УДК533.16. DOI: 10.35803/1694-5298.2019.4. 655-661

ЧЕЧЕЙБАЕВ Б., ИСМАНБАЕВ А.И., ЭСТЕБЕСОВА Н.Т., ЧЕЧЕЙБАЕВА Э.Б.
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызская Республика
Кыргызский государственный гехнический университет им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика

CHECHEIBAEV B., ISMANBAEV A.I., ESTEBESOVA N.T., CHECHEIBAEVA E.B.
Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyz Republic
Kyrgyz State Technical University named after I.Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic
amantay@mail.ru, net13_08@mail.ru, net13_08@mail.ru, emka_ch@mail.ru

МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

SMALL PERTURBATION METHOD TO SOLVE THE PROBLEM OF LAMINAR BOUNDARY LAYER OF INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID FLOWS

Асимптотикалык ыкманы колдонуу менен Навье-Стокстун теңдемесин жакындатуучу экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдемелердин рекурренттик системасы аныкталды. Негизги нөлүнчү тартиптеги жакындатуу стационардуу эмес чектик катмарды изилдөө учурундагы Прандтль теңдемеси болуп эсептелет. Прандтль теңдемесинин басымдын градиентин эсепке алуусуна тура келген так аналитикалык чыгарылыштары табылды.
Өзөк сөздөр: *Навье-Стокстун теңдемеси, Прандтль теңдемеси, Рейнольдс саны*

Асимптотическим методом выведена рекуррентная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, являющаяся асимптотическим приближением к уравнению Навье-Стокса. Нулевое, основное приближение представляет собой уравнение Прандтля для исследования нестационарного пограничного слоя. Найдены точные аналитические решения уравнения Прандтля с градиентом давления.
Ключевые слова: *уравнение Навье-Стокса, уравнение Прандтля, число Рейнольдса.*

The recurrent system of second order partial differential equations serving for asymptotic approximation to the Stokes equation has been derived by the asymptotic method. The zeroth order and basic approximation is the Prandtl equation used to study the non-steady-state boundary layer. The exact analytical solutions of the Prandtl equation with a pressure gradient have been obtained.
Key words: *Stokes equation, Prandtl equation, Reynolds number.*

Выведем уравнение пограничного слоя в случае плоского движения несжимаемой жидкости. Толщина пограничного слоя δсчитается значительно малой величиной по сравнению с размерами L твёрдого тела. Уравнения Навье-Стокса в прямоугольной системе координат для плоского движения вязкой жидкости имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Продольная компонента скорости uна протяжении малой толщины слоя должна изменяться от нулевого значения $(u = 0)$ на поверхности тела $(y = 0)$ до некоторого конечного значения, имеющего порядок скорости «внешнего» безвихревого потока идеальной жидкости.

Будем использовать метод малых возмущений для решения задачи ламинарного пограничного слоя на основе уравнений Навье-Стокса. Для этого разложим в ряд продольную скорость u, поперечную скорость v и давление p в потоке несжимаемой жидкости по степеням малого параметра ε следующим образом:

$$u = \varepsilon u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon^3 u_2 + \cdots,$$
$$v = \varepsilon^2 v_0 + \varepsilon^3 v_1 + \varepsilon^4 v_2 + \cdots, \tag{2}$$
$$p = \varepsilon^2 p_0 + \varepsilon^3 p_1 + \varepsilon^4 p_2 + \cdots,$$

а переменные x, y, t будем подвергать растяжению согласно соотношениям

$$\tilde{x} = \varepsilon^2 x, \quad \tilde{y} = \varepsilon y, \quad \tilde{t} = \varepsilon^3 t. \tag{3}$$

В качестве значения малого параметра ε примем величину $\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$, обратную к квадратному корню из рейнольдсова числа, где число Рейнольдса определяется как $Re = \frac{V \cdot L}{\nu}$. Следуя [1], отметим, что малый параметр ε характеризует движение при больших рейнольдсовых числах.

Далее, находя частные производные от физических величин (2) с учётом преобразования (3) и подставляя их в исходное уравнение (1), проведем группировку членов с одинаковыми степенями малого параметра ε.

Разложения слагаемых членов уравнения системы (1) в ряд, согласно (2), имеют следующий вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon^4 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^5 \left(u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}}\right) + \varepsilon^6 \left(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}}\right),$$
$$v\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon^4 v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + \varepsilon^5 \left(v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}\right) + \varepsilon^6 \left(v_0 \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + v_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}}\right),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^4 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon^5 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon^6 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}} + \cdots, \tag{4}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon^4 \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^5 \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^6 \frac{\partial p_2}{\partial \tilde{x}} + \cdots.$$

Что касается вязких членов $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, то их разложения выглядят запишутся так:

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nu\left(\varepsilon^5 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}} + \varepsilon^6 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{x}^2} + \varepsilon^7 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{x}^2} + \cdots\right), \tag{5}$$
$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu\left(\varepsilon^3 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{y}^2} + \varepsilon^5 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{y}^2} + \cdots\right).$$

Отсюда видно, что нулевое приближение величины $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ является величиной порядка $\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2} = O(\varepsilon^5)$ и по сравнению со вторым вязким членом $\frac{\partial^2 v_0}{\partial \tilde{y}^2} = O\,(\varepsilon^4)$ является относительно малой величиной, что позволяет сохранить в уравнении только данный второй член.

Тогда для нулевого приближения первого уравнения системы (2) получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2}. \tag{6}$$

В уравнении неразрывности системы (1) слагаемые члены приближения в асимптотическом разложении имеют одинаковый порядок:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon^3 \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}}\right) + \varepsilon^4 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}}\right) + \varepsilon^5 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}}\right). \tag{7}$$

Во втором уравнении Навье-Стокса (1) нулевые приближения величин $\frac{\partial v}{\partial \tilde{t}}$, $u\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}}$, $v\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}}$ и вязких членов $\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{x}^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{y}^2}$ имеют следующий порядок малости:

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}} = O(\varepsilon^5), \quad v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = O(\varepsilon^5), \quad \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{t}} = O(\varepsilon^5), \qquad u_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}} = O(\varepsilon^5), \quad v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = O(\varepsilon^5)$$

Таким образом, вторым уравнением системы (1) мы можем пренебречь, т.е. его можно опустить.

Давление в сечении пограничного слоя, нормальном к поверхности тела, можно считать постоянным по сечению и равным давлению во внешнем потоке. После проведенной оценки членов уравнений системы (1), данная система переходит в следующую систему уравнений движения вязкой жидкости в области нестационарного ламинарного пограничного слоя:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{x}^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{array}\right\} \tag{8}$$

Для первого приближения членов разложения u_1, v_1 получаем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}} + u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{y}^2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{t}} + u_1 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{x}} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial \tilde{y}} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tilde{y}^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} = 0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

Аналогичным образом, для второго приближения получаем:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} + \left(u_0 \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{x}} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{x}}\right) + \left(v_0 \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}}\right) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{t}} + \left(u_0 \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{x}} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{x}} + u_2 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{x}}\right) + v_0 \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \tilde{y}} + v_2 \frac{\partial v_0}{\partial \tilde{y}} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial \tilde{y}} + \nu \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_2}{\partial \tilde{y}} = 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Отметим, что системы уравнений (9) и (10) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных второго порядка.

Определяя решения уравнения Прандтля (8) и подставляя далее их в систему (9), можно установить первые приближения продольной u_1 и поперечной v_1 составляющих скорости движения вязкой жидкости в пограничном слое.

Далее, используя найденные решения u_0, v_0, u_1, v_1 и интегрируя систему уравнений (10), можно определить вторые приближения составляющих скорости u_2, v_2, при этом градиенты давления в системах (9) и (10) задаются заранее.

Исходя из системы уравнений в частных производных (9) и (10), можем составить рекуррентную систему дифференциальных уравнений в частных производных, которая, вообще говоря, позволяет определить последующие приближения продольной и поперечной составляющих скоростей в асимптотическом разложении (2):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{t}} + \sum_{i=0}^{n}\left(u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial \tilde{x}} + v_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_n}{\partial \tilde{x}} + \nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \tilde{t}} + \sum_{i=0}^{n}\left(u_i \frac{\partial v_{n-i}}{\partial \tilde{x}} + v_i \frac{\partial v_{n-i}}{\partial \tilde{y}}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_n}{\partial \tilde{y}} + \nu \frac{\partial^2 v_n}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v_n}{\partial \tilde{y}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Здесь n=1,2, 3,… - номер приближения.

Системы уравнений (8) и (11) является асимптотическим представлением уравнения Навье-Стокса.

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений (8). Согласно основному свойству пограничного слоя, давление p может быть замечено своим выражением из уравнений Эйлера [1] движения идеальной несжимаемой жидкости во внешней области.

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + U\frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \tilde{x}} \qquad (12)$$

составлено для точек на поверхности тела, где поперечная скорость равна нулю.

Таким образом, мы получаем следующую систему уравнений Прандтля в конечном виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + u\frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + v\frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} = \frac{\partial U}{\partial \tilde{t}} + U\frac{\partial U}{\partial \tilde{x}} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{y}^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Уравнения (13) составляют систему нелинейных уравнений в частных производных второго порядка параболического типа. Функция $U(x,t)$ является скоростью на внешней границе. Система уравнений (13) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned} u = u(0,\tilde{x},\tilde{y}) \text{ при } \tilde{t} = 0, \\ u = 0, v = 0 \text{ при } \tilde{y} = 0 \\ u(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y}) \to U(\tilde{t},\tilde{x}) \text{ при } \tilde{y} \to \infty \\ u = u_0(\tilde{t},\tilde{y}) \text{ при } \tilde{x} = \tilde{x}_0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Заметим, что в случае стационарных течений $\left(\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = 0\right)$ начальные условия существенно упрощаются.

Если ввести функцию тока $\psi(\tilde{x},\tilde{y})$ так, что $u_0 = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{y}}, v_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}$, то предыдущая система уравнений в частных производных редуцируется к следующему единичному уравнению:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}}-\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{y}^2}=U\frac{\partial U}{\partial\tilde{x}}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial\tilde{y}^3};\\ \psi=\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}=0 \ \text{при}\ \tilde{y}=0,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}\to U(\tilde{x})\ \text{при}\ \tilde{y}\to\infty\\ \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}}=u_0(\tilde{y})\ \text{при}\ \tilde{x}=\tilde{x}_0\end{array}\right\} \tag{15}$$

Среди граничных условий для уравнения (15) последнее соотношение выражает задание профиля скоростей в некотором сечении пограничного слоя.

Будем искать теперь решение уравнения Прандтля, которое служит «нулевым» приближением в общем асимптотическом решении уравнений Навье-Стокса при больших рейнольдсовых числах.

В уравнении Прандтля градиент давления будем считать равным

$$U\frac{\partial U}{\partial\tilde{x}}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\tilde{x}}=f(\tilde{x}),$$

где функция $f(x)$ задается так: $f(x)=\alpha e^{\beta x}$.

Предполагаемый вид решения представим в следующем виде:

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y})=f(\tilde{x})e^{\lambda\tilde{y}}+g(\tilde{x})e^{-\lambda\tilde{y}}+A\tilde{x}+B\tilde{y}+C, \tag{16}$$

где неизвестные функции $f(\tilde{x}), g(\tilde{x})$ и постоянные величины A, B, C подлежат определению. Подставляя соответствующие производные от (2) в уравнение (15), получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}B\lambda f'(\tilde{x})=\lambda^2(A+\nu\lambda)f(\tilde{x}),\\ -B\lambda g'(\tilde{x})=\lambda^2(A-\nu\lambda)g(\tilde{x}),\\ -2\lambda^2 f(\tilde{x})g'(\tilde{x})-2\lambda^2 g(\tilde{x})f'(\tilde{x})=\alpha e^{\beta\tilde{x}}\end{array}\right\} \tag{17}$$

Интегрируя третье уравнение системы (17), имеем:

$$f(\tilde{x})g(\tilde{x})=-\frac{\alpha}{2\beta x^2}e^{\beta\tilde{x}}+C_1. \tag{18}$$

Искомые функции $f(\tilde{x})$ и $g(\tilde{x})$ определяются интегрированием первых двух уравнений системы (17) и имеют следующий вид:

$$f(\tilde{x})=C_2e^{\frac{\lambda(A+\nu\lambda)}{B}\tilde{x}},\quad g(\tilde{x})=C_3e^{\frac{\lambda(\nu-A)}{B}\tilde{x}} \tag{19}$$

Подставляя найденные решения (19) в (18), устанавливаем связи между постоянными интегрированиями C_2, C_3 и постоянными величинами $\alpha, \nu, \lambda, \beta, B$, которые имеют следующий вид:

$$C_2=\frac{-\alpha}{\lambda\sqrt{2\cdot\beta}},\ C_3=\frac{1}{\lambda\sqrt{2\cdot\beta}},\ C_2\cdot C_3=-\frac{\alpha}{2\lambda^2\beta},\ B=\frac{2\lambda\nu^2}{\beta}.$$

Тогда решение уравнения стационарного пограничного слоя с градиентом давления примет следующий вид:

$$\psi(\tilde{x},\tilde{y})=-\frac{\alpha}{\lambda\sqrt{2\beta}}e^{\lambda\left(\frac{\beta(A+\alpha\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)}+\frac{1}{\lambda\sqrt{2\beta}}e^{-\lambda\left(\frac{\beta(A-\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)}+A\tilde{x}+\frac{2\nu\lambda^2}{\beta}\tilde{y}+C. \tag{20}$$

Следовательно, продольная и поперечная составляющие скорости будут описываться через соотношения

$$u_0=\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}e^{\lambda\left(\frac{\beta(A+\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)}-\frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\lambda\left(\frac{\beta(A-\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)}+\frac{2\nu\lambda^2}{\beta}, \tag{21}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$v_0 = \frac{\alpha}{2\sqrt{2\beta}\nu\lambda^2}\beta(A+\nu\lambda)e^{\lambda\left(\frac{\beta(A+\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)} + \frac{\beta(A-\nu\lambda)}{2\sqrt{2\beta}\nu\lambda^2}e^{-\lambda\left(\frac{\beta(A-\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}+\tilde{y}\right)} + A.$$

Перейдем теперь к рассмотрению граничного условия (15). Функция тока $\psi(\tilde{x},\tilde{y})$ и продольная составляющая скорости возмущения должны обращаться в нуль на пограничном слое, т.е.

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\tilde{y}} = 0 \quad \text{при} \quad \tilde{y} = 0.$$

Рассматриваемое условие выполняется при $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$. Если положить, что

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{2}{\beta}}\nu\lambda^2 - 1, \quad C = \frac{2\left(\sqrt{\frac{2}{\beta}}\nu\lambda^2 - 1\right)}{\lambda\sqrt{2\beta}},$$

то получаем, что

$$u_0 = -\frac{\alpha}{\sqrt{2\beta}}e^{\frac{\beta(A+\nu\lambda)}{2\nu\lambda}\tilde{x}} - \frac{1}{\sqrt{2\beta}}e^{-\frac{\beta(A-\nu\lambda)}{2\nu\lambda^2}\tilde{x}} + \frac{2\nu\lambda^2}{\beta}.$$

Рассмотрим теперь инвариантные решения стационарного гидродинамического пограничного слоя с градиентом давления

$$U\frac{\partial U}{\partial x} = f(x) = \alpha e^{\beta x}.$$

Перепишем для этого уравнение Прандтля в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + f(x), \tag{22}$$

где граничные условия составляются аналогично граничным условиям в задаче (15).

Решение уравнения (22) ищется в следующем виде:

$$\psi(x,y) = e^{\frac{1}{4}\beta x}w(z), \quad z = e^{\frac{1}{4}\beta x}y. \tag{23}$$

Здесь $\psi(x,y)$ - функция тока, x и y - продольные и поперечные координаты движущейся вязкой несжимаемой жидкости.

Подставляя соответствующие частные производные от (23) в (22), относительно неизвестной функции $w(z)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\nu w'''_{zzz} - \frac{1}{4}\beta(w'_z)^2 + \frac{1}{4}\beta w w'_{zz} + \alpha = 0. \tag{24}$$

Пусть n=4, тогда получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\nu w'''_{zzz} + w w''_{zz} - (w'_z)^2 + \alpha = 0 \tag{25}$$

Введем новую функцию

$$w'(z) = p(w),$$

в результате относительно функции $p(w)$получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\nu p(pp''_{ww} + (p'_w)^2) + wpp'_w - p^2 + \alpha = 0 \tag{26}$$

Решение уравнение Прандтля (22) с соответствующими граничными условиями при градиенте давления в ядре потока несжимаемой жидкости $f(x) = \alpha e^{mx}$ ищется в автомодельном виде

$$\psi(x, y) = x^{\frac{m+3}{4}} u(z), \text{ где } z = x^{m-1} y, \qquad (27)$$

здесь m - показатель автомодельности. Тогда относительно неизвестной функции $u(z)$ получается нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка вида

$$\frac{m+1}{2}(u'_z)^2 - \frac{m+3}{4} u u''_{zz} = \nu u'''_{zzz} + \alpha. \qquad (28)$$

Решение, определяемое в случае m=0 из (28) описывает симметричное обтекание клина с углом раствора $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, а в случае m=1 решение соответствует натеканию жидкости на плоскость (течение в окрестности точки разветвления потока).

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа [Текст]/Л.Г.Лойцянский. - М.: Наука, 1960. - 676 с.
2. Полянин А.Д. Справочник «Нелинейные уравнения математической физики»[Текст] / А.Д.Полянин, В.Ф. Зайцев. - М.: Физматлит, 2002. - 432 с.