УДК 517.928

КОМПЛЕКСТИК ОБЛАСТТАРДА СИНГУЛЯРДЫК ДҮҮЛҮККӨН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАЛЫК АЖЫРАЛМАСЫ (ЖӨНӨКӨЙ НӨЛДӨР БОЛГОН УЧУРУ)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ (СЛУЧАЙ ПРОСТЫХ НУЛЕЙ)

ASYMPTOTIC EXPANSION OF SOLUTIONS OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS IN COMPLEX DOMAINS (THE CASE OF SIMPLE ZEROS)

Алыбаев К.С. – д.ф.м.н., профессор, ЖАГУ
e.mail: alybaevkurmanbek@rambler.ru
Тойгонбаева А. – к.ф.м.н., доцент, ОшГУ

Аннотация. *Бул макалада сызыктуу сингулярдык дүүлүккөн дифференциалдык теңдеме комплекстик областта каралат. Денгээл сызыктардын методун колдонуу менен асимптотикалык ажырамасын*

Аннотация. *В данной статье рассматривается линейное сингулярно возмущенное уравнение в комплексной области. Исследована задача построения асимптотического разложения в случае простого нуля с использованием метода линий уровня.*

Annotation. *This article considers a linear singularly perturbed equation in a complex region. The problem of constructing an asymptotic expansion in the case of a simple zero using the level line method is investigated.*

Ачкыч сөздөр. *Сингулярдык дүүлүккөн теңдеме, чечим, асимптотикалык ажыралма.*

Ключевые слова. *Сингулярно возмущенное уравнение, решение, асимптотическое разложение.*

Key words. *Singularly perturbed equation, solution, asymptotic expansion*

Пусть рассматривается уравнение

$$\varepsilon z'(t,\varepsilon) = a(t)z(t,\varepsilon) + b(t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 - const, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый вещественный параметр, $t \in D \subset C$ и D конечная односвязная область, а t_0 – её внутренняя точка.

Пусть выполняются условия:

I. $a(t), b(t) \in Q(D)$ – пространство аналитических функций в D.

II. $\forall t \in D \; : a(t) \neq 0$.

Поставим задачу асимптотического разложения решения задачи (1) – (2) в области D по пара метру ε.

Задача (1) – (2) рассмотрена в работах [ ] на явление затягивания потери устойчивости, погранслойные линии, регулярные и сингулярные области.

Задача (1) – (2) в такой постановке рассматривается впервые.

Предварительные построения

В данном исследовании согласно условий I, II определим топологию области D. Определим функцию

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau \, .$$

Согласно I функция $A(t) \in Q(D)$. На основнии II функция $A(t)$ в точке t_0 имеет единственный простой нуль. Следовательно область D полностью покрывается сетью взаимно ортогональных линий уровней функций $\operatorname{Re} A(t)$ и $\operatorname{Im} A(t)$ [ ].

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_0) = \{ t \in D \mid \operatorname{Re} A(t) = 0 \} \, .$$

Линия (p_0) проходит через точку t_0 и область D делит на части D_1 и D_2. Далее будем считать, что (p_0) не содержится ни в D_1, ни в D_2.

На линии (p_0) возьмём произвольную точку $\tilde{t}$. Существует линия

$$(q(\tilde{t})) = \{ t \in D \mid \operatorname{Im} A(t) = q(\tilde{t}) - const \} ,$$

проходящая через точку $\tilde{t}$.

Известно [ ], по линии $q(\tilde{t})$ функция $\operatorname{Re} A(t)$ является строго монотонной. Если учесть $\operatorname{Re} A(\tilde{t}) = 0$, то

$$\forall t \in D_1 \; (\operatorname{Re} A(t) < 0 \text{ или } \operatorname{Re} A(t) > 0 \, .$$

Для определенности возьмём

$$\forall t \in D_1 \; (\operatorname{Re} A(t) < 0) \, .$$

Тогда

$$\forall t \in D_2 \; (\operatorname{Re} A(t) > 0) \, .$$

Решение задачи

При решении поставленной задачи используем метод линии уровня [ ]. Решение задачи выражается следующей теоремой:

Теорема. Пусть выполняются условия I, II. Тогда справедливо разложение

$$z(t,\varepsilon)=-\frac{b(t)}{a(t)}-\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k}\frac{b_k(t)}{a(t)}+$$

$$+\left(z^{0}+\frac{b(t_0)}{a(t_0)}+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^{k}\frac{b_k(t_0)}{a(t_0)}\right)\exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\varepsilon^{n}\int_{t_0}^{t}b_{n+1}(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\,, \qquad (3)$$

где функции $b_k(\tau)$ определяются следующей реккурентной формулой:

$$b_1(\tau)=\left(\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right)',\ b_k(\tau)=\left(\frac{b_{k-1}(\tau)}{a(\tau)}\right)',\ k=2,3,\ldots,n+1.$$

Доказательство. Решение задачи (1) – (2) представим в виде

$$z(t,\varepsilon)=z^{0}\exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \qquad (4)$$

где $A(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau$.

Далее надо учесть, если ξ функция $A(t)$ рассматривается на линиях $\{\xi\in D\,|\,\operatorname{Re}A(t)=const\}$, $\{\xi\in D\,|\,\operatorname{Im}A(t)=const\}$ в каждой точке таких соответствующих линий функции $\operatorname{Re}A(t)$, $\operatorname{Im}A(t)$ принимают постоянные значения не будучи равными тождественной постоянной.

Определим пути интегрированная для (4). Путь состоит из: части (p_0) соединяющего точки t_0, $\tilde{t}\in(p_0)$; части (q) соединяющего точки $\tilde{t}$ и $t\in(D_1$ или $D_2)$.

В силу условия I значение функции (4) не зависит от формы путей, а определяется начальной и конечной точкой интегрирования.

С учетом выбранных путей интегрирования из (4) имеем

$$z(t,\varepsilon)=z^{0}\exp\frac{A(t)}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}}b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d(\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t}b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\,, \qquad (5)$$

где $t\in(D_1$ или $D_2)$.

Если $t\in(p_0)$, тогда $t=\tilde{t}$, то из (5) имеем

$$z(\tilde{t},\varepsilon)=z^0\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}}b(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}d(\tau). \qquad (6)$$

В (5) проведем следующее преобразование

$$z(t,\varepsilon)=\exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon}\left[z^0\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}}b(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(t)}{\varepsilon}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t}b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau\right]. \qquad (7)$$

В (7) выражение содержащееся в [...] даёт, согласно (6), функцию $z(\tilde{t},\varepsilon)$. Тогда (7) можно записать в виде

$$z(t,\varepsilon)=z(\tilde{t},\varepsilon)\exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t}b(\varepsilon)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau, \qquad (8)$$

где $t\in(D_1$ или $D_2)$.

Из (8) вытекает, асимптотическое разложение решения задачи (1) – (2) для (p_0) и $D_1\cup D_2$ надо провести отдельно.

1. Пусть $t\in(p_0)$. Для этого случая возьмём (6). Рассмотрим интеграл

$$J_1(\tilde{t},\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{\tilde{t}}b(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau.$$

По условию $b(\tau),A(t)\in Q(D)$ и D конечная односвязная область. Тогда к интегралу $J_1(\tilde{t})$ применима формула интегрирования по частям.

Имеем

$$J_1(\tilde{t},\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{\varepsilon b(\tau)}{a(\tau)}\right)d\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}=-\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})}+\frac{b(t_0)}{a(t_0)}\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}+\varepsilon\int_{t_0}^{\tilde{t}}b_1(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau,$$

где $b_1(\tau)=(b(\tau)/a(\tau))'$.

К интегралу в правой части также применима формула интегрирования по частям.

Получим

$$J_1(\tilde{t},\varepsilon)=-\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})}+\frac{b(t_0)}{a(t_0)}\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}-\varepsilon\frac{b_1(\tilde{t})}{a(\tilde{t})}+\varepsilon\frac{b_1(t_0)}{a(t_0)}\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}+\varepsilon\int_{t_0}^{\tilde{t}}b_2(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}d\tau,$$ где

$b_2(\tau)=(b_1(\tau)/a(\tau))'$.

Продолжая процесс получим

$$J_1(\tilde{t},\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a(t_0)}\right)\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^{\tilde{t}} b_{n+1}(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau\,,$$

где $b_0(\tilde{t}) \equiv b_1(\tilde{t})$.

Для решения задачи (1) – (2) при $\tilde{t} \in (p_0)$ справедливо разложение

$$J_1(\tilde{t},\varepsilon)_\varepsilon = -\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + \left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a(t_0)} + z^0\right)\exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int^{\tilde{t}} b_{n+1}(\tau)\exp\frac{A(\tilde{t})-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau\,. \quad (9)$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ имеем асимптотическое представление (в (9) интеграл ограничен)

$$z(\tilde{t},\varepsilon) \sim -\frac{b(\tilde{t})}{a(\tilde{t})} + z^0 \exp\frac{A(\tilde{t})}{\varepsilon}.$$

Если учесть $A(\tilde{t}) = i\,JmA(\tilde{t})$, то $z(\tilde{t},\varepsilon)$ не имеет предела по ε $\forall \tilde{t} \in (p_0)$.

2. Пусть $t \in D_1 \cup D_2$.

Для асимптотического разложения решения $z(t,\varepsilon)$ возьмём интеграл

$$J_2(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\tilde{t}}^{t} b(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau$$

И к этому

$$J_2(t,\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(t)}{a(t)} + \left(\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(\tilde{t}_0)}{a_k(t)}\right)\exp\frac{A(t)-A(\tilde{t})}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{\tilde{t}}^{t} b_{n+1}(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau\,, \quad (9)$$

где $b_0(t) \equiv b_1(t)$.

Для $z(\tilde{t},\varepsilon)$ учитывая (8), (9), (7) получим разложение

$$J_2(t,\varepsilon) = -\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(t)}{a(t)} + \left(z^0 + \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k \frac{b_k(t_0)}{a_k(t_0)}\right)\exp\frac{A(t)}{\varepsilon} + \varepsilon^n \int_{t_0}^{t} b_{n+1}(\tau)\exp\frac{A(t)-A(\tau)}{\varepsilon}\,d\tau\,. \quad (10)$$

Теорема доказана.

В (10) $A(t) = \operatorname{Re} A(\tau)$, $A(\tau) = \operatorname{Re} A(\tau)$.

Если $t \in D_1$, то $\operatorname{Re} A(t) < 0$ и $\operatorname{Re} A(t)$ убывает в части пути интегрирования от $\tilde{t}$ до t, а в части от t_0 до $\tilde{t}$ $A(\tau) = i\operatorname{Im} A(\tau)$.

Таким образом в (10) интеграл имеет прядок ε^{n+1}. Тогда

$$z(t,\varepsilon) \sim -\frac{b(t)}{a(t)} + \left(z^0 + \frac{b(t_0)}{a(t_0)}\right)\exp\frac{A(t)}{\varepsilon},$$

a за пределы линии уровня $(p_\varepsilon) = \{t \in D_1 | \operatorname{Re} A(t) = \varepsilon \ln \varepsilon\}$

$$z(t,\varepsilon) \to -\frac{b(t)}{a(t)}.$$

Если $t \in D_2$, то $\operatorname{Re} A(t) > 0$ и за пределы линии $(p_\varepsilon) = \{t \in D_2 \mid \operatorname{Re} A(b) = -\varepsilon \ln \varepsilon\}$,

$z(t,\varepsilon) \to \infty$.

Литература

1. Алыбаев.К.С , Тампагаров К.Б.
2.
3. Алыбаев К.С. Метод линий уровня
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.-М.:Наука, 1973
5. Федорюк Метод перевала