УДК 681.513.1

СИНТЕЗ БЕЗИНЕРЦИОННОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ РОБАСТНЫХ ВОЗМУЩЁННЫХ ОБЪЕКТОВ С УЧЁТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Оморов Т. Т.*, д.т.н., проф., член-корр. НАН КР, 720071, Бишкек, пр. Чуй, 265а.,тел.: 0312646334.*
Джолдошев Б.О.*, д.т.н., проф., КГТУ им.И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, Бишкек, пр.Мира 66. email: bekbolot2009@yandex.ru, ORCID ID 0000-0001-5699-2262*
Темиркулова Н.Т., *преп., КГТУ им.И.Раззакова, Кыргызстан, 720044, Бишкек, пр.Мира 66. email: temirkulova.n@gmail.com, ORCID ID 0000-0003-0501-8579*

Аннотация. Предложен метод синтеза системы управления, позволяющие обеспечить основные требования к проектируемой системе при заданных инженерных требованиях к основным характеристикам системы (быстродействие, точность и т.д.), а также ограничений на величины управляющих воздействий и управляемых переменных. Оценка качества процессов управления объектов осуществляется с помощью функциональных соотношений, определяемых непосредственно по переходным процессам рассматриваемых систем. Использование введенных функций и полученных аналитических условий дало возможность разработать единый подход к решению задач управления. Рассмотрены случаи построения САУ с безынерционым регулятором в условиях неполной информации об объекте регулирования. Отличительной особенностью этих методов является так называемая *робастность* (или грубость), что означает нечувствительность характеристик замкнутой системы к небольшим погрешностям модели реальной системы. Показаны, что при допустимых вариациях параметров САУ, переходные процессы в проектируемой системы автоматического управления должны оставаться в пределах заданных допустимых областей (множеств) гарантированным образом. Разработан алгоритм построения робастной САУ для линейного непрерывного многомерного объекта по показателям качества. Рассмотрена задача получения гарантированного результата для управления линейным объектом, математические описания которых содержат параметрические неопределённости. В результате определены параметры системы управления, удовлетворяющие заданным требованиям к точности и качеству процесса управления.

Ключевые слова: устройство управления, безинерционный регулятор, линейное многомерное управляющее устройство, робастность, быстродействие, точность.

. SYNTHESIS OF THE NON-INERTIAL REGULATOR FOR LINEAR ROBUST DISTURBED OBJECTS WITH RESTRICTION OF LIMITATIONS

Omorov T.T. *PhD (Engineering), Associate Professor, Kyrgyzstan, 720071, c.Bishkek, phone: 0312 64 63 34.*
Djoldoshov B.O. *PhD (Engineering), Associate Professor, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I.Razzakov. e-mail: bekbolot2009@yandex.com ORCID ID 0000-0001-5699-2262*
Temirkulova N.T. *teacher, Kyrgyzstan, 720044, c.Bishkek, KSTU named after I.Razzakov. e-mail: temirkulova.n@gmail.com ORCID ID 0000-0003-0501-8579*

Abstract The method of synthesis of a control system, the main requirements to the projected system allowing to provide at the set engineering requirements to the main characteristics of system (speed, accuracy, etc.) is offered and also restrictions for sizes of the operating influences and the operated variables. Assessment of quality of management processes of objects is carried out by means of the functional ratios determined directly by transition processes of the considered systems. Use of the entered functions and the received analytical conditions has given the chance to develop uniform approach to the solution of tasks of management. Cases of creation of ACS with the non-inertial regulator in the conditions of incomplete information on subject to regulation are considered. Distinctive feature of these methods is the so-called robustness (or roughness) that means tolerance of characteristics of the closed system to small errors of model of real system. Are shown that at admissible variations of the ACS parameters, transition processes in projected the systems of automatic control have to remain the guaranteed image within the set admissible areas (sets). The algorithm of creation of robustness of ACS is developed for a linear continuous multidimensional object on quality indicators. The problem of obtaining the guaranteed result for management of a linear object which mathematical descriptions contain parametrical uncertainty. The control system parameters meeting the set requirements to accuracy and quality of management process are as a result determined.

Keywords: control device, non-inertial controller, linear multi-dimensional control device, robustness, speed, accuracy

В докладе рассматривается проблема управления при возможных допустимых изменениях параметров объекта управления или регулятора от заданного значения. Показаны, что при допустимых вариациях параметров систем автоматического управления (САУ), переходные процессы в проектируемой системы автоматического управления должны оставаться в пределах заданных допустимых областей (множеств) гарантированным образом. Границы этих множеств задаются показателями качества, как время управления и точность системы. Предложен алгоритм построения робастной САУ для линейного непрерывного многомерного объекта.

1. Общая постановка задачи синтеза. Предположим, что управляемый объект описывается линейной моделью вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(t), \tag{1}$$

где $x(t), u(t)-$ векторы состояния объекта и управления, имеющие соответственно размерности n, m; $t_0 -$ начальный момент времени; $A, B-$ вещественные матрицы соответствующих размерностей: $A = \{a_{ij}\}_{nxn}, B = \{b_{ij}\}_{nxm}$. $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_n(t)]^T$ – n-мерный вектор внешних возмущений; Будем предполагать, что относительно вектора возмущения $\xi(t)$ известно, что они не измеряются, но $|\xi_i(t)| \le \xi_i^+$.

Далее предполагается, что матрицы A, B объекта управления (1) точно неизвестны:

$$A = A^* + \Delta A, \quad B = B^* + \Delta B, \quad \Delta A = \{\Delta a_{ij}\}_{n\times n}, \quad \Delta B = \{\Delta b_{i\nu}\}_{n\times m}, \tag{2}$$

где $A^* = \{a_{ij}^*\}, B^* = \{b_{i\nu}^*\}-$ матрицы объекта соответственно составленные из номинальных значений элементов матриц A, B; $\Delta A, \Delta B-$ матрицы, характеризующие неопределенности в задании объекта управления. Считается, что интервалы неопределенностей для A, B известны:

$$|\Delta a_{ij}| = |a_{ij} - a^*_{ij}| \le \Delta a_{ij}^+, \quad |\Delta b_{i\nu}| = |b_{i\nu} - b^*_{i\nu}| \le \Delta b_{i\nu}^+, \tag{3}$$

Δa_{ij}^+, $\Delta b_{i\nu}^+$ – положительные числа, определяющие границы изменения параметрических возмущений $\Delta a_{ij}, \Delta b_{i\nu}$. Пусть объект (1) обладает свойством управляемости, а вектор состояния $x(t)$ доступен для измерения. Закон управления ищем в виде линейной обратной связи

$$u(t) = K \cdot x(t), \tag{4}$$

где $K-$ матрица искомого регулятора:

$$K=\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11}\ k_{12}\cdots k_{1n} \\ k_{21}\ k_{22}\cdots k_{2n} \\ \cdots \\ k_{m1}\ k_{m2}\cdots k_{mn} \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение вектор-параметр $p=\left[k_1, k_2,..., k_n\right]$, размерности $r= m\times n$, составленный из строк k_i матрицы K.

Пусть требования к синтезируемой системе представлены в виде вектора [1]

$\Pi_i=\left[T_i^*, \sigma_i^*, \Delta_i^*\right]$, $i=\overline{1,n}$, где $T_i^*, \sigma_i^*, \Delta_i^*-$ максимально допустимые значения соответственно времени регулирования, перерегулирования и статической ошибки регулирования процессов $x_i(t)$. По вектору качества Π_i выбираем положительные функции $\sigma_i(t)$, с помощью которых задаются границы допустимых областей. Требования, предъявляемые к качеству синтезируемой системы, определяются переходными процессами по ошибке управления $e_i(t)$.

Предполагается, что к системе управления предъявляются следующие требования: переходные процессы системы $x_i(t)$ должны принадлежать заданным подмножествам:

$$X_i(t)=\left\{x_i\in R^1:\left|x_i(t)\right|\le\sigma_i(t)\right\},\quad i=\overline{1,n},\quad t\in\left[t_0,t_k\right], \tag{5}$$

где $\sigma_i(t)-$ положительные непрерывно дифференцируемые функции времени, определяющие границы $X_i(t)$; t_k- конечный момент времени. Последние необходимо задавать так, чтобы обеспечивать технические и технологические требования к проектируемой системе. Допустимое подмножество $X(t)$ для вектора $x_i(t)$ определяется выражением $X(t)=\left\{x_i\in R^n: x_i(t)\in X_i(t)\right\},\ i=\overline{1,n},\ t\in\left[t_0,t_k\right].$

Величины управляющих воздействий $u_\ell(t)$ должны быть ограничены по модулю:

$$\left|u_\ell(t)\right|\le u_\ell^*,\quad u_\ell^*(t)>0,\quad \ell=\overline{1,m}, \tag{6}$$

где u_ℓ^*- максимально допустимое значение $u_\ell(t)$, определяющее е границу допустимой области $u_\ell(t)=\left\{\ u_\ell\in R^m:\left|u_\ell(t)\right|\le u_\ell^*\ \right\},\ t\in\left[t_0,\infty\right)$. Тогда допустимое множество $U(t)$ для вектора управления $u(t)$задается соотношением

$U(t)=\left\{\ u\in R^m:\ u_\ell(t)\in U_\ell(t)\right\}.$

С целью дальнейшего использования введем следующие подмножества:

$$P_1=\left\{\ p\in R^r:\ x(t)\in X(t)\ \right\},\quad P_2=\left\{\ p\in R^r:\ u(t)\in U(t)\ \right\}.$$

Таким образом, указанные требования к САУ будут удовлетворяться, если вектор-параметр $p\in P=P_1\bigcap P_2$. Задача синтеза САУ состоит в определении параметра p, обеспечивающего принадлежность переходных процессов $x_i(t)$ и управляющих воздействий $u_\ell(t)$, заданным допустимым подмножествам $X_i(t), U_\ell(t)$. т.е. $p\in P$.

Синтез безинерционного регулятора. Решение сформулированной задачи параметрического синтеза можно осуществить путем описания подмножеств P_1, P_2. При этом для задания подмножества P_1, определяющего ограничения на управляемые процессы $x_i(t)$, будем использовать полученные в [3,5] условия допустимого качества управления:

$$\int_{t_0}^{t} x_i(\tau)\cdot \dot{x}_i(\tau)\,d\tau \le \Gamma_i(t), \text{ где } \Gamma_i(t)=\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\dot{\sigma}_i(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Уравнение (1) с учетом (2) и (4) будет

$$\dot{x}(t)=P\cdot x(t)+\Delta P\cdot x(t)+\xi(t), \tag{8}$$

где $p_{ij}=a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}^{*}k_{\nu i}$, $\Delta p_{ij}=\Delta a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}^{*}k_{\nu i}$. $P=A^{*}+B^{*}K$, $|\Delta P|\le \Delta P^{+}$, $\Delta P=\Delta A^{*}+\Delta B^{*}K$.

Условие (7) с учётом (8)

$$\begin{gathered} p_{ii}\int_{t_0}^{t}x_i^2(\tau)\,d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}x_i(\tau)\,x_j(\tau)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}\Delta p_{ii}\,x_i^2(\tau)\,d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\int_{t_0}^{t}\Delta p_{ij}\,x_i(\tau)\,x_j(\tau)\,d\tau+ \\ +\int_{t_0}^{t}x_i(\tau)\xi_j(\tau)d\tau\le\Gamma_i(t). \end{gathered} \tag{9}$$

Рассмотрим предельные случаи попадания процессов $x_i(t)$ на нижнюю и верхнюю границы соответствующих допустимых областей $X_i(t)$. При попадании $x_i(t)$ на верхнюю границу, т.е. при $x_i(t)=\sigma_i(t)$ условия (9) запишутся в виде

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\Delta p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\xi_j(\tau)d\tau\le\tilde{\Gamma}_i(t), \tag{10}$$

где $\tilde{\Gamma}_i(t)=\Gamma_i(t)-\left(p_{ii}+\Delta p_{ii}\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i^2(\tau)d\tau.$

При $x_i(t)=-\sigma_i(t)$ имеем

$$-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\Delta p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\xi_j(\tau)d\tau\le\tilde{\Gamma}_i(t), \tag{11}$$

Неравенства (10) и (11) можно объединить и записать в виде

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau+\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\Delta p_{ij}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)x_j(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\xi_j(\tau)d\tau\right|\le\tilde{\Gamma}_i(t). \tag{12}$$

Неравенства (12) можно записать в виде

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left(p_{ij}+\Delta p_{ij}\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau(x_j(\tau)+\xi_j(\tau))\right|\le\tilde{\Gamma}_i(t),\quad i=\overline{1,n},\quad \tilde{\Gamma}_i(t)>0. \tag{13}$$

Справедлива оценка

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left(p_{ij}+\Delta p_{ij}\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau(x_j(\tau)+\xi_j(\tau))\right|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left(\left|p_{ij}+\left|\Delta p_{ij}\right|\right|\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_j(\tau)d\tau,\quad i=\overline{1,n}. \tag{14}$$

Тогда условие (13) с учетом (14) запишем

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\left|p_{ij}\right|+\left|\Delta a_{ij}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu j}\right|\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_j(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\xi_j(\tau)d\tau\leq\tilde{\Gamma}_i(t),\tag{15}$$

С учетом (3), условие (15) будет

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\left|p_{ij}\right|+\Delta a_{ij}^{+}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}^{+}k_{\nu j}\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_j(\tau)d\tau+\xi_i^{+}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau\leq\tilde{\Gamma}_i(t),\tag{16}$$

где $\tilde{\Gamma}_i(t)=\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\left[\dot{\sigma}_i(\tau)-\left\{\left(a_{ii}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}k_{\nu i}\right)+\left(\Delta a_{ii}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu i}\right)\right\}\sigma_i(\tau)\right]d\tau,$

или

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(\left|a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}b_{i\nu}k_{\nu j}\right|+\Delta a_{ij}^{*}+\sum_{\nu=1}^{m}\Delta b_{i\nu}k_{\nu i}\right)\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)\sigma_j(\tau)d\tau+\xi_i^{+}\int_{t_0}^{t}\sigma_i(\tau)d\tau\leq\tilde{\Gamma}_i(t),\quad i=\overline{1,n},\tag{17}$$

Обозначим $G_i(p,t)$ левую часть (17), тогда $G_i(p,t)\leq\tilde{\Gamma}_i(t)$. В результате, справедливо утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\left|x_i(t_0)\right|=\sigma_i(t_0),\ i=\overline{1,n}.$ Тогда для выполнения целевых соотношений (7) достаточно, чтобы для всех $t_0,\ t\geq t_0$ обеспечивались условия

$$P_1=\left\{\ p\in R^n:\ G_i(p,t)\leq\Gamma_i(t),\quad i=\overline{1,n}\right\}.\tag{18}$$

***3.* Учет ограничений на управление.** Описание подмножества P_2 будем также осуществлять на основе [3,7]. В частности, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $u(t_0)\in U(t_0)$. Тогда ограничения на управляющие воздействия (6) будут выполняться, если

$$\int_{t_o}^{t}u_\ell(\tau)\cdot\dot{u}_\ell(\tau)d\tau\leq 0,\qquad \ell=\overline{1,m},\qquad t\in\left[t_o,t_k\right].\tag{19}$$

Теперь для описания P_2 будем использовать соотношения (6). Для этой цели на основе закона управления (4) можно записать выражения для функций $u_\ell(t)$ и $\dot{u}_\ell(t)$:

$$u_l(t)=\sum_{\nu=1}^{m}k_{l\nu}x_\nu(t),\qquad \dot{u}_\ell(t)=\sum_{\nu=1}^{m}k_{\ell\nu}\dot{x}_\nu(t)=\sum_{\nu=1}^{m}k_{\ell\nu}\left[\sum_{j=1}^{n}p_{\nu j}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}\Delta p_{\nu j}x_j(t)\right],\tag{20}$$

Тогда условие (19) запишется $\int_{t_0}^{t}u_l(\tau)\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m}k_{l\nu}(p_{\nu j}+\Delta p_{\nu j})x_j(\tau)\right]d\tau\leq 0,$ или

$$\int_{t_o}^{t}V_\ell(p,\tau)d\tau\leq 0,\ \ \ell=\overline{1,m},\tag{21}$$

где $V_\ell(p,t)-$ квадратичные формы: $V_\ell(\,p,t)=x^T(t)\cdot F_\ell(p)\cdot x(t),\quad l=\overline{1,m}.$ Здесь $F(p)-n\times n-$мерная вещественная матрица, зависящая от компонентов вектора параметра $p\in P$. Выполнение неравенств $V_\ell(p,t)\leq 0,\quad \ell=\overline{1,m}$ гарантирует соблюдение соотношений (21), что эквивалентно обеспечению условий (19). Обозначим через $F_{\ell\nu}(p),\ \nu=\overline{1,n}$ главные миноры матриц $F_\ell(p),\ \ell=\overline{1,m}.$ Тогда, согласно критерию Сильвестра [4], для удовлетворения условий (21) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$F_{\ell\nu}(p)\le 0,\quad \nu=\overline{1,n},\quad \ell=\overline{1,m}.$ Следовательно, подмножество $P_2=\left\{p\in R^r : F_{\ell\nu}(p)\le 0,\quad \ell=\overline{1,m},\quad \nu=\overline{1,n}\right\}$. Поиск искомого вектора параметра регулятора $p\in P$ можно осуществить на основе известных методов [6-8]. Таким образом, алгоритм синтеза линейной стационарной обратной связи для нестационарной системы состоит из следующих этапов:

Таким образом, алгоритм синтеза линейной стационарной обратной связи для нестационарной системы состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Задание модели объекта в виде векторного уравнения (1).

Шаг 2. Задание структуры закона управления объектом в виде (4). Составление вектора-параметра $\mathrm{p}=[\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2,\dots,\mathrm{p}_r]$.

Шаг 3. Определение функций $б_i(t), i=\overline{1,N}$ задающих границы допустимого множества $\mathrm{E}(t)$ для вектора ошибки управления $\mathrm{e}(t)$ на основе требований к качеству управления.

Шаг 4. Формирование системы неравенств (17), (21) определяющих описание допустимой области P в пространстве параметров искомого регулятора.

Шаг 5. Анализ соотношений (17) с целью нахождения вектор-параметра $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$. Могут быть случаи: 1) в результате проведенного анализа находится такой вектор $\mathrm{p}\in\mathrm{P}$; 2) простой анализ не позволяет найти какое-либо решения системы неравенств (17). В первом случае находится решение задачи параметрического синтеза САУ с линейной обратной связью. Во втором случае необходимо использовать известные алгоритмы решения неравенств [7,8].

Список литературы

1. Оморов Т.Т., Джолдошев Б.О. К оцениванию параметров в линейных многомерных системах с интервальной неопределенностью // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики» АН РУз. – Ташкент, № 3, 2010. – С. 29-34.
2. Джолдошев Б.О., Оморов Т.Т., Джунушалиев У.Б. Динамическое проектирование управляющего устройства для нестационарной робастной системы // Межд. научно-практический семинар «Наука и технологии индустриально-инновац. развития Казахстана», 24 - 26 июня 2010 г., Астана. – С. 112 – 119.
3. Оморов Т.Т., Джолдошев Б.О. Синтез робастного регулятора для линейных систем управления // Матер. III межд. конф. «Асимптотические, топологические и компьютерные методы в математике» (9-11 сентября 2010г.).
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц / – М.: Наука, 1976. -352с.
5. Поляк Б.Ф., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление / – М.: Наука, 2002. –303 с.
6. Пшеничный Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах / – М.: Наука, 1975. –319 с.
7. Табак Д. Оптимальное управление и математическое программирование / – М.: Наука, 1975. – 280 с.
8. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / – М.: Мир, 1975. –534 с.