

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
МЕТОДОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ДЕФОРМАЦИИ**

Хасанов Н.М. – к.т.н., доцент, заведующий кафедрой «Подземные сооружения, основания и фундаменты» Таджикского технического университета им. М.С.Осими.
khasanov.nurali@mail.ru.

Якубов А.О. – ассистент кафедры «Промышленные гражданское строительство» Таджикского технического университета им. М.С.Осими

Саидов Р.Р. Таджикский технический университет, им. акад. М.С.Осими

Аннотация

В статье изложены алгоритм и результаты численного решения задачи балки-стенки методом сосредоточенных деформаций. Полученные матрицы коэффициентов и внутренней жесткости квадратного элемента позволили сформировать матрицу внешней жесткости исследуемой системы. Алгоритм реализован на примере тестовой задачи, и результаты численного решения сопоставлены с известным решением.

Ключевые слова: балка-стенка, матрица внутренней жесткости, метод сосредоточенных деформаций, матрица внешней жесткости.

NUMERICAL SOLUTION OF THE PLANE PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY BY METHOD OF CONFLICATED DEFORMATION

Hasanov N.M. - candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of the Department of "Underground structures, bases and foundations" of Tajik Technical University named after M.S.Osimi. Khasanov.nurali@mail.ru

Yakubov A.O. - assistant to the department "Underground structures, foundations and Foundations" of the Tajik Technical University. M.S. Osimi.

Saidov R. R. Tajik technical University. Acad. M. S. Osimi

Abstract

The algorithm and results of the numerical solution of the beam-wall problem by the method of concentrated deformations are presented. The obtained matrices of coefficients and internal rigidity of the square element made it possible to form a matrix of external rigidity of the system under study. The algorithm is implemented on the example of the test problem, and the results of the numerical solution are compared with the known solution.

Key words: beam-wall, matrix of internal rigidity, method of concentrated deformations, matrix of external rigidity.

Оценка точности и эффективности метода сосредоточенных деформаций (МСД) применительно к задачам статики плоского напряжённого состояния дана в работах [1,3], где исследованы распределения напряжений на контурах и в теле квадратной балки-стенки с защемленными боковыми гранями от действия распределенной по верхней грани нагрузки. На основе численных экспериментов исследованы вопросы сходимости и точности МСД при различных разбиениях внутренней области балки-стенки. Результаты, полученные при разбиении балки-стенки на сетке 24x24 сопоставляются с известными результатами численного решения по методом конечных разностей (МКР) [1].

В данной работе рассматривается развитие метода сосредоточенных деформаций для решения статических задач плоско-напряжённых систем. Плоская несущая конструкция, расположенная в правой прямоугольной системе координат ОХУ, разбивается плоскостями сосредоточенных деформаций на прямоугольные элементы: по горизонтали на m , а по вертикали на n элементов. Деформации растяжения-сжатия, сдвига и поворота сосредотачиваются на линиях деления, а также на контурных линиях (рис. 1а). В общем, можно предполагать, что система состоит из разнотипных элементов с различными модулями упругости, площадями поперечных сечений на гранях элементов и моментами инерции сечений граней относительно оси Z.

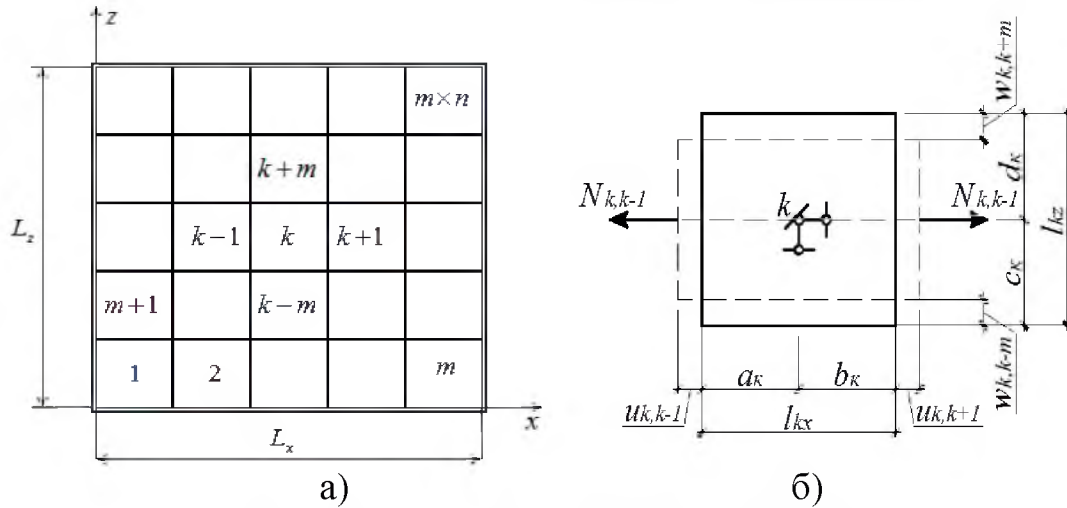


Рис. 1. Схема разбивки плоской системы (а) и деформирование элемента k от действия нормальных сил (б).

Для плоского напряженного состояния закон Гука в случае изотропного материала записывается в виде

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_z), \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_x), \quad (1)$$

$$\tau = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xz}. \quad (2)$$

Из рассмотрения равновесия k -го конечного элемента от действия нормальных сил, направленных по оси X (рис.1,б), выразив относительные деформации через абсолютные перемещения граней конечного элемента, соотношения (1) можно представить так:

$$N_{k,k-1} = \frac{E_k F_{k,k-1}}{1-\mu_k^2} \left[\frac{u_{k,k-1}}{a_k} + \frac{\mu_k (w_{k,k-m} + w_{k,k+m})}{l_{kz}} \right],$$

$$N_{k,k+1} = \frac{E_k F_{k,k+1}}{1-\mu_k^2} \left[\frac{u_{k,k+1}}{b_k} + \frac{\mu_k (w_{k,k-m} + w_{k,k+m})}{l_{kz}} \right], \quad (3)$$

Уравнения (3) возможны при условии, что неуравновешенные силы по противоположенным граням воспринимаются связями метода перемещений. Аналогичные уравнения можно записать при деформировании элемента нормальными силами по оси Z

$$N_{k,k-m} = \frac{E_k F_{k,k-m}}{1-\mu_k^2} \left[\frac{w_{k,k-m}}{c_k} + \frac{\mu_k (u_{k,k-1} + u_{k,k+1})}{l_{kx}} \right],$$

$$N_{k,k+m} = \frac{E_k F_{k,k+m}}{1-\mu_k^2} \left[\frac{w_{k,k+m}}{d_k} + \frac{\mu_k (u_{k,k-1} + u_{k,k+1})}{l_{kx}} \right]. \quad (4)$$

где $l_{kx} = a_k + b_k$ - длина элемента по оси X .

Уравнения (3) и (4) можно представить в векторно-матричной форме

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{C}_{k,N} \mathbf{U}_{k,N}, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{k,N} = (u_{k,k-1} \ w_{k,k-m} \ w_{k,k+m} \ u_{k,k+1})$$

$$\mathbf{N}_k = (N_{k,k-1} \ N_{k,k-m} \ N_{k,k+m} \ N_{k,k+1})$$

$$C_{k,N} = \frac{E_k}{1-\mu_k^2} \begin{bmatrix} \frac{F_{k,k-1}}{a_k} & \frac{\mu_k F_{k,k-1}}{l_{ky}} & \frac{\mu_k F_{k,k-1}}{l_{ky}} & 0 \\ \frac{\mu_k F_{k,k-m}}{l_{kx}} & \frac{F_{k,k-m}}{c_k} & 0 & \frac{\mu_k F_{k,k-m}}{l_{kx}} \\ \frac{\mu_k F_{k,k+m}}{l_{kx}} & 0 & \frac{F_{k,k+m}}{d_k} & \frac{\mu_k F_{k,k+m}}{l_{kx}} \\ 0 & \frac{\mu_k F_{k,k+1}}{l_{kx}} & \frac{\mu_k F_{k,k+1}}{l_{kx}} & \frac{F_{k,k+1}}{b_k} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Рассмотрев деформацию изгиба (рис.2а) с учетом гипотезы плоских сечений, можно написать.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \varepsilon_y$$

$$M_y = \int_F \sigma_x dF \cdot z = \frac{E}{1-\mu^2} \int_F \varepsilon_x dF \cdot z = \frac{E}{\rho(1-\mu^2)} \int_F z^2 dF = \frac{EI_y}{1-\mu^2} \cdot \frac{\varphi}{a}, \quad (7)$$

где $\rho = a/\varphi$ - радиус кривизны нейтрального слоя, I_y - момент инерции. Исходя из (7) составим выражения закона Гука при изгибе.

$$M_{k,k-1} = \frac{E_k I_{k,k-1}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{\varphi_{k,k-1}}{a_k} \quad M_{k,k+1} = \frac{E_k I_{k,k+1}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{\varphi_{k,k+1}}{b_k} \quad (8)$$

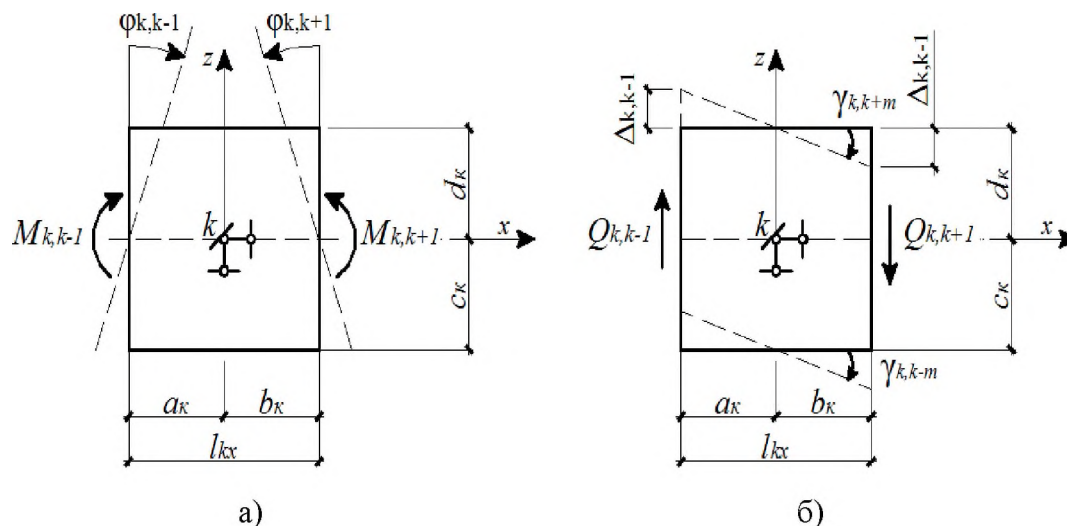


Рис.2. Деформации конечного элемента: изгиба (а) и сдвига (б).

Аналогичные (8) выражения от изгибающих моментов, действующих на двух других гранях, записываются в виде

$$M_{k,k-m} = \frac{E_k I_{k,k-m}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{\varphi_{k,k-m}}{c_k}, \quad M_{k,k+m} = \frac{E_k I_{k,k+m}}{1-\mu_k^2} \cdot \frac{\varphi_{k,k+m}}{d_k}. \quad (9)$$

Из рассмотрения деформации сдвига (рис. 2б) в соответствии с законом Гука (1) и с учетом $\gamma_{k,k-1} = \Delta_{k,k-1} / a_k$, $\gamma_{k,k+1} = \Delta_{k,k+1} / b_k$, получим

$$Q_{k,k-1} = \frac{E_k F_{k,k-1}}{2(1+\mu_k)} \cdot \frac{\Delta_{k,k-1}}{a_k}, \quad Q_{k,k+1} = \frac{E_k F_{k,k+1}}{2(1+\mu_k)} \cdot \frac{\Delta_{k,k+1}}{b_k}, \quad (10)$$

здесь $F_{k,k-1} = F_{k-1} / \mu_{k-1}$, $F_{k,k+1} = F_{k+1} / \mu_{k+1}$, F_{k-1}, F_{k+1} – площади поперечных сечений левой и правой грани k -го элемента, μ_{k-1}, μ_{k+1} – коэффициенты формы поперечных сечений граней. При действии сдвигающих усилий на противоположенных гранях, параллельных оси X по аналогии с (10) будем иметь

$$Q_{k,k-m} = \frac{E_k F_{k,k-m}}{2(1+\mu_k)} \cdot \frac{\Delta_{k,k-m}}{c_k}, \quad Q_{k,k+m} = \frac{E_k F_{k,k+m}}{2(1+\mu_k)} \cdot \frac{\Delta_{k,k+m}}{d_k}. \quad (11)$$

Представленные зависимости позволяют сформировать матрицу внутренней жесткости конечного элемента метода сосредоточенных деформаций.

Аналогичным образом можно получить матрицы внутренней жесткости k -го элемента, соответствующие деформациям изгиба и сдвига. Уравнения (8) и (9) представляются в матричной форме.

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{C}_{k,M} \mathbf{U}_{k,M}, \quad (12)$$

где матрица жесткости является диагональной

$$\mathbf{C}_{k,M} = \text{diag} \left(\frac{I_{k,k-1}}{a_k}, \frac{I_{k,k-m}}{c_k}, \frac{I_{k,k+m}}{d_k}, \frac{I_{k,k+1}}{b_k} \right) \cdot \frac{E_k}{1-\mu_k^2},$$

$$\mathbf{M}_k = (M_{k,k-1} \ M_{k,k-m} \ M_{k,k+m} \ M_{k,k+1}), \quad \mathbf{U}_{k,M} = (\varphi_{k,k-1} \ \varphi_{k,k-m} \ \varphi_{k,k+m} \ \varphi_{k,k+1}).$$

Из уравнения (10) и (11) следует, что вектор сдвигающих усилий может быть представлен в виде.

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{C}_{k,Q} \mathbf{U}_{k,Q}, \quad (13)$$

здесь матрица жесткости также диагональная

$$\mathbf{C}_{k,Q} = \text{diag} \left(\frac{F_{k,k-1}}{a_k}, \frac{F_{k,k-m}}{c_k}, \frac{F_{k,k+m}}{d_k}, \frac{F_{k,k+1}}{b_k} \right) \cdot \frac{E_k}{2(1+\mu_k)},$$

$$\mathbf{Q}_k = (Q_{k,k-1} \ Q_{k,k-m} \ Q_{k,k+m} \ Q_{k,k+1})^T, \quad \mathbf{U}_{k,Q} = (\Delta_{k,k-1} \ \Delta_{k,k-m} \ \Delta_{k,k+m} \ \Delta_{k,k+1})^T.$$

Таким образом, уравнения (5), (12) и (13) характеризуют зависимости внутренних усилий на гранях конечного элемента от соответствующих перемещений.

Матрицу внутренней жесткости для k -го элемента с учетом совместного действия всех сил, получаем исходя из учета его взаимодействия с другими элементами, при равенстве внутренних усилий на плоскостях сосредоточенных деформаций. Рассмотрев поведения в k -м и $k-1$ -м элементах по плоскости сосредоточенных деформаций между ними, из (3) и аналогичного равенства для $N_{k-1,k}$, при $w_{k,k-m} = 0$, $w_{k,k+m} = 0$, $w_{k-1,k-m-1} = 0$, $w_{k-1,k+m-1} = 0$, находим

$$u_{k,k-1} = \left[\frac{E_k F_{k,k-1}}{(1-\mu_k^2) a_k} \right]^{-1} \times N_{k,k-1}, \quad u_{k-1,k} = \left[\frac{E_{k-1} F_{k-1,k}}{(1-\mu_{k-1}^2) b_{k-1}} \right]^{-1} \times N_{k-1,k}.$$

Суммируя эти перемещения и учитывая, что и $N_{k-1,k} = N_{k,k-1}$, получим

$$u_{k-1,k} + u_{k,k-1} = \left\{ \left[\frac{E_{k-1} F_{k-1,k}}{(1-\mu_{k-1}^2) b_{k-1}} \right]^{-1} + \left[\frac{E_k F_{k,k-1}}{(1-\mu_k^2) a_k} \right]^{-1} \right\} \times N_{k,k-1}. \quad (14)$$

Выражение (14) по существу означает абсолютную деформацию между k -м и $k-1$ -м элементами вдоль оси X

$$\Delta u_{k,k-1} = u_k - u_{k-1} = u_{k-1,k} + u_{k,k-1} = (c_{k,k-1})^{-1} \times N_{k,k-1},$$

$$c_{k,k-1}^N = \left[\left(\frac{E_{k-1}F_{k-1,k}}{(1-\mu_{k-1}^2)b_{k-1}} \right)^{-1} + \left(\frac{E_k F_{k,k-1}}{(1-\mu_k^2)a_k} \right)^{-1} \right]^{-1}. \quad (15)$$

Формула (15) определяет величину продольной силы по плоскости сосредоточенных деформаций между k -м и $k-1$ -м элементами при единичном взаимном их перемещении.

Аналогичным образом можно записать коэффициенты жесткости от деформации изгиба и сдвига.

$$c_{k,k-1}^M = \left[\left(\frac{E_{k-1}I_{k-1,k}}{(1-\mu_{k-1}^2)b_{k-1}} \right)^{-1} + \left(\frac{E_k I_{k,k-1}}{(1-\mu_k^2)a_k} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (16)$$

$$c_{k,k-1}^Q = \left[\left(\frac{E_{k-1}F_{k-1,k}}{2(1+\mu_{k-1})b_{k-1}} \right)^{-1} + \left(\frac{E_k F_{k,k-1}}{2(1+\mu_k)a_k} \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (17)$$

В частности, при равных значениях модулей упругости, площадей сечений и коэффициента Пуассона, из (15), (16) и (17) получим

$$c_{k,k-1}^N = \frac{EF_{k,k-1}}{(1-\mu^2)I_{k,k-1}}, \quad c_{k,k-1}^M = \frac{EI_{k,k-1}}{(1-\mu^2)I_{k,k-1}}, \quad c_{k,k-1}^Q = \frac{EF_{k,k-1}}{2(1+\mu)I_{k,k-1}},$$

где $l_{k,k-1} = b_{k-1} + a_k$ - расстояние между узлами $k-1$ -го и k -го элементов.

Последовательно рассмотрев остальные три грани k -го элемента получим аналогичные коэффициенты жесткости. Тогда вектор внутренних усилий k -го элемента приобретает вид

$$S_k = C_k \lambda_k. \quad (18)$$

Здесь вектор-столбец усилий состоит из четырех векторов-столбцов, соответствующие четырем граням k -го элемента

$$S_k = (N_{k,k-1} \ M_{k,k-1} \ Q_{k,k-1} \ N_{k,k-m} \ M_{k,k-m} \ Q_{k,k-m} \ \dots \ N_{k,k+1} \ M_{k,k+1} \ Q_{k,k+1})$$

$$\lambda_k = (\Delta u_{k,k-1} \ \Delta \varphi_{k,k-1} \ \Delta w_{k,k-1} \ \Delta u_{k,k-m} \ \Delta \varphi_{k,k-m} \ \Delta w_{k,k-m} \ \dots \ \Delta u_{k,k+1} \ \Delta \varphi_{k,k+1} \ \Delta w_{k,k+1})$$

$$\Delta u_{k,k-1} = u_k - u_{k-1}, \quad \Delta \varphi_{k,k-1} = \varphi_k - \varphi_{k-1},$$

$$\Delta w_{k,k-1} = w_k - w_{k-1} + \varphi_k a_k + \varphi_{k-1} b_{k-1}$$

Таким образом, матрица внутренней жесткости в (18) представляет собой квадратную матрицу двенадцатого порядка.

Исследуется сходимость и точность решения МСД статической задачи на примере консольной балки-стенки с отношением сторон 1:1 жестко закрепленная по подошве от действия боковой равномерно распределенной нагрузкой q (рис.3). Это задача исследуется для плоского напряженного состояния при следующих данных: $b/a = 1.5$, $q = 1m/m$, $E = 2 \cdot 10^6 m/m^2$, $\mu = 1, 2$.

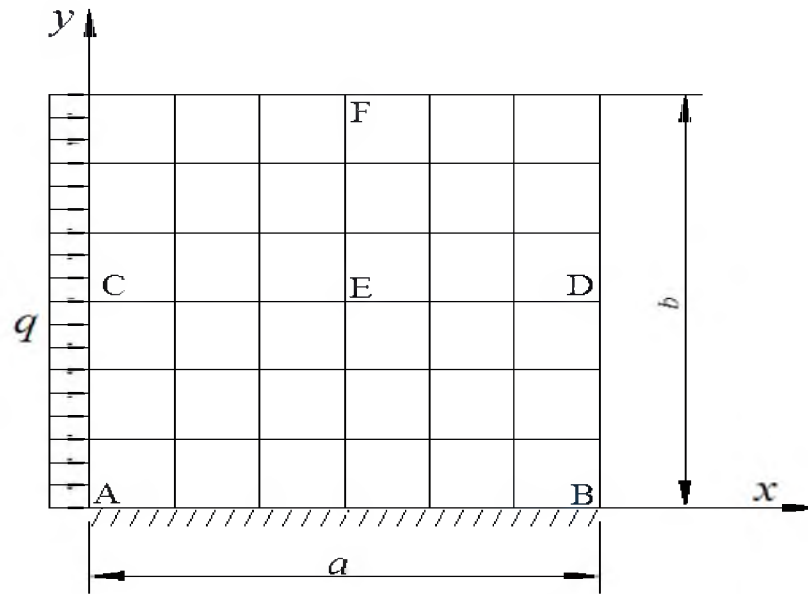


Рис.3. Консольная балка-стенка с разбивкой 6x6.

Полученные результаты МСД при различных разбиениях сравниваются с аналитическими решениями [2].

Таблица. Сравнение результатов расчёта консольной балки-стенки с жестко закрепленной подошвой с отношениями сторон 1 : 1.

Метод МСД	σ_{xA}	σ_{yA}	σ_{yB}	σ_{yC}	σ_{yD}	σ_{xE}	σ_{yE}	σ_{xF}
6x6	1,00	4,010	-3,590	0,640	-0,705	-0,472	-0,054	-0,511
8x8	1,00	4,620	-4,050	0,532	-0,606	-0,483	-0,016	-0,513
10x10	1,00	5,100	-4,390	0,468	-0,544	-0,489	-0,015	-0,513
12x12	1,00	5,510	-4,660	0,431	-0,507	-0,496	0,009	-0,514
[2]	1,00	4,115	-3,327	0,511	-0,652	-0,463	-0,028	-0,537

В таблице результаты распределения нормальных напряжений консольной балки-стенки, полученные по МСД при различных разбиениях, сравниваются с данными [2] на сетке с разбиением 6x6. Сравнение по нормальным напряжениям σ_x , возникающих в точке E, F и нормальным напряжениям σ_y в точке A, B, C, D показало, что расхождение с данными [2] составляет: в точке A – 2,55%; - в точке B – 7,3%; - в точке C – 6,5%, - в точке D – 7,5%, - в точке E – 1,9%, - в точке F – 4,8%.

Из анализа полученных результатов следует, что алгоритм МСД при более густой разбивке показывает достаточно хорошую сходимость и точность в решении консольной балки-стенки.

Список литературы

1. Низомов Д.Н, Каландарбеков И. Метод сосредоточенных деформаций Душанбе, "Дониш", 2015, стр. 436.
2. Саидов Р.Р. Расчет балки-стенки метод сосредоточенных деформаций с учетом особенности угловых точек./ Вестник ТТУ Душанбе, 2015, №4(32), ISSN 2075-177X, с. 127-130.
3. Улицкий И.И., Ривкин С.А., Самолетов М.В., Дыховичный А.А., Френкель М.М., Кретов В.И. Железобетонные конструкции. Киев "Будівельник", 1972, стр. 992