УДК 517.928

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С МАЛЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

к.ф.-м.н., доцент Кожобеков К.Г. (ОшГУ)
e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Аннотация. *Методом преобразования построена асимптотика решения задачи Коши для уравнения параболического типа с малым коэффициентом температуропроводности. Физический смысл рассматриваемой задачи – распространение тепла на бесконечной прямой с малым коэффициентом температуропроводности.*
Ключевые слова: асимптотика, малый параметр, задача Коши, параболическое уравнение.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH A SMALL COEFFICIENT OF THERMAL CONDUCTIVITY

Kozhobekov K.G.
Osh state University, e-mail: kudayberdi.kozhobekov@mail.ru

Annotation. Using the transformation method, we constructed the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a parabolic type equation with a small thermal diffusivity. The physical meaning of the problem under consideration is the distribution of heat on an infinite line with a small coefficient of thermal diffusivity.
Key words: asymtotics, small parameter, Cauchy problem, equation of parabolic type.

Как нам известно, уравнения с частными производными второго порядка параболического типа наиболее встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

обычно называют уравнением теплопроводности [1], коэффициент a называют коэффициентом температуропроводности.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ (x,t) \in D, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0,x) = f(x),\ \ x \in R, \tag{2}$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $D = \{(t,x): 0 < t < \infty,\ x \in R\}$, $f(x)$ – ограниченная бесконечно дифференцируемая функция на всей числовой оси.

Решение задачи существует и единственно [1]. Требуется построить полное равномерное асимптотическое разложение по малому параметру в области $\bar{D}$.

Действительно, при $0<\varepsilon$ явное решение задачи (1)-(2) можно построить методом Фурье, т.е. методом разделения переменных. Решение ищем в виде:

$$u(t,x) = Q(t)R(x),$$

тогда $u_t(t,x) = Q'(t)R(x),\ u_{xx}(t,x) = Q(t)R''(x)$.

Подставляя эти выражения в уравнение (1), имеем:

$$\frac{1}{\varepsilon}Q'(t)R(x)=Q(t)R''(x)\Rightarrow\frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)}=\frac{R''(x)}{R(x)}=-\lambda^2,\ \lambda-const.$$

Отсюда находим $Q(t)$ и $R(x)$:

$$\frac{Q'(t)}{\varepsilon Q(t)}=-\lambda^2\ \Rightarrow Q(t)=c_1e^{-\varepsilon\lambda^2t},$$

$$\frac{R''(x)}{R(x)}=-\lambda^2\Rightarrow\ R''(x)+\lambda^2R(x)=0\Rightarrow R(x)=c_2\,e^{\pm i\lambda x}.$$

Следовательно,

$$u_\lambda(t,x)=C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t\pm i\lambda x},$$

здесь $\lambda\in$ R, поэтому берем знак плюс: $u_\lambda(t,x)=C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t+i\lambda x}$.

Отсюда имеем:

$$u(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\lambda(t,x)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}C(\lambda)e^{-\lambda^2\varepsilon t+i\lambda x}d\lambda. \tag{3}$$

где C(λ)определяется условием (2).

Учитывая начальное условие (2), имеем:

$$u(0,x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\ \Rightarrow f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda,$$

применяя преобразование Фурье, имеем:

$$C(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda\xi}f(\xi)d\xi.$$

Подставляя последнее выражение в (3), получаем:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda\xi}f(\xi)d\xi e^{-\lambda^2\varepsilon t+i\lambda x}d\lambda.$$

Поменяв порядок интегрирования, и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda^2\varepsilon t+i\lambda(x-\xi)}d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}$$

получаем

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\varepsilon t}}f(\xi)d\xi. \tag{4}$$

Если асимптотическое разложение решения задачи (1)-(2) искать методом малого параметра [2]:

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\varepsilon u_1(t,x)+\varepsilon^2u_2(t,x)+\ldots+\varepsilon^nu_n(t,x)+\ldots \tag{5}$$

то имеем:

$$u_t(t,x)=\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial u_n(t,x)}{\partial t}+\ldots$$

$$u_{xx}(t,x)=\frac{\partial^2u_0(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{\partial^2u_1(t,x)}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2u_2(t,x)}{\partial x^2}+\ldots+\varepsilon^n\frac{\partial^2u_n(t,x)}{\partial x^2}+\ldots$$

Подставляя эти выражения в задачу (1)-(2), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, имеем:

$$\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t}=0\ ,\ u_0(0,x)=f(x);\quad \frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_{k-1}(t,x)}{\partial x^2},u_k(0,x)=0,k\in N.$$

Отсюда после интегрирования с учетом начальных условий имеем:

$$u_0(t,x)=f(x),\qquad\qquad u_1(t,x)=tf''(x)$$

$$u_k(t,x)=\frac{t^k}{k!}f^{(2k)}(x),\ k\in\mathbf{N}.$$

Ряд (4) примет вид:

$$u(t,x)=f(x)+\varepsilon tf^{(2)}(x)+(\varepsilon t)^2 f^{(4)}(x)+...+(\varepsilon t)^n f^{(2n)}(x)+...$$

этот ряд является асимптотическим при $0\le t<1/\varepsilon$, $x\in R$ и теряет свойство асимптотичности при $1/\varepsilon\le t$, $x\in R$.

Нетрудно заметить, что если начальная задача (1)-(2) рассматривается на конечном отрезке времени, т.е. $0\le t\le T$ – *const* то задача (1)-(2) регулярно возмущенная, в противном случае, т.е. в нашем случае сингулярно возмущенная точнее бисингулярно возмущенное [3-8].

Чтобы получить равномерное разложение решения задачи (1)-(2) мы преобразуем точное решение (4) в следующем виде [7,8]:

$$u(t,x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{1+\varepsilon t}\left(\frac{\sqrt{1+\varepsilon t}\xi}{\sqrt{4\varepsilon t}}-\frac{\sqrt{1+\varepsilon t}x}{\sqrt{4\varepsilon t}}\right)^2}f(\xi)d\xi,$$

Пусть $s=\sqrt{\frac{1+\varepsilon t}{4\varepsilon t}}(\xi-x)$, тогда $\xi=\sqrt{\frac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}}s+x,\ d\xi=\sqrt{\frac{4\varepsilon t}{1+\varepsilon t}}ds$.

Поэтому

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}}f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}}s+x\right)ds.$$

Произведем еще одно преобразование, пусть $t=\frac{1}{\varepsilon\eta}-1$, тогда

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon t)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\varepsilon t}}f\left(2\sqrt{\frac{\varepsilon t}{1+\varepsilon t}}s+x\right)ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds=$$

$$=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds.$$

Учитывая разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}}}=1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots$$

получаем

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}f\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right)$$

где $0\le\eta\le 1/\varepsilon$.

Рассмотрим пример, пусть $f(x)=e^{-x^2}$. Тогда

$$u(\eta,x)=\frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\pi(\eta+1)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{s^2}{1+\frac{1}{\eta}-\varepsilon}}e^{-\left(2\sqrt{\frac{1-\varepsilon\eta}{\eta+1-\eta\varepsilon}}s+x\right)^2}ds\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^2+\frac{5}{16}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^3+\frac{35}{128}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^4+\frac{63}{256}\left(\frac{\varepsilon\eta}{1+\eta}\right)^5+\ldots\right)$$

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника-Вишика // Успехи мат.наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 123–156.
3. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2019. – Т. 29. – Вып 3. – С.1-9.
4. Alymkulov K., Tursunov D.A. Kozhobekov K.G. Singularly perturbed the parabolic equation in the case when unperturbed equation has unbounded solution // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017 Pushpa Publishing House, Allahabad, India. Vol. 102. № 2. – Pp. 329-336.
5. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотика решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с дробной точкой поворота // Известия Иркутского госуниверситета. Серия «Математика», 2017. – Т. 21. –. С. 108-121.
6. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. – М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2009. – 248 с.
7. Tursunov D.A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem // Lobachevskii J. Math. 38(3) (2017), 542-546.
8. Tursunov, D.A., Asymptotic solution of linear bisingular problems with additional boundary layer // Russian Mathematics 62(3) (2018), 60-67.
9. Кожобеков К.Г., Турсунов Д.А. Асимптотическое решение сингулярно возмущенной задачи Коши с точкой поворота // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 156, ВИНИТИ РАН, М., 2018, 84–88.
10. Турсунов Д.А. Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле эллиптического уравнения с особенностями // Уфимский математический журнал. 2016. Т. 8. № 1. 2016. – С. 102-112.