty$ -скорость набегающего потока в бесконечности. Это скорость легко определить, полагая в (10)  $t = m$  (точка С):

$$\frac{V_\infty}{V_0} = \left\{ \frac{\sqrt{m(h+1)} - \sqrt{h(m-1)}}{\sqrt{m(h+1)} + \sqrt{h(m-1)}} \right\}^{\beta/\pi} \left\{ \frac{\sqrt{n(m-1)} + \sqrt{m(n-1)}}{\sqrt{n(m-1)} - \sqrt{m(n-1)}} \right\} \quad (11)$$

Таким образом выражение для числа кавитации окончательно имеет вид:

$$\Lambda = \left\{ \frac{\sqrt{m(h+1)} + \sqrt{h(m-1)}}{\sqrt{m(h+1)} - \sqrt{h(m-1)}} \right\}^{2\beta/\pi} \left\{ \frac{\sqrt{n(m-1)} - \sqrt{m(n-1)}}{\sqrt{n(m-1)} + \sqrt{m(n-1)}} \right\}^2 - 1 \quad (12)$$

Перейдем к выражению геометрических элементов через параметры, входящие в уравнения (5) и (10).

$$\zeta'(t) = \frac{1}{V_0} \int_1^t \zeta(t) \frac{dW}{dt} dt \quad (13)$$

$$\text{где: } \zeta(t) = \left\{ \frac{\sqrt{t(h+1)} + \sqrt{h(t-1)}}{\sqrt{t(h+1)} - \sqrt{h(t-1)}} \right\}^{\beta/\pi} \left\{ \frac{\sqrt{n(t-1)} + \sqrt{t(n-1)}}{\sqrt{n(t-1)} - \sqrt{t(n-1)}} \right\} \quad (14)$$

$$\frac{dW}{dt} = C_1 \frac{(t-n)}{(t+h)(t-1)(t-m)^2} \quad (15)$$

#### Литература:

1. М.И. Гуревич. Теория струи идеальной жидкости. М. 1961.
2. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.. Методы теории функций комплексного переменного. М-Л. 1951.
3. Абдылдаев М.Ю., Бегалиев А.М.. Кавитационное обтекание пластины по схеме Кокса-Клейдена. Труды международной конференции «Рахматулиновско-Ормонбековские чтения». Бишкек 2017.