УДК 517.5:517.91

КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ФУНКЦИОНАЛДЫК ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАРДЫ КЛАССИФИКАЦИЯЛОО ЖАНА ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ИЗИЛДӨӨ ҮЧҮН АЛАРДЫ КОЛДОНУУ

CLASSIFICATION OF FUNCTIONAL RELATIONS AND THEIR APPLICATION TO INVESTIGATE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Кененбаева Г.М., д.ф.-м.н., ИМ НАН КР,
г. Бишкек, Кыргызстан,gylaim@mail.ru
Кененбаев Э., ИМ НАН КР,
г. Бишкек, Кыргызстан, elaman0527@gmail.com

Аннотация. Бул макалада бир эле функциянын маанилеринин ортосундагы өз ара байланыш каралат. Алардын чексиз жаначектүү сандагы маанилеринин ортосундагы өз ара байланышы; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган деген классификациясы сунуш кылынат. Мындай өз ара байланыштардын кээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.

Урунттуусөздөр: функционалдык өз ара байланыш, дифференциалдык теңдеме, классификация, үзгүлтүксүз функция, жылмакай функция, аналитикалык функция.

Аннотация. В статье рассматриваются соотношения между значениями одной и той же функции. Предлагается их классификация: соотношения между бесконечным и между конечным количеством значений; полностью определенные и частично определенные. Приведены примеры. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, классификация, непрерывная функция, гладкая функция, аналитическая функция.

Annotation. There are considered relations between values of a same function in the paper. A certain classification of them is proposed: relations between infinite and between finite numbers of values; completely defined and partially defined ones. Examples are given. An application of such relations to investigate some differential equations is demonstrated.

Keywords: functional relation, differential equation, classification, continuous function, smooth function, analytical function.

Введение

В большинстве работ по теории дифференциальных уравнений рассматриваются или решения в целом (гладкие функции, аналитические функции), или значения решений в близких точках (для приближенных методов). Вместе с тем, имеются отдельные результаты, где используются значения функций в отдаленных точках. Цель настоящей статьи - классификация наборов связанных между собой значений функций: наборы из бесконечного и конечного количества значений; полностью определенные наборы и частично определенные наборы, а также соответствующая классификация дифференциальных уравнений и описание возможности применения функциональных соотношений для решения.

1. Классификации наборов связанных между собой значений функций

Будем использовать обозначения:

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, \Delta_x := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

1.1. Бесконечные наборы значений функций.

1.1.1. Как известно, гармонические функции двух переменных удовлетворяют соотношению: среднее значение функции на любом круге (бесконечное количество точек) равно значению функции в центре круга.

Вместе с тем, в любом конечном наборе точек гармоническая функция может принимать любые значения. Пусть $m=2$, имеются точки $x[1], x[2],\dots,x[k]$ и числа $u[1], u[2],\dots,u[k]$.

Построим по этим значениям многочлен Лагранжа $L(x)$, как функцию комплексного переменного: $L(x[j])=u[j],\ j=1,\dots,k$, и определим гармоническую функцию $U(x)=ReL(x)$. Тогда $U(x[j])=ReL(x[j])= Reu[j]= u[j],\ j=1,\dots,k$. Таким образом, любые значения гармонической функции в конечном количестве точек между собой не связаны.

1.1.2. Если бесконечный набор точек не имеет сходящихся подпоследовательностей, то значения непрерывной функции в этих точках могут быть любыми. Если сходящиеся подпоследовательности существуют, то значения непрерывной функции в точках подпоследовательностей должны быть также сходящимися, хотя значения функции в отдельных точках, кроме предельных точек сходящихся подпоследовательностей, могут быть любыми.

1.2. Конечные наборы значений функций.

1.2.1. Значения линейной функции от одной скалярной переменной в двух ненулевых точках должны быть согласованы:

$$f(x[1])x[2]= f(x[2])x[1].$$

1.2.2. Значения линейной функции (в широком смысле, со свободным членом) от одной скалярной переменной в трех точках должны быть согласованы:

$$(f(x[1])- f(x[3]))(x[1]-x[3])= (f(x[2])- f(x[3]))(x[2]-x[3]).$$

1.2.3. Значения функции-многочлена степени k от одной скалярной переменной в $(k+2)$ точках должны быть согласованы.

Пусть $m=1$, имеются числа $x[1], x[2],\dots, x[k+2]$ и числа $f[1], f[2],\dots, f[k+2]$.

Построим по значениям $x[1], x[2],\dots, x[k+1]$ и $f[1], f[2],\dots, f[k+1]$ многочлен Лагранжа $L(x)$ k-порядка, должно быть $L(x[k+2])=f[k+2]$.

Если точки образуют арифметическую прогрессию, то такое согласование записывается в явном виде:

$$\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^{j} (-1)^{j} f(x[j+1]) = 0.$$

Например, для $k=2$:

$f(x[1])-3 f(x[2])+3 f(x[3])- f(x[4])=0.$

1.2.4. Значения линейной функции от m скалярных переменных в $(m+1)$ ненулевых точках должны быть согласованы.

1.2.5. Значения четной функции в двух симметрично относительно нуля расположенных точках должны быть равны.

1.2.6. Значения нечетной функции в двух симметрично относительно нуля расположенных точках должны быть противоположны.

1.2.7. Функция двух скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет тождеству Асгейрссона для четырех точек:

Если $m=2$, $f(x) \equiv f_1(x_1)+f_2(x_2)$, u_1, u_2, v_1, v_2 – любые числа, то

$$f(u_1, v_1)+ f(u_2, v_2)\equiv f(u_1, v_2)+ f(u_2, v_1).$$

1.2.8. Функция m скалярных переменных - сумма функций от одной переменной каждая - удовлетворяет аналогичному тождеству Асгейрссона для четырех точек, которые образуют прямоугольник, какие-либо две противоположные стороны которого параллельны одной из осей координат.

1.2.9. Функция m скалярных переменных - сумма функций от меньшего числа переменных каждая -

$$f(x)= g_1(x_2,\dots, x_m)+ \dots + g_q(x_1,\dots, x_{q-1}, x_{q+1},\dots, x_m) + \dots + g_m(x_1,\dots,x_{m-1}),$$

удовлетворяет обобщенному тождеству Асгейрссона для 2^m точек [15].

Например, для $m=3$: пусть $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ - любые числа, тогда

$$f(v_1,v_2,v_3)-f(v_1,v_2,v_6)-f(v_1,v_5,v_3)+ f(v_1,v_5,v_6) -$$
$$- f(v_4,v_2,v_3)+f(v_4,v_2,v_6)+ f(v_4,v_5,v_3)- f(v_4,v_5,v_6) = 0.$$

1.2.10.Значения ω-периодической функции скалярной переменной для двух точек:

$$\text{“}|x[1] - x[2]|= \omega\text{”} \Rightarrow \text{“}f(x[1])= f(x[2])\text{”}.$$

2.Классификации дифференциальных уравнений

Обзор литературы показывает, что единообразие в терминологии имеет место для обыкновенных дифференциальных уравнений и для дифференциальных уравнений в частных производных с количеством переменных не более двух и порядка не выше второго.

В работах [2], [3], [5], [6], [12], [18], [20], [21] и других предлагается классифицировать дифференциальные уравнения в частных производных по их записи, и рассматриваются такие преобразования, которые не меняют, хотя и упрощают вид записи. В [23], [24] предложено классифицировать уравнения по свойствам их решений, даже если они принадлежат к различным типам. В [16], [17] показано, что уравнения, которые ранее относились к одному типу, имеют различные функциональные соотношения решений.

Рассмотрим примеры применения функциональных соотношений.

2.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2.1.1. Рассмотрим уравнение $y^{(k)}(x)=0$. Его решение - многочлен $(k-1)$порядка. Из 1.2.3 следует, что его значения можно находить для любого $h>0$ последовательно по формуле:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j (-1)^{j+k} y(x-jh).$$

Примечание. Данный простой пример ставит задачу о классах обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых можно последовательно находить решения аналогичными способами.

2.1.2. Связь между значениями решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения в различных точках получил C. J. DelaValléePoussin(см. например [1]): уравнение

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\, y^{(n-1)}(x)+\ldots+p_n(x)\, y(x) = 0,\ \ a\le x\le b, p_k(x)\in C[a,b],$$

с условиями $y(x[i]) = c_i,\ i=1,\ldots,\ n$ имеет единственное решение при ограничении

$$\| p_1\|_{[a,b]}(b-a)+ \| p_2\|_{[a,b]}\,(b-a)^2/2!+\ldots+\| p_n\|_{[a,b]}\,(b-a)^n/n! < 1.$$

2.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Рассмотрим общее уравнение вида

$$\Delta_x u(x,y) = \Delta_y u(x,y), \tag{2}$$

$$y := (y_1, y_2, \ldots, y_n)\in R^n, \Delta_y := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

2.2.1. В случае $m=n=1$из записи общего решения уравнения (2) в форме Даламбера и п.1.2.7 следует, что сумма значений функции $u(t, x)$ в концах одной из диагоналей прямоугольника на плоскости (t, x), стороны которого составляют 45^0 с осями координат, равна сумме значений функции $u(t, x)$ в концах другой диагонали.

2.2.2. В случае $m=n>1$ для решения уравнения (2) при некоторых дополнительных предположениях имеет место тождество Асгейрссона для бесконечного количества точек, см. например [22]:

$$\int_{|\xi|=r} u(x+\xi, y)\, dS_\xi = \int_{|\eta|=r} u(x, y+\eta)\, dS_\eta.$$

2.2.3. Из п. 1.1.1 следует связь между значениями решения уравнения Лапласа $\Delta_x u(x) = 0,\ m>1$ в бесконечном количестве точек.

3. Заключение

Примеры, приведенные в настоящей статье, показывают, что в различных разделах теории дифференциальных уравнений доказывались и использовались отдельные функциональные соотношения, но не была проведена их классификация (выше предлагается возможная классификация), они не использовались систематически для получения новых результатов. Предлагается разработать теорию и методику применения функциональных соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.

2. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. - Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1959. - 164 с.

3. Векуа И.Н. Дифференциальное уравнение с частными производными; методы комплексного переменного. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 2. – Москва: Советская энциклопедия, 1979. – С. 311-318.

4. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – Глава III. Построение целой функции с заданными элементами, с. 212-259; Глава V. Уравнения в конечных разностях, с. 307-398.

5. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.

6. Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
8. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Кененбаева Г.М. Эффект аналитичности для дифференциальных и интегральных уравнений. – Saarbrücken, Deutschland: LAP Lambert Academic Publishing, 2015. – 72 с.
10. Комленко Ю.В. Характеристика. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 5. – Москва: Советская энциклопедия, 1985. – С. 753-755.
11. Курант Р., Гильберт Р. Методы математической физики, 2-е издание. – Москва-Ленинград: Гостехтеориздат, 1951. – 544 с.
12. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – Москва: Высшая школа, 1977. – 431 с. – Глава 8. Уравнения и краевые задачи. – С. 157-173.
13. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
14. Панков П.С., Матиева Г.М., Сабирова Х.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
15. Панков П.С., Сабирова Х.С. Составление функционально-характеристических уравнений с аналитическими функциями // Вестник Казахского национального технического университета им. Сатпаева, 2006. - № 5. – С. 135-141.
16. Сабирова Х.С. Влияние младших членов дифференциальных уравнений с частными производными на их характеристичность // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 38. – Бишкек: Илим, 2008. – С. 107-111.
17. Сабирова Х.С. Различие в характеристических свойствах волновых уравнений с различным количеством переменных// Вестник Международного университета Кыргызстана, № 1(20), 2011. – С. 58-61.
18. Рожденственский Б.Л. Гиперболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 1. – Москва: Советская энциклопедия, 1977. – С. 992-993.
19. Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – Москва: Наука, 1964. – 208 с. – Глава II. Классификация уравнений второго порядка. – С. 33-46.
20. Солдатов А.П. Параболического типа уравнение. – В кн.: Математическая энциклопедия, том 4. – Москва: Советская энциклопедия, 1984. – С. 195.
21. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, 4-е издание. – Москва: Наука, 1972. – 288 с. – Глава I. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка. – С. 11-22.
22. Благовещенский А. С. О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения. Математический сборник, 63(105):1 (1964). - С. 137–168.
23. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжануулу Э. Элементы категории уравнений // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.
24. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л. Элементы категории корректных уравнений // Вестник

Института математики НАН КР, 2019, № 1. - С. 69-74.