УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ СО СТАЦИОНАРНОЙ ДОСТИЖИМОСТЬЮ
ХИМИЯЛЫК РЕАКЦИЯНЫН МАСЕЛЕСИНИН ЧЕЧИМИНИН СТАЦИОНАРДЫК АБАЛГА ЖЕТИШҮҮСҮНҮН АСИМТОТИКАСЫ
ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A CHEMICAL REACTION PROBLEM WITH STATIONARY REACHABILITY

Алымкулов К., Кожобеков К.Г.(Ош, ОшГУ)
keldibay@mail.ru, kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Аннотация: *Мында химиялык реакциянын маселесинин чечиминин стационардык абалга жетишүүсүнүн асимтотикасы изилденет. Чечимдин эки зоналуу асимтотикасы тургузулду.*
Аннотация: *Здесь строиться асимптотика решения химической реакции со стационарной достижимостью в конце реакции. Построена двухзонная асимптотика задачи.*
Abstract: *The asymptotic behavior of the solution of a chemical reaction with stationary reachability at the end of the reaction is constructed here. The two-zone asymptotic behavior of the problem is constructed.*
Ачкыч сөздөр: *Моделдик теңдеме, Коши маселеси , озгөчө чекит, асимптотика.*
***Ключевые слова**:* *Модельное уравнение, задача Коши, особая точка , асимтотика.*
Keywords: *The model equation, Cauchy problem, singular point, asymptotic.*
Химическая задача описывается следущей задачей Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\varepsilon}{\beta}(1+\beta-T)e^{\frac{T-1}{\varepsilon T}}, \tag{1}$$

$$T(0)=1. \tag{2}$$

Его точное решение задается формулой

$$t(T)=\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{T\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon T}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)\right\}-$$
$$\frac{\beta}{\varepsilon}\left\{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-e^{-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}}Ei\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon(1+\beta)}\right)\right\}.$$

где $Ei(x)=P.V.\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{y}e^{y}dy$, здесь знак P.V. означает интеграл понимается в главном значении Коши.

Получения асимптотику решения задачи (1)-(2) из точного решения является трудной задачей.

Сначала построим внешнее асимптотическое решение, которого будем искать в виде:

$$T=1+\varepsilon T_1+\varepsilon^2 T_2+\ldots+\varepsilon^n T_n+\ldots, \tag{3}$$

где $T = T(t),\ T_i = T_i(t)$ – пока неизвестные функции.

Подставляя ряд (3) в (1) , после обычных процедур , получаем следущеедля определения неизвестных функций получаем следующую асимптотику:

$$T = 1 + \varepsilon ln\frac{1}{1-t} + \varepsilon^2\frac{1}{1-t}\left\{a_0 + \frac{\varepsilon}{1-t}a_1 + \ldots + \left(\frac{\varepsilon}{1-t}\right)^n a_n + \ldots\right\}, \varepsilon \to 0, \quad (4)$$

где $a_n = const.$

Ряд (4) является асимптотическим только на отрезке $[0,1-\varepsilon^\alpha],\ (0<\alpha<1)$

В точке t=1 теряется свойство асимптотичности. Поэтому в окрестности точки t=1 введем растянутую переменную σ.

Пусть

$$1-t = e^{-\sigma/\varepsilon}, 0 \le \sigma < 1$$

Тогда задача (1) приводится к виду:

$$\frac{du(\sigma)}{d\sigma} = \frac{1}{\beta}\left(1+\beta-u(\sigma)\right)e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\sigma-\frac{1}{u(\sigma)}\right)} \quad (5)$$

где $u(\sigma) = T(1-e^{-\sigma/\varepsilon})$.

Чтобы получить ограниченное решение, требуем

$$1-\sigma-\frac{1}{u(\sigma)} = \Pi(\varepsilon), \varepsilon \to O \Leftrightarrow u(\sigma) \backsim \frac{1}{1-\sigma}, \varepsilon \to 0$$

Поэтому, решение (5) ищем в виде:

$$u(\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} + \varepsilon u_1(\sigma) + \varepsilon^2 u_2(\sigma) + \ldots + \varepsilon^n u_n(\sigma) + \ldots \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), для определения неизвестных функций получаем следующие уравнения:

$$\frac{1}{(1-\sigma)^2} = \frac{1}{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2 u_1}, \quad (7)$$

$$u'_1 = \frac{1}{\beta}\left(\left(1+\beta-\frac{1}{1-\sigma}\right)e^{(1-\sigma)^2 u_1}(1-\sigma)^2\left(u_2-u_1^2+u_1^2\sigma\right)-u_1 e^{(1-\sigma)^2 u_1}\right), \quad (8)$$

Решение уравнения (7) представимо в виде

$$u_1 = \frac{1}{(1-\sigma)^2}ln\frac{\beta}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)} = -\frac{1}{(1-\sigma)^2}ln(1-\sigma)\left(1-\frac{1+\beta}{\beta}\sigma\right) =$$

$$= -\frac{1}{(1-\sigma)^2}ln\frac{1+\beta}{\beta}(1-\sigma) - \frac{1}{(1-\sigma)^2}ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right),\ 0 \le \sigma < \frac{\beta}{1+\beta},$$

имеем:

$$u_1 \sim -(\beta+1)^2 ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right).$$

Заметим, что $u_1(0) = 0$.

Далее

$$u'_1 = \left(u_2 - u_1^2 + u_1^2\sigma\right) - \frac{u_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)},$$

отсюда имеем

$$u_2 = u'_1 + \frac{u_1}{(1-\sigma)\left((1+\beta)(1-\sigma)-1\right)} + u_1^2(1-\sigma), \quad u_2(0) = \frac{1-2\beta}{\beta},$$

справедлива оценка:

$$u_2 \sim (\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma} ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right).$$

Аналогично имеем

$$u_3 \sim u_2^2 = \left((\beta+1)^2 \frac{1}{\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma} ln\left(\frac{\beta}{1+\beta}-\sigma\right)\right)^2.$$

Подставляя найденные асимптотики в (5) имеем:

$$u(\sigma) = \frac{1}{1-\sigma} - \varepsilon\frac{1}{(1-\sigma)^2} ln(\gamma-\sigma) - \frac{(1+\beta)\varepsilon^2}{(1-\sigma)^3(\gamma-\sigma)} ln(\gamma-\sigma) -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^3(1-\sigma)^{-2}\frac{(1+\beta)^2}{(\gamma-\sigma)^2} ln^2(\gamma-\sigma) + \varepsilon O\left(\left(\varepsilon\frac{ln(\gamma-\sigma)}{\gamma-\sigma}\right)^3\right), \qquad (9)$$

где $\gamma = \frac{\beta}{1+\beta}$.

Таким образом , мы доказали следующую теорему

Теорема 1. Решения задачи (1) существует на отрезке

$\sigma \in [0, \gamma - \varepsilon^{\lambda}], \ (0 < \lambda < 1)$ и для него справедлива асимптотика (9).

Чтобы найти асимптотику σ, при $\sigma \to \gamma$, положим в (13)

$$\sigma = \tilde{\sigma} = \gamma - r(\varepsilon), (0 < r(\varepsilon), r(0) = 0)$$

Тогда имеем:

$$u(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{1-\tilde{\sigma}} - \varepsilon\frac{1}{(1-\tilde{\sigma})^2} ln(\gamma-\tilde{\sigma}) - \frac{(1+\beta)\varepsilon^2}{(1-\tilde{\sigma})^3(\gamma-\tilde{\sigma})} ln(\gamma-\tilde{\sigma}) -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^3(1-\tilde{\sigma})^{-2}\frac{(1+\beta)^2}{(\gamma-\tilde{\sigma})^2} ln^2(\gamma-\tilde{\sigma}) + \varepsilon O\left(\left(\varepsilon\frac{ln(\gamma-\tilde{\sigma})}{\gamma-\tilde{\sigma}}\right)^3\right), \qquad (10)$$

или приравнивая к нулю средние члены к нулю имеем

$$r^2(\varepsilon) + (1+\beta)\varepsilon r(\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}(1+\beta)^2 ln\, r(\varepsilon) = 0.$$

Решая как квадратное уравнение относительно $r(\varepsilon)$ имеем:

$$r(\varepsilon)=-\frac{1+\beta}{2}\varepsilon+\sqrt{\frac{(1+\beta)^2\varepsilon^2}{4}+\frac{\varepsilon^2}{2}(1+\beta)^2 ln\frac{1}{r(\varepsilon)}}$$

Или

$$r(\varepsilon):\ -\frac{1+\beta}{2}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1+\beta)ln\frac{1}{r(\varepsilon)},r(\varepsilon)\to 0.$$

Так как

$$(1-\sigma)^{-1}=\frac{1}{1-\gamma}\left(1+\frac{r(\varepsilon)}{1-\gamma}\right)^{-1}\sim(1+\beta)(1+(1+\beta)r(\varepsilon)),(\gamma=\frac{\beta}{1+\beta}).$$

Поэтому

$$u(\sigma)=1+\beta-(1+\beta)^2\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1+\beta)ln\varepsilon^{-1}\right),\varepsilon\to 0.$$

Так как $1-t=e^{-\sigma/\varepsilon},0\le\sigma<1,$ то переменная t не может быть больше 1. Чтобы построить асимптотическое решение при t>1 введем еще одну новую переменную s.

Если сделать подстановку

$$t-1=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{-\beta/(1+\beta)\varepsilon}s$$

То

$$s=(t-1)\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\sigma}}=\left(t=1-e^{-\frac{\sigma}{s}}\right)=-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{(y-\sigma)/\sigma}$$

Пусть

$$s_0=-\frac{\beta}{\varepsilon}e^{r(\varepsilon)/\varepsilon},u(\not{s_0})=1+\beta-(1+\beta)^2\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}(1+\beta)ln\varepsilon^{-1}\right),\varepsilon\to 0.$$

Введем обозначение T(t)=ψ(s). Тогда

$ds=\frac{\beta}{\varepsilon}e^{\frac{\beta}{(1+\beta)\varepsilon}}dt$, t=1⇒s=0; t>1⇒s→∞, ε→0; t<1⇒s→–∞, ε→0.

Уравнение (1) в новой переменной s примет вид:

$$\frac{d\psi}{ds}=(1+\beta-\psi)e^{\frac{\psi-(1+\beta)}{\varepsilon\psi(1+\beta)}},\qquad(11)$$

Заметим, что в точке s_0

$$\psi(s_0)=1+\beta-O\left(\varepsilon\left(ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}\right)=k.$$

Асимптотическое решение уравнения (10) ищем в виде:

$$\psi(s)=1+\beta+\varepsilon(1+\beta)^2\psi_1(s)+\varepsilon^2(1+\beta)^2\psi_2(s)+...,\qquad(11)$$

Подставляя (14) в (13) для неизвестных функций получим следующие задачи

$$\psi'_1(s)=-\psi_1(s)e^{\psi_1(s)},\ \psi_1(s_0)=k\ ,\qquad(12.1)$$

$$\psi'_2(s) = -\psi_2(s)e^{\psi_1(s)} - \psi_1(s)\left(\psi_2(s) - \psi_1(s)(1+\beta)\right)e^{\psi_1(s)}, \psi_2(s_0) = 0, \quad (12.2)$$

$$\psi'_3(s) = -\psi_3(s)e^{\psi_1(s)} - \psi_2(s)\left(\psi_2(s) - \psi_1(s)(1+\beta)\right)e^{\psi_1(s)} -$$

$$-\psi_1(s)e^{\psi_1(s)}\left(\psi_3(s) - 2(1+\beta)\psi_1(s)\psi_2(s) + \psi_1^3(s) + \frac{1}{2}\psi_2^2(s)\right. \qquad (12.3)$$

$$\left. + (1+\beta)^2 + -(1+\beta)\psi_2(s)\psi_1^2(s) + \frac{1}{2}(1+\beta)^2\psi_1^4(s)\right), \psi_3(s_0) = 0$$

Решение уравнения (15.1) имеет вид

$$\int_{-k}^{-u} \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau = -s + s_0, \ (u = \psi_1) \qquad (13)$$

Из (16) при $u \to +0$, $s \to +\infty$ имеем

$$\int_{-u_0}^{-u} \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} d\tau + ln(-u) - ln u_0 = -s + s_0$$

или

$$\int_{-u_0}^{-u} \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau} d\tau + O(u) + ln(-u) - ln u_0 = -s + s_0$$

отсюда получаем:

$$u = \psi_1 = -e^{-s+s_0} + O\left(e^{-s+s_0}\right), \ s \to \infty, (t > 1).$$

Таким образом,

$$\psi_1(s) = -e^{s_0 - s} + O\left(e^{-s+s_0}\right), s \to \infty (t > 1).$$

Теперь решаем задачу (15.2)

$$M\psi_2(s) := \psi'_2(s) + \left(1 - \psi_1(s)\right)e^{\psi_1(s)}\psi_2(s) = -\psi_1^2(s)e^{\psi_1(s)}, \ \psi_1(u_0) = 0 \quad (14)$$

Однородное уравнение (14) имеет решение

$$V(s) = \psi_2^{одн}(s) = \psi_1'(s) = e^{-s+s_0} + O\left(e^{-s+s_0}\right), t > 1.$$

Учитывая этого из (17) имеем:

$$\psi_2(s) = \int_{s_0}^{s} V(s)V^{-1}(\rho)u^2(\rho)e^{u(s)}ds = u^2(s), s \to +\infty, t > 1$$

и т.д.

$$\psi_k(s) = u^k(s), s \to +\infty.$$

Таким образом, мы получили, что

$$\psi(s) = 1 + \beta + \varepsilon(1+\beta)^2 e^{-s+s_0} + \left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^2 + \ldots + O\left(\varepsilon(1+\beta)e^{-s}\right)^n + \ldots, \ s \to \infty, \varepsilon \to 0$$

Замечание. Таким образом, решение этой задачи начинает скачок в особой точке

$$\tilde{t} = 1 - e^{\sigma_0/\varepsilon}, \ \sigma_0 = \frac{\beta}{1+\beta} - \varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^2,$$

и при этом

$$T\left(t^{0}\right)=1+\beta-\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}+0\left(\varepsilon ln\frac{1}{\varepsilon}\right),\varepsilon\to 0.$$

Затем быстро экспоненциально перейдет в точку равновесия T=1+β.

Литература:

1. Ashwani K. Kapila Asymptotic Treatment of Chemically Reacting Systems. 1983.
2. Алымкулов К. The method of uniformization and justification of Lighthill method (in Russian). Izvestia AN Kyrg. SSR, 1981, № 1. pp. 35-38.
3. Alymkulov K and Tursunov T.D Perturbed Differential Equations with Singular Points in book “ Recent Studies in Perturbation Theory”, Chapter 1, Edited by Dimo I. Uzunov, , Publisher InTech, 2017.
4. Алымкулов К, Кожобеков К.Г. Об ас имптотике решения задачи Рейсса для явления прыжка. Вестник Жалал Абадского университета, 2019, N.2, с. 3-6.