

УДК 517.68

**КОНЕЧНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО
УРАВНЕНИЯ С ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ***Абдылдаева Асель Рыскулбековна, ст. преп., КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, 720044, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова 66, e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

Цель статьи – рассматривается нелинейное операторное уравнение в случае, когда оператор A является вполне непрерывным. Построено методом Лаврентьева приближенное решение этого уравнения в Гильбертовом пространстве. Исследована конечномерная аппроксимация и доказана сходимость построенного конечномерного решения к точному решению при $n \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: нелинейное операторное уравнение, вполне непрерывный оператор, конечномерная аппроксимация, сопряженный оператор.

**FINITE – DIMENSIONAL APPROXIMATION OF THE NONLINEAR OPERATOR
EQUATION WITH A COMPLETELY CONTINUOUS LINEAR PART***Abdyldaeva Asel Ryskulbekovna, Kyrgyzstan, 720044, c. Bishkek, KSTU named after I.Razzakov, e-mail: asabdyl_72@mail.ru*

The purpose of the article - we consider a nonlinear operator equation in the case when the operator A is completely continuous. The approximate solution of this equation in the Hilbert space is constructed by Lavrent'ev's method. The finite-dimensional approximation is investigated and the convergence of the constructed finite-dimensional solution to the exact solution is proved as $n \rightarrow \infty$.

Keywords: Nonlinear operator equation, completely continuous operator, finite-dimensional approximation, adjoint operator.

Рассмотрим уравнение $Az = u + Kz$, (1)

когда A вполне непрерывный линейный оператор в H , $K = AK_1$, K_1 - нелинейный оператор, удовлетворяющий условию Липшица в H .

Допустим, что уравнение (1) при $u = u_0$ имеет единственное решение z_0 .

Через A^* обозначим оператор, сопряженный оператору A . Известно [1], что A^* будет линейным и вполне непрерывным оператором. Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\alpha z + A^*Az = A^*u + A^*Kz. \quad (2)$$

A^*A - положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор, таковым будет и оператор AA^* . Обозначим через $\{\psi_k\}, \{\varphi_k\}$ ортонормированные собственные элементы операторов A^*A, AA^* , соответствующие собственным значениям $\{\lambda_i^2\}$.

Для собственных элементов имеют место тождества $A^*\varphi_i = \lambda_i\psi_i, A\psi_i = \lambda_i\varphi_i$. (3)

Имеет место обобщенная теорема Гильберта [1]

$$Au = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \lambda_i \varphi_i, \quad u_i = (u, \psi_i), \quad A^*u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^* \lambda_i \psi_i, \quad u_i^* = (u_i, \varphi_i). \quad (4)$$

Используя (4), от уравнения (2) переходим к следующему нелинейному операторному уравнению

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i (K(z), \varphi_i)}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i. \quad (5)$$

В силу предположения $K = AK_1$, тогда

$$(K(z), \varphi_i) = (AK_1(z), \varphi_i) = (K_1(z), A^* \varphi_i) = \lambda_i (K_1(z), \psi_i).$$

Учитывая это, из (5) переходим к уравнению

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z), \psi_i) \psi_i. \quad (6)$$

Нелинейное операторное уравнение (6) решаем методом последовательных приближений по формуле

$$\bar{z}_j = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(\bar{z}_{j-1}), \psi_i) \psi_i; j = 1, 2, \dots \quad (7_j)$$

За нулевое приближение возьмем элемент

$$\bar{z}_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i.$$

Покажем, что при $\alpha > 0, \bar{z}_0 \in H$.

Действительно, используя ортонормированную систему $\{\psi_i\}$, получаем

$$\|\bar{z}_0\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 u_i^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\frac{x}{\alpha + x^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда из (8) получаем неравенство

$$\|\bar{z}_0\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \|u\| < \infty,$$

т. к. $u \in H$, т. е. $\bar{z}_0 \in H$.

Докажем сходимость последовательности $\{\bar{z}_j\}$ в H . Из элементов этой последовательности составим ряд $\bar{z}_0 + [\bar{z}_1 - \bar{z}_0] + [\bar{z}_2 - \bar{z}_1] + \dots + [\bar{z}_n - \bar{z}_{n-1}] + \dots \quad (9)$

Сходимость ряда (9) и последовательности $\{\bar{z}_j\}$ эквивалентна. Оценим каждый член ряда (9). Полагая $j = 1$ в (7_j), получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_1 - \bar{z}_0\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(\bar{z}_0), \psi_i) \psi_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 (K_1(\bar{z}_0))_i^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (K_1(\bar{z}_0))_i^2 \right)^{1/2} \leq \|K_1(\bar{z}_0)\| \quad (7_1) \end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство

$$\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \leq 1.$$

Далее из выражения при $j = 2$ вычитая выражение при $j = 1$ в (7₁), имеем

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_2 - \bar{z}_1\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(\bar{z}_1) - K_1(\bar{z}_0), \psi_i) \psi_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 (K_1(\bar{z}_1) - K_1(\bar{z}_0))_i^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (K_1(\bar{z}_1) - K_1(\bar{z}_0))_i^2 \right)^{1/2} \leq \|K_1(\bar{z}_1) - K_1(\bar{z}_0)\| \leq N \|\bar{z}_1 - \bar{z}_0\|. \end{aligned} \quad (7_2)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_3 - \bar{z}_2\| &= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(\bar{z}_2) - K_1(\bar{z}_1), \psi_i) \psi_i \right\| \leq \\ &\leq \|K_1(\bar{z}_2) - K_1(\bar{z}_1)\| \leq N \|\bar{z}_2 - \bar{z}_1\| \leq N^2 \|\bar{z}_1 - \bar{z}_0\|. \end{aligned} \quad (7_3)$$

Для любого натурального числа $n \geq 2$ справедливо неравенство

$$\|\bar{z}_n - \bar{z}_{n-1}\| \leq N^{n-1} \|\bar{z}_1 - \bar{z}_0\|. \quad (7_n)$$

Справедливость неравенства (7_n) можно доказать методом полной математической индукции.

Оценим $K_1(\bar{z}_0)$, где \bar{z}_0 нулевое приближение

$$\|K_1(\bar{z}_0)\| = \|K_1(\bar{z}_0) - K_1(0) + K_1(0)\| \leq \|K_1(\bar{z}_0) - K_1(0)\| + \|K_1(0)\| \leq N \|\bar{z}_0\| + \|K_1(0)\|.$$

Ряд (9) мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} N^n \|\bar{z}_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} N^{n-1} \|K_1(0)\| \quad (10)$$

Сумму ряда (9) обозначим через z_α . Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \bar{z}_j = z. \quad (11)$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, используя непрерывность оператора K_1 и сходимость рядов получаем

$$z_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_i}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha), \psi_i) \psi_i, \quad (12)$$

т.е. z_α является решением уравнения (6), следовательно, и уравнения (2).

Доказана

Теорема 1. Пусть 1) A - линейный вполне непрерывный оператор; 2) нелинейный оператор K представим в виде $K = AK_1$, где K_1 - нелинейный оператор, определенный в H и удовлетворяющий условию Липшица

$$\|K_1(z_1) - K_1(z_2)\| \leq N \|z_1 - z_2\|, \text{ причем } N < 1.$$

Тогда уравнение (2) для любых $u \in H$ и $\alpha > 0$ имеет единственное решение $z_\alpha \in H$.

В силу мажорирующего ряда (10) при $N < 1$, для z_α следует неравенство

$$\|z_\alpha\| \leq \frac{\|\bar{z}_0\|}{1 - N} + \frac{\|K_1(0)\|}{1 - N}. \quad (13)$$

Обратный оператор оператору

$$E - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z), \psi_i) \psi_i$$

обозначим через D_α .

Решение z_α с помощью D_α записывается в виде $z_\alpha = D_\alpha u$.

Пусть элементам u_1 и u_2 соответствуют решения z_α^1 и z_α^2 . Справедливо тождество

$$D_\alpha u_k = u_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1 D_\alpha u_k, \psi_i) \psi_i, \quad k = 1, 2.$$

Вычитая из тождества при $k = 1$ тождество при $k = 2$, получаем

$$\begin{aligned} \|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\| &\leq \|u_1 - u_2\| + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 (K_1 D_\alpha u_1 - K_1 D_\alpha u_2)_i^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \|u_1 - u_2\| + N \|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\|. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая $N < 1$, имеем $\|D_\alpha u_1 - D_\alpha u_2\| \leq \frac{\|u_1 - u_2\|}{1 - N}$, (14)

т.е. оператор D_α удовлетворяет условию Липшица.

Через z_α^0 обозначим решение уравнения (6) при $u = u_0$. Покажем, что $z_\alpha^0 \rightarrow z_0$ при $\alpha \rightarrow 0$ в H .

Подставим z_α^0 в (6) при $u = u_0$, получаем тождество

$$z_\alpha^0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i) \psi_i. \quad (15)$$

По предположению элемент z_0 удовлетворяет тождеству $Az_0 = u_0 + AK_1(z_0)$.

Отсюда, используя (3), получаем

$$z_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_{0i}}{\lambda_i} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i. \quad (16)$$

Вычитая из тождества (15) тождество (16), получаем

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_{0i}}{(\alpha + \lambda_i^2)\lambda_i} \psi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i) \psi_i - \sum_{i=1}^{\infty} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i. \quad (17)$$

Из (16) получаем $u_{0i} = \lambda_i z_{0i} - \lambda_i (K_1(z_0), \psi_i)$.

Подставляя это в (17), получаем

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{0i} \psi_i}{\alpha + \lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(K_1(z_0), \psi_i)}{\alpha + \lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2 (K_1(z_\alpha^0), \psi_i)}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i - \sum_{i=1}^{\infty} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i.$$

Проводя преобразования из предыдущего, получим

$$z_\alpha^0 - z_0 = -\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_{0i} \psi_i}{\alpha + \lambda_i^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0) - K_1(z_0), \psi_i) \psi_i.$$

$$\begin{aligned} \|z_\alpha^0 - z_0\| &\leq \alpha \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 (K_1(z_\alpha^0) - K_1(z_0))_i^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \alpha \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 \right)^{1/2} + \|K_1(z_\alpha^0) - K_1(z_0)\| \leq \alpha \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 \right)^{1/2} + N \|z_\alpha^0 - z_0\|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $N < 1$, из последнего неравенства получим

$$\|z_\alpha^0 - z_0\| \leq \frac{\alpha \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{z_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 \right)^{1/2}}{1 - N} \quad (18)$$

Допустим, что точное решение z_0 представимо в виде $z_0 = A^\sigma \vartheta_0$ (19). Отсюда $z_{0i} = \lambda_i^\sigma \vartheta_{0i}$, $0 < \sigma < 1$.

Подставляя это в правую часть неравенства (18), имеем

$$\|z_\alpha^0 - z_0\| \leq \alpha \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_i^\sigma}{\alpha + \lambda_i^2} \right)^2 \vartheta_{0i}^2 \right)^{1/2}}{1 - N} \quad (20)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\frac{x^\sigma}{\alpha + x^2} \leq \frac{\alpha^{\frac{\sigma}{2}}}{2\alpha} (2 - \sigma)^{\frac{2-\sigma}{2}} \sigma^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Используя это из (20) получаем

$$\|z_\alpha - z_0\| \leq \frac{(2 - \delta)^{2-\delta/2} \|\vartheta_0\|}{1 - N} \alpha^\delta \quad (21)$$

Доказана

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) при $u = u_0$ уравнение (1) имеет единственное решение z_0 , представимое в виде $z_0 = A^\sigma \vartheta_0, \vartheta_0 \in H, 0 < \sigma < 1$.

Тогда решение z_α^0 уравнения (2) при $u = u_0$ сходится к точному решению уравнения (1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (21).

Рассмотрим конечную сумму

$$z_{\alpha,0}^n = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i) \psi_i. \quad (22)$$

Покажем, что при специальной зависимости параметра регуляризации $\alpha(n)$ от n , последовательность элементов $\{z_{\alpha(n),0}^n\}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится по норме пространства H к точному решению уравнения (1) при $u = u_0$.

Вычитая из (23) точное решение уравнения (1), получим

$$z_{\alpha,0}^n - z_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i) \psi_i - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_{0i}}{\lambda_i} \psi_i - \sum_{i=1}^{\infty} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} z_{\alpha,0}^n - z_0 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i u_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i - \sum_{i=1}^n \frac{u_{0i}}{\lambda_i} \psi_i \right) - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{u_{0i}}{\lambda_i} \psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_\alpha^0), \psi_i) \psi_i - \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i - \sum_{i=1}^{\infty} (K_1(z_0), \psi_i) \psi_i. \end{aligned}$$

Учитывая, что $u_{0i} = \lambda_i z_{0i} - \lambda_i (K_1(z_0), \psi_i)$, из предыдущего равенства получим

$$z_{\alpha,0}^n - z_0 = -\alpha \sum_{i=1}^n \frac{z_{0i}}{\alpha + \lambda_i^2} \psi_i + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\alpha + \lambda_i^2} (K_1(z_{\alpha,0}^n) - K_1(z_0), \psi_i) \psi_i - \sum_{i=n+1}^{\infty} z_{0i} \psi_i. \quad (23)$$

Предположим, что точное решение z_0 представимо в виде $z_0 = A^\sigma \vartheta_0, \vartheta_0 \in H, 0 < \sigma < 1$.

Тогда из (23) переходя к норме, получаем

$$\|z_{\alpha,0}^n - z_0\| \leq \alpha^\sigma K_0 + N \|z_{\alpha,0}^n - z_0\| + \lambda_{n+1}^\theta \|v_0\|.$$

Отсюда

$$\|z_{\alpha,0}^n - z_0\| \leq \frac{\alpha^\sigma K_0 + \lambda_{n+1}^\theta \|v_0\|}{1 - N}.$$

Если $\alpha(n) = \lambda_{n+1}^\theta$, то получим оценку $\|z_{\alpha,0}^n - z_0\| \leq \frac{\lambda_{n+1}^\theta \|v_0\|}{1 - N}$.

Доказана

Теорема 3. Пусть: 1) выполняются все условия теоремы 1 и 2; 2) $\alpha(n) = \lambda_{n+1}^\theta$.

Тогда $z_{\alpha,0} \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow \infty$ и имеет место неравенство

$$\|z_{\alpha,0}^n - z_0\| \leq \frac{\lambda_{n+1}^\theta \|v_0\|}{1 - N}.$$

Список литературы

1. Бакушинский А.Б., Гончарский А.А. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
2. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного регуляризующего оператора для решения операторного уравнения первого рода // журнал «Проблемы современной науки и образования» № 14(56) Москва 2016.
3. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Построение конечномерного

регуляризирующего оператора для решения линейного вполне непрерывного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Журнал «Известия КГТУ им. И. Раззакова» № 1 (37) Бишкек 2016.

4. Саадабаев А.С., Абдылдаева А.Р. Конечномерный регуляризирующий оператор для решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Журнал «Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук» № 11 часть 1, Москва 2016 г.