УДК 517.962, 517.956.3

ОБ ОДНОМ СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С МГНОВЕННЫМ И ШНУРОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Кокозова Айнагул Жылкычиевна, *ст. преподаватель и аспирант кафедры «Информационные технологии и управление» ОшТУ, Кыргызстан, 714018, г.Ош, ул.Исанова 81, ОшТУ, +996554757202,* kokozova72@mail.ru
Сатыбаев Абдуганы Джунусович, *д.ф.м.н., профессор, Заведующей кафедрой «ИТиУ» ОшТУ,* abdu-satybaev@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассмотрена двумерная прямая задача телеграфного уравнения, указанными в теме статье, источниками. Прямая задача построена таким образом, чтобы можно было исследовать соответствующую обратную задачу.

В данной статье исследовано первое условие корректности задачи, т.е. существование решения, доказано, что решение существует при определенных условиях.

Ключевые слова: двумерная; прямая задача; телеграфное уравнение; мгновенный; шнуровой источник; существование решения.

ON THE ONE EXISTENCE OF THE SOLUTION OF A TWO-DIRECT DIRECT PROBLEM OF A TELEGRAPHIC EQUATION WITH AN INSTANT AND CURVE SOURCE

Kokozova Ainagul Zhylkychievna, *Art. lecturer and graduate student of "Information Technology and Management" Osh Technical University, Kyrgyzstan, 714 018, Osh, ul.Isanova 81 OshTU, +996554757202,* kokozova72@mail.ru
Satybaev Abdugany Dzhunusovich, *Head: Prof., Professor, Head of Department "ITiU" OshTU,* abdu-satybaev@mail.ru

Abstract. This article describes the two-dimensional direct problem telegraph equation indicated in the subject article, sources. The direct problem is constructed in such a way that it was possible to investigate the corresponding inverse problem.

This article investigated the first condition of correctness of the problem, ie, existence of a solution is proved that a solution exists under certain conditions.

Keywords: two-dimensional; direct problem; telegraph equation; instant; cord source; the existence of solutions.

Введение. Телеграфное уравнение состоит из двух дифференциальных уравнений, первое дифференциальное уравнение описывает распределение напряжения во времени, а второе-распределение тока во времени. В частном случае система уравнения Максвелла также сводится к телеграфному уравнению.

Распространение электрического сигнала по проводу воздушной линии также описывается телеграфным уравнением. Проводник линии характеризуется физическими параметрами: C - емкость, L - индуктивность, R -сопротивление, $G = R_i^{-1}$ – утечка.

Телеграфное уравнение бывает двух видов:

1) Телеграфное уравнение в линии без потерь;
2) Телеграфное уравнение в линии с потерями.

В первом случае: R - сопротивление, G - проводимость считаются очень малыми и в этом случае: модель телеграфного уравнения зависит только от L- индуктивности и C – емкости между проводниками, а во втором случае: R и G являются большими величинами.

В данной статье рассматривается вторая постановка задачи.

Для решения задач телеграфного уравнения применяют различные методы в зависимости от начальных и граничных, краевых условий, и в зависимости физических процессов и явлений и т.д. Приведем наиболее часто применяемые методы решений: метод характеристик, метод разделения переменных, метод комфортных преобразований, операционные методы, численные методы (сеток, Монте-Карло, итерационные методы, Рунге Кутта) (см. лит. [1-3,6]).

Постановка задачи. Двумерное телеграфное уравнение затухающего электромагнитного волнового процесса или передачи напряженности магнитного поля по двум пластинам выражается математической моделью следующего вида:

$$H''(x,y,t)=\frac{\bar{c}^2(x,y)}{\bar{\varepsilon}(x,y)\bar{\mu}(x,y)}\Delta H-\frac{\bar{\sigma}(x,y)}{\bar{\varepsilon}(x,y)}H_t'(x,y,t), x\in R_{+,} y\in R, t\in R_+ \quad , \tag{1}$$

где $\Delta H = H''_{xx}+H''_{yy}$ – оператор Лапласа, $\bar{c}(x,y)$ – скорость распространения электромагнитных волн, $\bar{\varepsilon}(x,y), \bar{\mu}(x,y)$ – электрическая и магнитная проницаемость, $\bar{\sigma}(x,y)$ – проводимость среды, $H(x,y,t)$ – напряженность магнитного поля.

Для нахождения среди многих решений, однозначного единственного решения задачи (1) необходимо задать начальное условие и граничное условие следующего вида:

$$H(x,y,t)\big|_{t<0}\equiv 0, \quad H'_x(x,y,t)\big|_{x=0}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t), \quad y\in[-D,D], t\in[0,T], \tag{2}$$

Условие 1 формулы (2) описывается следующим физическим процессом: электромагнитная среда до определенного времени $t=0$ находилась в состоянии покоя, а начиная с этого момента начинается действовать электромагнитные волновые процессы.

Условие 2 формулы (2) означает, что на границе $x=0$ будет действовать сила мгновенного источника с величиной $h(y)$, а также сила шнурового источника с величиной $r(y)$. После этих сил начинаются электромагнитные волны.

Двумерная прямая задача телеграфного уравнения.

Найти обощенное решение задачи (1) – (2) $H(x,y,t)$-напряженности магнитного поля при известных значениях параметров $\bar{c}^2(x,y), \bar{\varepsilon}(x,y), \bar{\mu}(x,y), \bar{\sigma}(x,y)$, и при известных значениях источников $h(y), r(y)$.

Предположим, что относительно параметров уравнения начального и граничного условия выполнены следующие условия:

$$\bar{c}^2(x,y), \bar{\varepsilon}(x,y), \bar{\mu}(x,y), \bar{\sigma}(x,y)\in\Lambda_1, \quad h(y), r(y)\in\Lambda_2, \tag{3}$$

где

$$\Lambda_1=\{\bar{\varepsilon}(x,y)\in C^6((0,d)*(-D_1,D_1)), \quad \sup p\{\bar{\varepsilon}(x,y)\}\in((0,d)*(-D_1,D_1)),$$

$$a=\|\bar{\varepsilon}(x,y)\|_{C^2}\le M_2, \quad 0<M_1\le\bar{\varepsilon}(x,y)\le M_2\},$$

$$\Lambda_2=\{\sup p \quad h(y)\in(-D,D), h(y)\in C^5(-D,D)\},$$

$$D=D_1+T(M_2+a), T=2\alpha/(M_1-a).$$

Здесь T – время, порожденное возмущение магнитной напряженности функциями источниками $r(y)$, $h(y)$, которое достигает глубины d и вернется обратно на поверхность $x=0$ для всех y.

Сведения задачи (1) – (2) к регулярной задаче. Введем новую переменную $\alpha(x,y)$, которая является решением задач Эйконала следующего вида:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_x^2(x,y)+\alpha_y^2(x,y)=\frac{\bar{\varepsilon}(x,y)\cdot\bar{\mu}(x,y)}{\bar{c}^2(x,y)}\quad,\\&\alpha(x,y)\big|_{x=0}=0,\qquad \alpha_x(x,y)\big|_{z=0}=\frac{\bar{\varepsilon}(0,y)\cdot\bar{\mu}(0,y)}{\bar{c}^2(0,y)}\quad,\\&\alpha_x(x,y)>0,\quad \lim_{x\to\infty}\alpha(x,y)=\infty\qquad,\end{aligned}\right\}$$

и введем новые функции: $\mu(\alpha,y)=\bar{\mu}(x,y),\qquad \varepsilon(\alpha,y)=\bar{\varepsilon}(x,y),$ $c(\alpha,y)=\bar{c}(x,y),\ \sigma(\alpha,y)=\bar{\sigma}(x,y),\qquad \vartheta(\alpha,y,t)=H(x,y,t).$

Тогда учитывая результаты [4,5], получим прямую задачу с данными на характеристиках:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha^2}+L_1\vartheta(\alpha,y,t),\qquad |\alpha|\langle t\langle T,\qquad y\in(-D,D),\\&\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{|\alpha|=t}=S(t,y),\qquad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D),\\&\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{y=-D}=\vartheta(\alpha,y,t)\big|_{y=+D}=0.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Здесь для выделения регулярных и сингулярных частей решения, представлено решение задачи (4) в следующем виде:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=S(\alpha,t)\theta(t-|\alpha|)+R(\alpha,y)\theta_1(t-|\alpha|)+\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t),$$

где $\tilde{\vartheta}(\alpha,y,t)-$ непрерывная функция.

Определим некоторые равенства, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{|\alpha|=t}=S_y(t,y),\qquad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D),\\&\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\Big|_{|\alpha|=t}=S_t(t,y)+R(t,y),\qquad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D),\\&\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\Big|_{|\alpha|=t}=-sign\alpha R(t,y),\qquad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D).\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$$L_1\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{c^2(\alpha,y)}{\varepsilon(\alpha,y)\mu(\alpha,y)}\left[\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\Delta\alpha\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}+\alpha_y\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\alpha\partial y}\right]-\frac{\sigma(\alpha,y)\partial\vartheta}{\varepsilon(\alpha,y)\partial t}.\tag{6}$$

Обобщенным решением задачи (4) назовем функцию $\vartheta(\alpha,y,t)$ удовлетворяющую:

$$\int_0^t\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\frac{\partial\phi}{\partial\tau}+\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}+L\vartheta(\alpha,y,t)\phi(\alpha,y,t)\right]dyd\alpha d\tau=$$

$$=\int_{|\alpha|}^t\int_{-D}^D S(\tau,y)\phi(\alpha,y,t)dyd\tau,\qquad t\in(0,T),\qquad (*).$$

где $\phi(\alpha,y,t)\quad\in C^2(\Omega(T,D)).$

$\Omega(T,D)=\{(\alpha,y,t):\alpha\in(-T,T),y\in(-D,D),|\alpha|<t<T\}.$

Решение задачи (4) по формуле Даламбера имеет вид:

$$\vartheta(\alpha,y,t)=\frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)h(y)}{2}\delta(t-|\alpha|)+\frac{1}{2}\int_{o}^{t}\int_{\alpha-t+\tau}^{\alpha+t-\tau}L_1\vartheta(\xi,y,t)d\xi d\tau.$$

Подставляя значение $L_1(a,y,t)$ в формулу Даламбера и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми сингулярными частями, получим

$$S(t,y)=\frac{h(y)\mu(0,y)\varepsilon(0,y)}{2\cdot c^2(0,y)}+\frac{1}{2}\int_0^t\left\{\frac{c^2(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left[\alpha_y S(\tau,y)+\Delta\alpha S(\tau,y)\right]-\right. \tag{7}$$
$$\left.-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}S(\tau,y)\ \right\}d\tau,\quad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D).$$

$$R(t,y)=\frac{1}{2}\int_0^t\frac{c^2(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)\mu(\tau,y)}\left\{S_{yy}-\frac{\mu_y'(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}S_y-\frac{\mu_\tau'(\tau,y)}{\mu(\tau,y)}\alpha_y S_y+\alpha_y R_y+\right. \tag{8}$$
$$\left.+\Delta\alpha R(\tau,y)-\frac{\sigma(\tau,y)}{\varepsilon(\tau,y)}*R(\tau,y)\right\}d\tau,\quad t\in[0,T],\qquad y\in(-D,D).$$

Из равенства $H(x,y,t)=\vartheta(\alpha(x,y),y,t)$ дифференцируя и приравнивая $x=0$ получим:

$$H_x'(x,y,t)\big|_{x=0}=\vartheta_\alpha'(\alpha(x,y),y,t)\big|_{\alpha=0}\cdot\alpha_x'\big|_{x=0}=\vartheta_\alpha'(\alpha,y,t)\big|_{\alpha=0}*\alpha_x'\big|_{x=0}=$$
$$=\vartheta_\alpha'(\alpha,y,t)\big|_{\alpha=0}*\frac{\varepsilon(0,y)\mu(0,y)}{c^2(0,y)}=h(y)\delta(t)+r(y)\theta(t).$$

С другой стороны, $H_x'(x,y,t)\big|_{x=0}=\left[S_x'(0,y)-R(0,y)\right]\theta(t)-S(0,y)\delta(t)+R_x'(0,y)\theta_1(t).$

Отсюда

$$S(0,y)=h(y),\qquad R(0,y)=S_x'(0,y)-r(y),\qquad S_x'(0,y)=\frac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2\cdot c^2(x,y)},\qquad R(0,y)=0.$$

Таким образом, функция $r(y)$ не может быть произвольной функцией, она должна быть равна: $r(y)=\dfrac{h(y)\cdot\varepsilon(0,y)\cdot\mu(0,y)}{2\cdot c^2(0,y)}.$

Конечно-разностный аналог задачи.

$$\left.\begin{aligned}&V_{t\bar t}=V_{\alpha\bar\alpha}+L_1V_{ij}^k,\qquad (ih_1,jh_2,k\tau)\in\Omega_{ij}^k,\\&V_{\pm i,j}^{|2i|}=S_j^{|2i|},\qquad i=\overline{-N,N},\qquad j=\overline{-L,L}\\&V_{i,L}^k=V_{i,-L}^k=0,\qquad i=\overline{-N,N};\qquad k=\overline{|2i|,2N},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $$L_1V_{ij}^k=\frac{c_{ij}{}^2}{\mu_{ij}\varepsilon_{ij}}\left[V_{y\bar y}+\alpha_{yij}V_{\alpha\bar y}+\Delta\alpha_{ij}V_{\frac{0}{\alpha}}\right]-\frac{\sigma_{ij}}{\varepsilon_{ij}}V_{\frac{0}{i}}.$$

$$S_{kj}=\frac{h_j\mu_{0j}\varepsilon_{0j}}{2c^2{}_{0j}}+\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k}\left\{\frac{c_{lj}{}^2}{\varepsilon_{lj}r_{lj}}\left[\alpha_{\bar y}\left(S_{\bar y}\right)_{lj}+(\Delta\alpha)_{lj}S_{lj}\right]-\left[\frac{\tau_{lj}}{\varepsilon_{lj}}\right]S_{lj}\right\}\cdot\tau,\quad k=\overline{0,M},\qquad j=\overline{-L,L};$$

$$\Omega_{ij}^k = \{x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau : ih_1 \in (-T,T), \quad |ih_1| < 2\tau k < T, ih_2 \in (-D,D)\}, h_1 = \frac{T}{N}, \quad h_2 = \frac{D}{L}, \quad \tau = \frac{T}{2N}.$$

$$R_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k}\left\{\frac{c_{lj}^{\ 2}}{\varepsilon_{lj} r_{lj}}\left[\left(S_{\bar{y}y}\right)_{lj} + \frac{\left(\mu_{\bar{y}}\right)_{lj}}{\mu_{lj}}\left(S_{\bar{y}}\right)_{lj} + \frac{\left(\mu_{\bar{\tau}}\right)_{lj}}{\mu_{lj}}\left(\alpha_{\bar{y}}\right)_{lj}\left(S_{\bar{y}}\right)_{lj} + \alpha_{\bar{y}}\left(R_{\bar{y}}\right)_{lj} + \left(\Delta\alpha\right)_{lj} R_{lj}\right] - \frac{\tau_{lj}}{\varepsilon_{lj}}\right\}\cdot\tau.$$

В области $\Omega_{ij}^{\ k}$ определим кусочно-непрерывную функцию $\widetilde{u}(\alpha, y, t)$ внутриследующего параллелепипеда

$$\prod = \{k\tau \le t \le (k+1)\tau, ih_1 \le \alpha \le (i+1)h_1, \ jh_2 \le y \le (i+1)h_2\}$$

$$\widetilde{u}(\alpha, y, t) = u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right) + u_{ij}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right) +$$

$$+ u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right) + u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right) +$$

$$+ u_{i+1j+1}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right) + u_{i+1j}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right) +$$

$$+ u_{ij+1}^{k+1}\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right) + u_{i+1j+1}^{k+1}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right). \qquad (10)$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{|i|\le k\le M;}\, h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(u_{ij}^k\right)^2 \le A, && \max_{|i|\le k\le M;}\, h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1}\right)^2 \le B_2,\\
&\max_{|i|\le k\le M;}\, h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau}\right)^2 \le B_1, && \max_{|i|\le k\le M;}\, h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(\frac{u_{ij+1}^k - u_{ij}^k}{h_2}\right)^2 \le B_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Покажем, что

$$\left.\begin{aligned}
&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D} u^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy \le A, && \max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D} u_\alpha^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy \le B_2,\\
&\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D} u_t^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy \le B_1, && \max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-t}^{t}\int_{-D}^{D} u_y^2(\alpha,y,t)\,d\alpha dy \le B_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Докажем первое неравенство (12).

При $t = k\tau, \ ih_1 \le \alpha \le (i+1)h_1, \ jh_2 \le y \le (j+1)h_2$, вычислим следующий интеграл:

$$\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy=\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\left[u_{ij}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\right.$$

$$\left.+u_{i+1j}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{ij+1}^k\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^k\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\right]^2 d\alpha dy=$$

$$=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi,\ \frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=h_1h_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[u_{ij}^k(1-\xi)(1-\eta)+u_{i+1j}^k\left(\xi(1-\eta)\right)+\right.$$

Обозначим через $a=u_{ij}^k,\quad b=u_{i+1j}^k,\quad c=u_{ij+1}^k,\quad d=u_{ij}^{k+1}.$

Тогда справедлива:

$$\int_0^1\int_0^1\left[a(1-\varsigma)(1-\eta)+в(1-\eta)\cdot\varsigma+c(1-\varsigma)\eta+d\varsigma\eta\right]^2d\varsigma d\eta=$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left\{a^2(1-\varsigma)^2(1-\eta)^2+b^2(1-\eta)^2\cdot\varsigma^2+c^2(1-\varsigma)^2\eta^2+d^2\varsigma^2\eta^2+\right.$$

$$+2ab(1-\varsigma)\cdot(1-\eta)^2\cdot\varsigma+2ac(1-\varsigma)^2\cdot(1-\eta)\cdot\eta+2ad\cdot(1-\varsigma)(1-\eta)\cdot\varsigma\eta+$$

$$\left.+2bc(1-\eta)(1-\varsigma)\varsigma\cdot\eta+2bd(1-\eta)\varsigma^2\cdot\eta+2cd(1-\varsigma)\cdot\eta^2\cdot\varsigma\right\}d\varsigma d\eta=\int_0^1\left\{\frac{1}{3}a^2(1-\eta)^2+\right.$$

$$+\frac{1}{3}b^2(1-\eta)^2+\frac{1}{3}c^2\eta^2+\frac{1}{3}d^2\eta^2+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right](1-\eta)^2+2\frac{1}{3}ac\cdot\eta(1-\eta)+$$

$$\left.+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta(1-\eta)+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\eta\cdot(1-\eta)+2bd\cdot\frac{1}{3}(1-\eta)\cdot\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\eta^2\right\}d\eta=$$

$$=\frac{\alpha^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{b^2}{3}\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{c^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+\frac{d^2}{3}\int_0^1\eta^2d\eta+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot$$

$$\cdot\int_0^1(1-\eta)^2d\eta+\frac{2ac}{3}\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\int_0^1\eta(1-\eta)d\eta+$$

$$+2bd\frac{1}{3}\int_0^1(1-\eta)\cdot\eta d\eta+2cd\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\int_0^1\eta^2d\eta==\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+2ab\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{2ac}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2ad\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+2bc\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]^2+\frac{2bd}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]+2cd\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]=\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}+$$

$$+\frac{c^2}{9}+\frac{d^2}{9}+\frac{ab}{9}+\frac{ac}{9}+\frac{ad}{18}+\frac{bc}{18}+\frac{bd}{9}+\frac{cd}{9}\le\frac{1}{9}\left[a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+\frac{ad}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{bc}{2}+bd+cd\right]\le\frac{1}{9}\left[\alpha^2+b^2+c^2+d^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{d^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{2}+\frac{d^2}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{d^2}{2}\right]\le\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+c^2+d^2\right];$$

$$\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy \le \frac{1}{4}h_1h_2\left[\left(u_{ij}^k\right)^2+\left(u_{ij+1}^k\right)^2+\left(u_{i+1j}^k\right)^2+\left(u_{i+1j+1}^k\right)^2\right].$$

Просуммируем на весь интервал, тогда получим желаемое неравенство:

$$\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\tilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy \le h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left(u_{ij}^k\right)^2 \le A. \qquad (13)$$

Для параллелопипеда $t=(k+1)\tau,\ ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,\ jh_2\le y\le(j+1)h_2$ также можно показать выше полученное неравенство.

Покажем линейность функции $\tilde{u}(\alpha,y,t)$ по t при $k\tau\le t\le(k+1)\tau.$ Рассмотрим

$$\tilde{u}(\alpha,y,k\tau)=u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{k\tau}{\tau})+u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(y+1-\frac{y}{h_2})\cdot$$
$$\cdot(\frac{k\tau}{\tau}-k)+u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{k\tau}{\tau})+u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(k+1-\frac{k\tau}{\tau})+$$
$$+u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1}-j)(\frac{y}{h_2}-j)(k+1-\frac{k\tau}{\tau})+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(\frac{k\tau}{\tau}-k)+$$
$$+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{k\tau}{\tau}-k)+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{k\tau}{\tau}-k)=$$
$$=u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})+u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})+$$
$$+u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)+u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j);$$

$$\tilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)=u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau})+u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+$$
$$+1-\frac{y}{h_2})(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau})+$$
$$+u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(k+1-\frac{(k+1)\tau}{\tau})+u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}+j)(k+1--\frac{(k+1)\tau}{\tau})+$$
$$+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)+$$
$$+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(\frac{(k+1)\tau}{\tau}-k)=u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})+$$
$$+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)\quad.$$

Очевидно, что

$$\widetilde{u}(\alpha,y,t)=(k+1-\frac{t}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t}{\tau}-k)\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)=$$
$$=\left[(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)\right]. \qquad (14)$$

Это означает, что функция $\widetilde{u}(\alpha,y,t)-$ линейная. Отсюда

$$\widetilde{u}^2(\alpha,y,t)=(1-\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+2(1-\frac{t-k\tau}{\tau})(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}(\alpha,y,k\tau)\widetilde{u}(\alpha,y,(k+1)\tau)+$$
$$+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\le 2\left[(1-(\frac{t-k\tau}{\tau}))^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})^2\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)\right]\le \qquad (15)$$
$$\le(1-\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)+(\frac{t-k\tau}{\tau})\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau) \quad .$$

Тогда очевидно, что при $\tau k\le t\le(k+1)\tau$ или $0\le\frac{t-\tau k}{\tau}\le 1$ справедливо неравенство:

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\begin{cases}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\\ \int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}^2(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\end{cases}\le \qquad (16)$$
$$\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}(u_{ij}^k)^2\le A \quad .$$

Это означает справедливость первого неравенства формулы (12).

Докажем, что $\max\limits_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\widetilde{u}_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_1$,

если $\max\limits_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum\limits_{j=-L}^{L}\sum\limits_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right]^2\le B_1$.

В $t=k\tau,$ $ih_1\le\alpha\le(i+1)h_1,$ $ih_2\le y\le(j+1)h_2$ рассмотрим

$$\widetilde{u}_t(\alpha,y,t)=u_{ij}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau})+u_{ij}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau}+$$
$$+u_{i+1j}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})(-\frac{1}{\tau})+u_{ij+1}^k(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau})+$$
$$+u_{i+1j+1}^k(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)(-\frac{1}{\tau})+u_{i+1j}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(j+1-\frac{y}{h_2})\frac{1}{\tau}+$$
$$+u_{ij+1}^{k+1}(i+1-\frac{\alpha}{h_1})(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau}+u_{i+1j+1}^{k+1}(\frac{\alpha}{h_1}-i)(\frac{y}{h_2}-j)\frac{1}{\tau}=$$

$$=\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}+\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+$$

$$+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}\ .$$

Обозначим через

$$a_1=\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau},b_1=\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau},c_1=\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau},$$

$$d_1=\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau},$$ суммировав на всем интервале получим

$$h_1h_2\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(y+1)h_1}\tilde{u}_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy=$$

$$=h_1h_2\int\limits_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int\limits_{ih_1}^{(i+1)h_1}\Bigg[\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(i+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}+$$

$$\left[+\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{i+1j}^{k}}{\tau}\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+\left(i+1-\frac{\alpha}{h_1}\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\cdot\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{\tau}+\left(\frac{\alpha}{h_1}-i\right)\left(\frac{y}{h_2}-j\right)*\right.$$

$$\left.+\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{i+1j+1}^{k}}{\tau}\right]^2 d\alpha dy=\left|\frac{\alpha}{h_1}-i=\xi\quad\frac{y}{h_2}-j=\eta\right|=$$

$$=h_1h_2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[(1-\xi)(1-\eta)a_1+\xi(1-\eta)b_1+(1-\xi)\eta c_1+\xi\eta d_1\right]^2d\xi d\eta=h_1h_2\frac{1}{4}\left[a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2\ \right]\ . \quad (17)$$

Из последнего вытекает

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}u_t^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}h_1h_2\sum_{j=-L}^{L}\sum_{j=-N}^{N}\left[\frac{u_{ij}^{k+1}-u_{ij}^{k}}{\tau}\right]^2\le B_1.$$

Можно также показать линейность функций $\tilde{u}_t(\alpha,y,t)$.

Докажем теперь, что $\max\limits_{|\alpha|\le t\le T}\int\limits_{-D}^{D}\int\limits_{-t}^{t}\tilde{u}_\alpha^2(\alpha,y,t)d\alpha dy\le B_2,$

$$\textit{если} \quad \max_{|i| \le k \le M} h_1 h_2 \sum_{j=-L}^{L} \sum_{i=-N}^{N} \left[\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} \right]^2 \le B_2 \quad .$$

Вычислим в прямоугольнике $t = \kappa\tau \;\; ih_1 < \alpha < (i+1)h_1, \;\; jh_2 < y \le (j+1)h_2$ следующее выражения:

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, t) = \left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(k+1-\frac{t}{h_2}\right)\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} + \left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_1} +$$

$$+\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1} + \left(\frac{y}{h_2}-j\right)\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\frac{u_{i+1j+1}^{k+1} - u_{ij+1}^{k+1}}{h_1};$$

$$\tilde{u}_\alpha(\alpha, y, k\tau) = \left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)\cdot\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} + \left(\frac{y}{h_2}-j\right)\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_2} \quad .$$

Проинтегрируем $\tilde{u}_\alpha^2\,(\alpha, y, \kappa\tau)$

$$\int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1} \tilde{u}_\alpha^2(\alpha, y, \kappa\tau)\,d\alpha dy = \int_{jh_2}^{(j+1)h_2}\int_{ih_1}^{(i+1)h_1}\left[(i+1-\frac{y}{h_2})\cdot\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} + \right.$$

$$\left. +(\frac{y}{h_2}-j)\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_2})\right]^2 d\alpha dy = \begin{vmatrix} \eta = \dfrac{y}{h_2} - j, & \dfrac{\alpha}{h_1} - i = \xi \\ dy = h_2 d\eta & d\alpha = h_1 d\xi \end{vmatrix} =$$

$$= h_1 h_2 \int_0^1 \left[(1-\eta)\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1} + \eta\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1} \right]^2 d\eta =$$

$$\left| \textit{обозначая} \;\; a_2 = \left(u_{i+1j}^k - u_{ij}^k\right)/h_1, \qquad b_2 = \left(u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k\right)/h_1 \right| =$$

$$= h_1 h_2 \int_0^1 \left[(1-\eta)^2 \cdot \alpha_2^2 + 2(1-\eta)\cdot\eta a_2 b_2 + \eta^2 b_2^2 \right] d\eta =$$

$$= h_1 h_2 \left[\frac{1}{3}a_2^2 + 2a_2 b_2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{3}b_2^2 \right] \le h_1 h_2 \left[\frac{1}{3}a_2^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_2^2 - \frac{1}{3}a_2^2 - \frac{1}{3}b_2^2 + \frac{1}{3}b_2^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}h_1 h_2 \left[a_2^2 + b_2^2 \right] \le \frac{h_1 h_2}{2}\left[\left(\frac{u_{i+1j}^k - u_{ij}^k}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{u_{i+1j+1}^k - u_{ij+1}^k}{h_1}\right)^2 \right] \quad .$$

Суммируя последнее при $i = \overline{-N, N}, \;\; j = \overline{-L, L}$ получим 3-ое неравенство (12)

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}$$

$$\left[\left(\frac{u_{i+1j}^{k}-u_{ij}^{k}}{h_1}\right)^2+\left(\frac{u_{i+1j+1}^{k}-u_{ij+1}^{k}}{h_1}\right)^2\right]\le B_2\quad. \tag{18}$$

Таким же образом можно показать, что справедливость неравенство

$$\max_{|\alpha|\le t\le T}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+\frac{u_{ij+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k}}{h_1}\right]^2\le B_2\quad.$$

Покажем линейность функции $\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,t)$ в параллелопипеде
$k\tau<t<(k+1)\tau,\ ih_1<\alpha<(i+1)h_1,\quad jh_2<y<(j+1)h_2.$

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau)=-u_{ij}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{i+1j}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)-$$

$$-u_{ij+1}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^{k+1}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right);$$

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)=-u_{ij}^{k}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)+u_{i+1j}^{k}\frac{1}{h_1}\left(j+1-\frac{y}{h_2}\right)-$$

$$-u_{ij+1}^{k}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right)+u_{i+1j+1}^{k}\frac{1}{h_1}\left(\frac{y}{h_2}-j\right)\quad.$$

Отсюда следует:

$$\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,t)=\left(k+1-\frac{t}{\tau}\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau)=$$

$$=\left(1-\frac{t-\tau k}{\tau}\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,k\tau)-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,(k+1)\tau)\quad. \tag{19}$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}_{\alpha}(\alpha,y,t)$ линейная функция.

$$\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}u_{\alpha}^{2}(\alpha,y,t)d\alpha dy\le\left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,k\tau)d\alpha dy+$$

$$+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le$$

$$\le\left(1-\left(\frac{t}{\tau}-k\right)\right)\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,\tau k)d\alpha dy+\left(\frac{t}{\tau}-k\right)*$$

$$*\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}u_{\alpha}^{2}(\alpha,y,(k+1)\tau)d\alpha dy\le\max_{|i|\le k\le M}\int_{-D}^{D}\int_{-t}^{t}\tilde{u}_{\alpha}^{2}(\alpha,y,\tau k)d\alpha dy\le$$

$$\le\max_{|i|\le k\le M}\frac{h_1h_2}{2}\sum_{j=-L}^{L}\sum_{i=-N}^{N}\left[\frac{u_{i+1j}^{k+1}-u_{ij}^{k+1}}{h_1}+\frac{u_{i+1j+1}^{k+1}-u_{ij+1}^{k+1}}{h_1}\right]^2\le B_2.$$

Т.о. доказана теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия (3),(11) и функция $\vartheta(\alpha,y,t)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка в $\Omega(T,D)$ и пусть $S(t,y)\in L_2(\Omega(T,D))$. Тогда существует обобщенное решение задачи (9) в пространстве $W_2^1(\Omega(T,D))$.

Заключение. В данной статье мы рассматривали существования обобщенного решения двумерной задачи для телеграфного уравнения. В ходе решения задачи нами применены методы: выделения особенностей, выпрямления характеристики и конечно-разностной.

Список литературы

1. Дмитриев В.И. и др. Развитие математических методов исследования прямых и обратных задач электродинамики // УМН. 1976. Т.31. Вып.6. С. 123–141.

2. Жданов М.С., Спичак В.В. Современные методы моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах // Препринт ИЗМИРАН №45(519). М. 1984. 31 с.

3. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи электродинамики. М. 1991. 304 с.

4. Сатыбаев А.Дж. Единственность решения прямой задачи геоэлектрики с плоской границей // Межрегион. научн.-техн. конф. «Кыргызская государственность и проблема межкультурного диалога». Сборник научных трудов. Вып. 3. Ош. 2003. С. 172–175.

5. Сатыбаев А.Дж. Существование решения прямой задачи волнового уравнения с плоской границей // Матер. II межд. научн.-метод. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке». Том II. Алматы. 2003. С. 383–389.

6. Тихонов А.Н. и др. Некоторые общие алгоритмы решения прямых и обратных задач электродинамики // Вычислительные методы и программирование. М.: МГУ, 1973. Вып. XX. С. 3–11.