



ИСАКОВ К., ОСМОНОВ К.Т., ТОКТАКУНОВ Т.
КГУСТА им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызская Республика
КГТУ им. И. Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика

ISAKOV K., OSMONOV K.T., TOKTAKUNOV T.
KSUCTA n.a. N Isanov, Bishkek, Kyrgyz Republic
KSTU n.a. I. Razzakov, Bishkek, Kyrgyz Republic
fdoinit@mail.ru, boss-toko@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАБОТ БУЛЬДОЗЕРА-ПОГРУЗЧИКА В РЕЖИМЕ ПОВОРОТА ВЫДВИГАЕМЫХ ЧАСТЕЙ ТЕЛЕСКОПИЧЕСКИХ ТОЛКАЮЩИХ БРУСЬЕВ

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE NON-STATIONARY PROBLEM OF WORK OF THE BULLDOZER-LOADER IN THE MODE OF TURNING THE EXTENDED PARTS OF THE TELESCOPIC PUSHING BARS

Макалада, бийик тоолуу жана башка автомобиль жолдорун кыйла натыйжалуу сактоо, ремонттоо жана куруу үчүн ылайыкташылган бульдозер-жүктөгүчтү түзүү долбоорун иштеп чыгуу иштеринин сунушталган режимдери каралат. Жумуштарды аткаруунун түрдүүчө режимдерине дал келүүчү бир же бир нече функционалдык механизмдин көп этаптуу удаалаш кыймылдарын сүрөттөөчү математикалык моделдер сунушталды. Сандык интегралдоо үчүн Адамс методу пайдаланылгыдай кылып, баштапкы шарттары менен болгон экинчи тартиптеги экинчи тартиптеги сызыктуу эмес кадимки дифференциалдык теңдемелер системасы кетирилди.

Өзөк сөздөр: бульдозер-жүктөгүч, трансформациялануучу жумушчу орган, төгүү, телескоптук орган, сузгуч, кум чачкыч, кыруу, автомобиль жолдору, математикалык моделдер, сандык методдор, дифференциалдык теңдемелер.

В статье рассматриваются предполагаемые режимы работ разрабатываемого проекта создания бульдозера-погрузчика, приспособленного для более эффективного содержания, ремонта и строительства высокогорных и других автомобильных дорог. Предложены математические модели, описывающие многоэтапные последовательные движения одного или нескольких функциональных механизмов соответствующих различным режимам выполнения работ. Приведены нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений вторых порядков с начальными условиями, для численного интегрирования которых используется метод Адамса.

Ключевые слова: бульдозер-погрузчик, трансформирующийся рабочий орган, отвал, телескопический орган, ковш, пескоразбрасыватель, скребок, автомобильные дороги, математические модели, численные методы, дифференциальные уравнения.

The article examines the proposed modes of work of the project being developed to create a bulldozer-loader, adapted for more efficient maintenance, repair and construction of high-altitude and other roads. Mathematical models are proposed that describe multi-stage successive movements of one or more functional mechanisms corresponding to different modes of work. Non-linear systems of ordinary differential equations of the second order with initial conditions, for numerical integration of which the Adams method is used, are presented.



Key words: *bulldozer-loader, transforming working body, dump, telescopic organ, bucket, sand-scatterer, scraper, highways, mathematical models, numerical methods, differential equations.*

Основной целью исследования является выработка рекомендаций для разработки и создания бульдозера-погрузчика с трансформирующимся рабочим органом для более эффективного содержания, ремонта и строительства высокогорных автомобильных дорог и дорог сельской местности при их эксплуатации [1, 2].

Основными задачами являются математические моделирования, описывающие процессы выполняемых работ рабочих органов бульдозера-погрузчика многоцелевого назначения в одном из режимов функционирования при их эксплуатации. Обоснование величины действующих сил на металлоконструкции рабочего оборудования; определение влияния статических нагрузок к узлам и механизмам рабочего оборудования и на металлоконструкции в целом; анализ действующих сил на металлоконструкции, проведения прочностных расчетов; приведение жесткостей для определения динамических нагрузок, действующие на металлоконструкции бульдозера-погрузчика, входит в содержание работ.

Для разработки и создания многоцелевых рабочих оборудований, например, как бульдозера-погрузчика с трансформирующимся рабочим органом необходимо провести теоретическое обоснование соответствующих основных параметров, благодаря которым увеличивается его функциональные возможности в режимах:

а) традиционного бульдозера; б) одноковшового погрузчика; в) выдвижение вперед телескопическими толкающими брусьями; г) поворота выдвигаемых частей телескопических толкающих брусьев; д) регулирования угла отвала ковшового погрузчика.

К особенностям нового направления развития конструкции относятся то, что одна и та же металлоконструкция, воспринимающая одну нагрузку при соответствующем режиме, будет воспринимать другую нагрузку в другом режиме. С производством и использованием предлагаемой машины увеличится производительность труда выполняемых работ.

Для исследования каждого режима потребуются определенные математические модели, методы исследования и соответствующие расчетные схемы. Рассмотрим некоторые важнейшие этапы выполняемых работ, и связанные с ними поэтапное математическое моделирование, решения которых строятся по схеме численного метода Адамса [4].

В ходе выполнения работ, эксплуатируемые механизмы могут соответствовать разным режимам, в зависимости от характера и сложности конкретного объекта. Важно отметить, что поскольку процесс выполнения работ нестационарное, то есть различается с течением времени, а последовательность работ механизмов могут быть организованы, в разных режимах. Например: 1) работы механизмов организуются с включением одного за другим, где по окончании работы одного звена механизмы, начать второе, затем третье и так далее; 2) организовать работы можно не всеми звеньями сразу, а частично, сначала одного или нескольких, а затем одного или нескольких других звеньев, и так далее.

В большинстве случаев, и в нашем случае, изменение угла $\varphi(t)$ вызванной действием гидроцилиндров подъема и опускания закрепленные в точке В, может произойти после (**первого этапа**) заполнения ковша, выполненной работы в режиме бульдозера с толкающими брусьями, обычно, с горизонтальным направлением (рис.1). Изменение угла $\theta(t)$ для подъема и опускания с грузом не будет начато пока выдвигаемая часть телескопических толкающих брусьев $r(t)$ не выходит полностью из области неподвижной части телескопических толкающих брусьев (рис.2). Изменение угла $\beta(t)$ связано с моментом времени заполнения ковша, то есть завершающим режимом работы бульдозера, режимами изменений угла $\varphi(t)$, в поэтапном изменении $r(t)$ и

изменения угла $\theta(t)$.

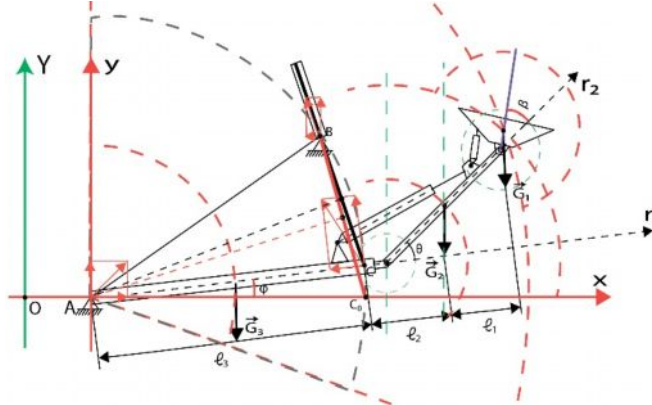
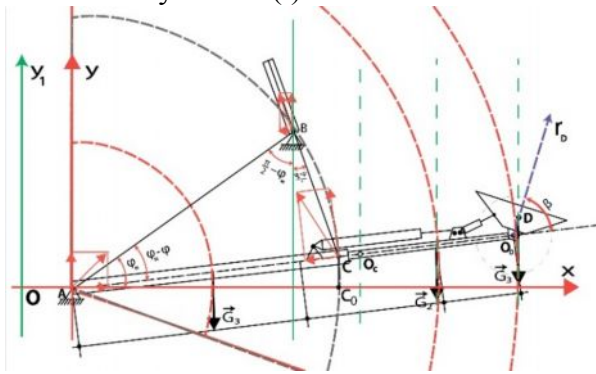


Рис. 1. Режим по горизонтали

Рис. 2. Режим с учетом изменения угла $\theta(t)$

При составлении уравнений движения будем считать, что действующие силы расчетных схем равномерно распределены по продольной оси симметрии базовой машины, соответственно равными с обеих сторон телескопических толкающих брусьев [2]. Считается также, что при подъеме и опускании рабочего органа, при погрузке на рабочее оборудование не действуют боковые силы, то есть рассматривается проекции на плоскости Oxy . Выбор декартовой системы координат Oxy (или Axy) в начале координат O (или A) составляет удобство тем, что все весовые силы $\vec{G}_3, \vec{G}_2, \vec{G}_1$ и другие направлены по вертикальной оси Oy (или Ay). Если базовая машина движется по направлению параллельной оси Ox , при $\varphi_0 = 0$, в качестве первой обобщенной координат можно выбрать

$x = x(t)$; обобщенную скорость $v_x(t) = \dot{x}(t)$. Тем не менее, по отношению к другим параметрам более подходящим обобщенным координатам: $\varphi = \varphi(t)$; $r = r(t)$; $r_4 = r_4(t)$; $\beta = \beta(t)$; $\theta = \theta(t)$, предпочтение дается выбору полярной системы координат.

Первый этап работы. Предположим, что $\varphi_0 = 0$, и пусть за начальный период времени $t_A - t_0$ базовая машина проходит по горизонтальному направлению расстояние $x_A - x_0$, набирая грунт в ковш. Затем она, приостанавливаясь, начинает с начальным значением для этого момента времени t_A , начинает работать в режиме реализации операций (рис.1) второго этапа.

Второй этап: 1) с помощью гидроцилиндров подъема и опускания длиной $l_4 = BC_0 = 4l_3 \sin \frac{\varphi_M}{2}$ закрепленные в точке B , изменяет обобщенный координат и обобщенную скорость

$$r_4 = BC = 4l_3 \sin \frac{\varphi_M - \varphi}{2}; \quad \dot{r}_4 = \frac{dr_4}{dt} = \dot{r}_4(t) = -2l_3 \cos \frac{\varphi_M - \varphi}{2} \cdot \dot{\varphi}; \quad (1.1^*)$$



- 2) изменяет одновременно угол $\varphi(t)$ с начального значения φ_0 ;
- 3) изменяет положение точек механизма $r(t)$ под действием телескопических толкающих брусьев, одновременно изменяя и исходное положение изменением угла $\varphi(t)$;
- 4) изменяет угол $\beta(t)$, чтобы до момента погрузки не рассыпался груз в ковше.

Итак, на *первом этапе* совершается переносное движение всех звеньев за период $t_A - t_0$. На *втором этапе* за начальный момент времени можно считать t_A , а за конечный момент времени - t_r , где $t_A \leq t \leq t_r$. Изменение $\varphi(t)$ характеризует переносное движение для изменения величин $r(t)$ и $\beta(t)$, а в свою очередь, изменение $r(t)$ характеризует относительное движение положения звена по полярной оси r . Изменение угла $\beta(t)$ характеризует относительное движение, помимо переносного движения, обусловленного изменением $\varphi(t)$, зависит от переносного движения связанного с изменением $r(t)$.

На *третьем этапе* движения, когда $t_r \leq t \leq t_\theta$, за начальный момент времени можно считать величину t_r , а за конечный момент времени - t_θ . Изменение угла $\varphi(t)$ соответствует переносному движению для угловых изменений $\theta(t)$ и $\beta(t)$. В свою очередь, изменение $\theta(t)$ характеризует относительное изменение полярного угла в начале координатной точки С. Изменение $\beta(t)$ характеризует относительное движение углового изменения в начале координатной точки Д, которая зависит помимо переносного движения, обусловленного изменением $\varphi(t)$, также и от переносного движения связанного с изменением $\theta(t)$.

Изучение первого этапа работы пока будем ограничивать ссылкой на ранее известные результаты при необходимости, сократив при этом число степеней свободы на одно. Для второго и третьего этапов составляются отдельные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом выше указанных отличий в условиях движений. Если пренебречь массами гидроцилиндров, и учитывать формулу (1.1) взаимосвязи $r_4(t)$ и $\varphi(t)$, то для каждого из второго и третьего этапов остаются по три обобщенных координат: 1) $\varphi(t), r(t), \beta(t)$; 2) $\varphi(t), \theta(t), \beta(t)$ для определения в итоге четырех параметров.

Задаются величины $H = VM$ и $l_3 = AB/2$, верхний предел φ : $\varphi_M = \arcsin \frac{H}{2l_3}$. (1.1')

Пределы изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей при $t_A \leq t \leq t_r$:

$$\varphi_A \leq \varphi \leq \varphi_r, \quad \text{где } \varphi_r \leq \varphi_M; \quad \varphi(t_A) = \varphi_A; \quad \varphi(t_r) = \varphi_r, \quad (1.1'')$$

$$\dot{\varphi}_A \leq \dot{\varphi} \leq \dot{\varphi}_r, \quad \text{где } \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}; \quad \dot{\varphi}(t_A) = \dot{\varphi}_A; \quad \dot{\varphi}(t_r) = \dot{\varphi}_r, \quad (1.1''')$$

$$r_A \leq r \leq l_2, \quad \text{где } r(t_A) = r_A; \quad r(t_r) = l_2, \quad (1.2')$$

$$\dot{r}_A \leq \dot{r} \leq \dot{r}_r, \quad \text{где } \frac{dr}{dt} = \dot{r}(t) = \dot{r}; \quad \dot{r}(t_A) = \dot{r}_A; \quad \dot{r}(t_r) = \dot{r}_r, \quad (1.2'')$$

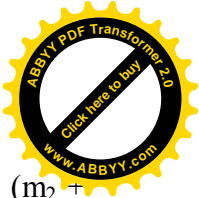
$$\beta_A \leq \beta \leq \beta_r, \quad \text{где } \beta(t_A) = \beta_A; \quad \beta(t_r) = \beta_r, \quad (1.3')$$

$$\dot{\beta}_A \leq \dot{\beta} \leq \dot{\beta}_r, \quad \text{где } \frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta}(t) = \dot{\beta}; \quad \dot{\beta}(t_A) = \dot{\beta}_A; \quad \dot{\beta}(t_r) = \dot{\beta}_r, \quad (1.3''')$$

выбираются исходя из их технического удобства и функционального назначения.

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид:

$$[m_1(l_3 + r_0 + r + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))^2 + m_2(l_3 + r_0 + r)^2 + m_3 l_3^2] \cdot \ddot{\varphi} + 2[m_1(l_3 + r_0 + r +$$



$$+ l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})(\dot{r} + \sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \dot{\beta}) + m_2(l_3 + r_0 + r)\dot{r} \cdot \dot{\varphi} + g [m_3 l_3 + (m_2 + m_1)(l_3 + r_0 + r) + m_1(l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))] \cos \varphi = 0;$$

$$(1.4')$$

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - [m_1(l_3 + r_0 + r + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) + m_2(l_3 + r_0 + r)] \cdot \dot{\varphi}^2 + g(m_1 + m_2) \sin \varphi = 0;$$

$$(1.4'')$$

$$m_1 l_D^2 \ddot{\beta} - m_1 [l_3 + r_0 + r + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})] \sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\varphi}^2 + g m_1 \frac{1}{\sqrt{2}} l_D \sin(2\beta - \frac{\pi}{2}) \sin \varphi = 0.$$

$$(1.4''')$$

Каждые из этих уравнений согласуются с соответствующими начальными условиями, как: (1.4') с (1.1'') и (1.1'''); (1.4'') с (1.2') и (1.2''); (1.4''') с (1.3') и (1.3'') представляя задачу в математической форме постановки на данном этапе. Ввиду нелинейности всех выше указанных уравнений, для решения задачи используется один из методов численного интегрирования. В конкретном случае был выбран и использован метод Адамса, который обеспечивает пятый порядок аппроксимации.

Движения на втором этапе уже описаны и публикуется отдельно.

Третий этап работы: начинается после того, как выдвигаемая часть телескопических толкающих брусьев $r(t)$ целиком выходит из области неподвижной части. С помощью гидроцилиндров, массами которых пренебрегаем, брусья длинами l_2 будут отклоняться от полярной оси r на угол $\theta(t)$ (рис.2).

Будем составить систему дифференциальных уравнений движения рабочих органов машины за промежуток времени $t_r \leq t \leq t_o$, а для этого этапа $r = r_k$ считается постоянной, угол $\theta = \theta(t)$ являясь обобщенной координатой, изменяется в пределе

$$\theta_r \leq \theta(t) \leq \theta_M \tag{2.1}$$

Обобщенная скорость $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = \dot{\theta}$ используется при постоянном значении $r = r_k$.

В этом этапе пределы изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей $\varphi(t)$, $\beta(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\dot{\beta}(t)$ в продолжение ранее известных пределов, будут изменяться, как и $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ за промежуток времени $t_r \leq t \leq t_o$:

$$\varphi_r \leq \varphi \leq \varphi_M, \quad \text{где} \quad \varphi(t_r) = \varphi_r; \quad \varphi(t_M) = \varphi_M, \tag{2.1'}$$

$$\dot{\varphi}_r \leq \dot{\varphi} \leq \dot{\varphi}_M, \quad \text{где} \quad \dot{\varphi}(t_r) = \dot{\varphi}_r; \quad \dot{\varphi}(t_M) = \dot{\varphi}_M, \tag{2.1''}$$

$$\theta_r \leq \theta(t) \leq \theta_M, \quad \text{где} \quad \theta(t_r) = \theta_r; \quad \theta(t_M) = \theta_M, \tag{2.2'}$$

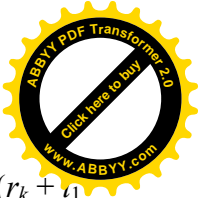
$$\dot{\theta}_r \leq \dot{\theta}(t) \leq \dot{\theta}_M, \quad \text{где} \quad \dot{\theta}(t_r) = \dot{\theta}_r; \quad \dot{\theta}(t_M) = \dot{\theta}_M, \tag{2.2''}$$

$$\beta_r \leq \beta \leq \beta_M, \quad \text{где} \quad \beta(t_r) = \beta_r; \quad \beta(t_M) = \beta_M, \tag{2.3'}$$

$$\dot{\beta}_r \leq \dot{\beta} \leq \dot{\beta}_M, \quad \text{где} \quad \dot{\beta}(t_r) = \dot{\beta}_r; \quad \dot{\beta}(t_M) = \dot{\beta}_M, \tag{2.3''}$$

выбираются исходя из их технического удобства и функционального назначения данного этапа работы.

Сумма кинетических энергий составляющей кинетическую энергию системы в целом:



$$T = T(\varphi, \theta, \beta, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\beta}, t) = \frac{1}{2} m_1 [(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \cos \theta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))^2 \dot{\theta}^2 + l_D^2 \cdot \dot{\beta}^2] + \frac{1}{2} m_2 [(l_3 + r_0 + r_k \cos \theta)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + r_k^2 \dot{\theta}^2] + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 \cdot \dot{\varphi}^2. \quad (2.4)$$

Составляя систему уравнений статического равновесия, определяем реакции связей:

$$P_B = \frac{1}{2 l_3 \sin \frac{\pi - \varphi_M - \varphi}{2}} [G_3 l_3 + G_2 (l_3 + r_0 + r_k \cos \theta) + G_1 (l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \cos \theta)]; \quad (2.5')$$

$$X_A = (G_3 + (G_2 + G_1 \cos \theta) \cos \beta) \sin \varphi + P_B \cos \frac{\pi - \varphi - \varphi_M}{2}; \quad (2.5'')$$

$$Y_A = (G_3 + G_2 + G_1) \cos \varphi - P_B \sin \frac{\pi - \varphi - \varphi_M}{2}. \quad (2.5''')$$

Воспользуемся принципом возможных перемещений и будем составить выражение для элементарной работы заданных сил на возможном перемещении:

$$\delta A_{III} = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = Q_\varphi \delta \varphi + Q_\theta \delta \theta + Q_\beta \delta \beta = -g [m_3 l_3 + m_2 (l_3 + r_0 + r_k \sin \theta) + m_1 (l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \sin \theta)] \cos \varphi \delta \varphi - [m_2 r_k \cos \theta + m_1 (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \cos \theta] \sin \varphi \delta \theta - m_1 \frac{1}{\sqrt{2}} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cos \theta \sin \varphi \delta \beta. \quad (2.6')$$

С учетом равенств (2.4) и (2.6'), составляются уравнения Лагранжа второго рода. Записывая полученную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых старшие производные располагаются в левых частях равенств, имеем:

$$\ddot{\beta} = [(l_3 + r_0 + r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \dot{\theta} + g] \frac{\sqrt{2}}{l_D} \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \sin \varphi \cos \theta; \quad (2.7')$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{E}{U} \dot{\theta} - \frac{C}{U} \cos \theta; \quad (2.7'')$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\hat{B}}{\hat{Z}} \cdot \dot{\varphi} - \frac{\hat{D}}{\hat{Z}} \cos \varphi, \quad (2.7''')$$

где

$$U = m_1 (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))^2 + m_2 r_k^2; \quad (2.7'')$$

$$E = 2m_1 (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) \sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \beta; \quad (2.7''')$$

$$C = [m_1 (l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))) (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) + m_2 ((l_3 + r_0) \operatorname{tg} \theta + r_k)] \cdot \dot{\varphi}^2 + g [m_1 (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) + m_2 r_k] \sin \varphi; \quad (2.7''')$$



$$\widehat{Z} = m_1(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta)^2 + m_2(l_3 + r_0 + r_k \cos\theta)^2 + m_3 l_3^2;$$

(2.7')

$$\widehat{B} = 2[m_1(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta) \sqrt{2} l_D (\cos(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta \cdot \dot{\beta} -$$

$$- \sin(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\theta \cdot \dot{\theta}] - m_2(l_3 + r_0 + r_k \cos\theta) r_k \sin\theta \cdot \dot{\theta};$$

(2.7'')

$$\widehat{D} = g [m_3 l_3 + m_2(l_3 + r_0 + r_k \sin\theta) + m_1(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\sin\theta)].$$

(2.7''')

Каждые из этих уравнений согласуются с соответствующими начальными условиями, как: (2.7') с (2.3') и (2.3''); (1.7'') с (2.2') и (2.2''); (2.7''') с (2.1'') и (2.1''') представляя задачу в математической форме постановки данного этапа. Для решения задачи используется один из методов численного интегрирования. Был выбран метод Адамса, который обеспечивает пятый порядок аппроксимации. Для получения и использования формулы Адамса, сначала будем представить решение разложением в ряд Тейлора. Сумма конечного числа членов ряда будет приближенно равняться искомому частному решению. Для учета членов ряда высоких порядков из (2.7')-(2.7''') сначала будем определить производные третьего порядка по времени

$$\ddot{\beta} = \frac{\sqrt{2}}{l_D} \{[(l_3 + r_0 + r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta \cdot \dot{\varphi}^2 - (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\dot{\theta} + g] \cdot$$

$$\cdot [\cos(\beta - \frac{\pi}{4})(\cos\varphi \cos\theta \cdot \dot{\varphi} - \sin\varphi \sin\theta \cdot \dot{\theta}) - \sin(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\varphi \cos\theta] + [(l_3 + r_0 + r_k + l_1 +$$

$$+ \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))(2\cos\theta \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} - \sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}^2) + (\sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\beta})\cos\theta \cdot \dot{\varphi}^2 -$$

$$- (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\dot{\theta} - \sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\theta} + g]\cos(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\varphi \cos\theta\};$$

(2.8')

$$\ddot{\theta} = -\frac{E}{U} \ddot{\theta} + (\frac{C}{U} \sin\theta + \frac{EU' - E'U}{U^2}) \cdot \dot{\theta} + \frac{EU' - E'U}{U^2} \cos\theta;$$

(2.8'')

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\widehat{B}}{\widehat{Z}} \ddot{\varphi} + (\frac{\widehat{D}}{\widehat{Z}} \sin\varphi + \frac{\widehat{B} \cdot \widehat{Z}' - \widehat{B}' \widehat{Z}}{\widehat{Z}^2}) \cdot \dot{\varphi} + \frac{\widehat{D} \cdot \widehat{Z}' - \widehat{D}' \widehat{Z}}{\widehat{Z}^2} \cos\varphi,$$

(2.8''')

где

$$U' = 2\sqrt{2} l_D m_1(r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\beta};$$

(2.8'')

$$E' = 4l_D^2 m_1[(\frac{r_k + l_1}{\sqrt{2} l_D} + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))(\cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \dot{\beta} - \sin(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\beta}^2) + \cos^2(\beta - \frac{\pi}{4}) \cdot \dot{\beta}^2];$$

(2.8''')

$$C' = [m_1(l_3 + r_0 + 2(r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))) + g \sin\varphi] \sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4}) \dot{\beta} + m_2[2((l_3 + r_0)$$

tg\theta +

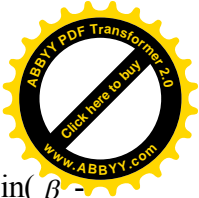
$$+ r_k) \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + (l_3 + r_0) \frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi}^2] + g[m_1(r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4})) + m_2 r_k] \cos\varphi \cdot \dot{\varphi};$$

(2.8''')

$$\widehat{Z}' = 2m_1(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta) (\sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4})\cos\theta \cdot \dot{\beta} - (l_3 + r_0 + (r_k +$$

$$+ l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\sin\theta \cdot \dot{\theta}) - 2m_2(l_3 + r_0 + r_k \cos\theta) r_k \sin\theta \cdot \dot{\theta};$$

(2.8'')



$$\begin{aligned} \bar{B}' = & 2\{m_1 \sqrt{2} l_D [(l_3+r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta)(\cos(\beta - \frac{\pi}{4})\cos\theta \cdot \dot{\beta} - \sin(\beta - \frac{\pi}{4})\cos\theta(\dot{\beta}^2 + \\ & + \dot{\theta}^2) - 2\cos(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\theta \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\beta} - \sin(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\theta \cdot \ddot{\theta}) + (\sqrt{2} l_D \cos(\beta - \frac{\pi}{4})\cos\theta \cdot \dot{\beta} - \\ & (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\sin\theta \cdot \dot{\theta})(\cos(\beta - \frac{\pi}{4})\cos\theta \cdot \dot{\beta} - m_2(l_3 + r_0 + r_k \cos\theta) r_k (\sin\theta \cdot \ddot{\theta} + \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2)]\}; \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\bar{D} = g\{[m_2 r_k + m_1(l_3 + r_0 + (r_k + l_1 + \sqrt{2} l_D \sin(\beta - \frac{\pi}{4}))\cos\theta \cdot \dot{\theta} + \sqrt{2} l_D m_1 \cos(\beta - \frac{\pi}{4})\sin\theta \cdot \dot{\beta})\}. \quad (2.8')$$

Разделяя отрезок времени $[t_r, t_r]$ на n равной Δt части $t_r = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = t_\theta$, где $t_i = t_{i-1} + i \cdot \Delta t$, $i = 1, 2, \dots, n$, сначала при $t = t_A = t_0$ выпишем и найдем значения:

$$\varphi(t_0) = \varphi_r; \quad \dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}_r; \quad \ddot{\varphi}(t_0); \quad \dddot{\varphi}(t_0); \quad (2.9')$$

$$\theta(t_0) = \theta_r; \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_r; \quad \ddot{\theta}(t_0); \quad \dddot{\theta}(t_0); \quad (2.9'')$$

$$\beta(t_0) = \beta_r; \quad \dot{\beta}(t_0) = \dot{\beta}_r; \quad \ddot{\beta}(t_0); \quad \dddot{\beta}(t_0). \quad (2.9''')$$

Полученные значения функций и их производных подставляем в формулах ряда Тейлора, ограничиваясь четырьмя членами:

$$\beta(t) = \beta(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} \dot{\beta}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \ddot{\beta}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!} \dddot{\beta}(t_0) + \dots; \quad (2.10')$$

$$\theta(t) = \theta(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} \dot{\theta}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \ddot{\theta}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!} \dddot{\theta}(t_0) + \dots; \quad (2.10'')$$

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{t-t_0}{1!} \dot{\varphi}(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \ddot{\varphi}(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{3!} \dddot{\varphi}(t_0) + \dots. \quad (2.10''')$$

У тех значений t , для которых эти ряды сходятся, они представляют решения уравнений. Записывая все величины (2.9'), (2.9''), (2.9''') в индексах и зная $\beta_i, \theta_i, \varphi_i, \dot{\beta}_i, \dot{\theta}_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\beta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\varphi}_i, \ddot{\beta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\varphi}_i$, при $i = 0$, по формулам

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \frac{\Delta t}{1!} \dot{\beta}_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\beta}_i + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{\beta}_i + \dots; \quad (2.11')$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\Delta t}{1!} \dot{\theta}_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\theta}_i + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{\theta}_i + \dots; \quad (2.11'')$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \frac{\Delta t}{1!} \dot{\varphi}_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\varphi}_i + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{\varphi}_i + \dots \quad (2.11''')$$

$$\beta_{i+2} = \beta_i + \frac{2\Delta t}{1!} \dot{\beta}_i + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \ddot{\beta}_i + \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \dddot{\beta}_i + \dots; \quad (2.12')$$

$$\theta_{i+2} = \theta_i + \frac{2\Delta t}{1!} \dot{\theta}_i + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \ddot{\theta}_i + \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \dddot{\theta}_i + \dots; \quad (2.12'')$$

$$\varphi_{i+2} = \varphi_i + \frac{2\Delta t}{1!} \dot{\varphi}_i + \frac{(2\Delta t)^2}{2!} \ddot{\varphi}_i + \frac{(2\Delta t)^3}{3!} \dddot{\varphi}_i + \dots \quad (2.12''')$$

можно определить значения приближенных решений $\beta_1, \beta_2; \theta_1, \theta_2; \varphi_1, \varphi_2$, при $t_1 = t_0 + \Delta t$ и при $t_2 = t_0 + 2\Delta t$ ($i = 0$).

Допустим теперь, что нам известны значения решения $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i; \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i; \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$. Тогда неизвестными являются $\dot{\beta}_i, \dot{\theta}_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\beta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\varphi}_i, \ddot{\beta}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\varphi}_i$.

Аналогично (2.11) ряд Тейлора для β_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$),



$$\dot{\beta}_{i+1} = \dot{\beta}_i + \frac{\Delta t}{1!} \ddot{\beta}_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \dddot{\beta}_i + \dots$$

(2.13')

Для исключения из выражения $\dot{\beta}_i$ и $\ddot{\beta}_i$, и получения формул Адамса [4] с четырьмя членами разложения ряда (2.11'), представим по формуле Тейлора $\dot{\beta}_{i-1}$ и $\dot{\beta}_{i-2}$:

$$\dot{\beta}_{i-1} = \dot{\beta}_i + \frac{(-\Delta t)}{1!} \ddot{\beta}_i + \frac{(-\Delta t)^2}{2!} \dddot{\beta}_i + \dots \quad (2.13'')$$

$$\dot{\beta}_{i-2} = \dot{\beta}_i + \frac{(-2\Delta t)}{1!} \ddot{\beta}_i + \frac{(-2\Delta t)^2}{2!} \dddot{\beta}_i + \dots \quad (2.13''')$$

Из (2.13'') находим:

$$\Delta \dot{\beta}_{i-1} = \dot{\beta}_i - \dot{\beta}_{i-1} = \frac{\Delta t}{1} \ddot{\beta}_i - \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{\beta}_i. \quad (2.14')$$

Вычитая из членов (2.13'') члены (2.13'''), найдем

$$\Delta \dot{\beta}_{i-2} = \dot{\beta}_{i-1} - \dot{\beta}_{i-2} = \frac{\Delta t}{1} \ddot{\beta}_i - \frac{3\Delta t^2}{2} \dddot{\beta}_i. \quad (2.14'')$$

Вычитая из членов (2.14') члены (2.14''), найдем

$$\Delta^2 \dot{\beta}_{i-2} = \Delta \dot{\beta}_{i-1} - \Delta \dot{\beta}_{i-2} = \Delta t^2 \dddot{\beta}_i, \quad (2.14''')$$

или отсюда

$$\ddot{\beta}_i = \frac{1}{\Delta t^2} \Delta \dot{\beta}_{i-2}. \quad (2.15)$$

Подставляя значения (1.15) в (1.14'), получим:

$$\ddot{\beta}_i = \frac{1}{\Delta t} (\Delta \dot{\beta}_{i-1} - \frac{1}{2} \Delta \dot{\beta}_{i-2}). \quad (2.15')$$

Подставляя (2.15) и (2.15') в (2.11'), получим:

$$\beta_{i+1} = \beta_i + \frac{\Delta t}{1} \dot{\beta}_i + \frac{\Delta t}{2} \Delta \dot{\beta}_{i-1} + \frac{5\Delta t}{12} \Delta^2 \dot{\beta}_{i-2}. \quad (2.16)$$

Совершенно аналогичные, как соотношения (2.13') - (2.16), форм записей имеют и другие обобщенные переменные. Они выполняются попеременно при каждом изменении индекса $i = 1, 2, \dots, n$.

Составлен общий алгоритм решения задачи, включающий также предыдущий этап решения задачи.

Список литературы

1. Гоберман А.А. Теория, конструкция и расчет строительных и дорожных машин [Текст] / А.А.Гоберман. - М.: «Машиностроение», 1979. - 407 с.
2. Разработка и создание бульдозера-погрузчика с трансформирующимся рабочим органом для повышения эффективности строительства, содержания, ремонта высокогорных автомобильных дорог и сельскохозяйственных работ. [Текст] / Отчет о ГБНИР. - Бишкек: КГУСТА, 2016. - 88 с.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика [Текст] / А.П. Маркеев. - М.: Наука, 1990. - 416 с.
4. Мастяева И.Н. Численные методы [Текст] / И.Н.Мастяева, О.Н.Семенихина. - М.: МЭСИ, 2003. - 241 с.
5. Токтакунов Т. Имитационная модель обслуживания пассажирского потока в аэропорту "Манас" [Текст] / Т.Токтакунов, С.Т.Алиева // Вестник КГУСТА. - 2017. - №1(55). - с.45-52.

