УДК.: 621.791.92

ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВРАЩЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ MATLAB

Султаналиева Рая Мамакеевна, *д.ф.-м.н., профессор. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика,*
Орозбаев Акжол Акбарович, *ст. преподаватель. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика, akjol1986_86@mail.ru*
Искендер Козубай, *ст. преподаватель. Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Бишкек, Кыргызская Республика,*

Исследования закономерностей деформирования конструкционных материалов (металлов и их сплавов) при сложном нагружении имеют принципиальное значение как с точки зрения фундаментальных основ теории упругости, так и в плане практических приложений, связанных с прочностными расчётами конструкций и аппаратов новой техники, подверженных воздействию нагрузок. Эти задачи изучены ещё недостаточно. Численное

$$\int\limits_{l} \omega_{ij}(y)\, dy_j = \omega_{ij}(x^0)\,(x_j - x_j^{\,0}) + \int\limits_{l} (x_j - y_j)\,\omega_{ij,k}(y)\, dy_k\,.$$

Подставим это в предыдущее выражение и, учитывая (3), напишем полученное в виде

$$u_i(x)=u_i(x^0)+\omega_{ij}(x^0)(x_j-x_j^0)+\int\limits_{\lambda}(\varepsilon_{ik}(y)+(x_j-y_j)(\varepsilon_{k,ij}(y)-\varepsilon_{k,ji}(y)))dy_k \qquad (4)$$

где $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$ – постоянные интегрирования. Им можно придать произвольные, в том числе и равные нулю, значения.

В некоторых случаях более удобно пользоваться не этой формулой, а ее преобразованным видом [1]. Для преобразования (4) к виду, в котором оно будет содержать компоненты напряжения, воспользуемся следующим представлением обобщенного закона Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\,(-\nu\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + (1+\nu)\,\sigma_{ij}). \qquad (5)$$

Отсюда легко определить

$$\varepsilon_{k,ij} - \varepsilon_{k,ji} = -\frac{1}{E}(\,\nu\,(\delta_{ki}\,\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\,\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)\,(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})).$$

Подставляя это в выражение (4), имеем

$$u_i(x)= u_i(x^0) + \omega_{ij}(x^0)\,(x_j - x_j^{\,0}) + \frac{1}{E}\int\limits_{l} (-\nu\delta_{ik}\,\sigma_{tt} + (1+\nu)\sigma_{ik} + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\,\sigma_{tt,j} - \delta_{kj}\,\sigma_{tt,i}) + (1+\nu)(\sigma_{ki,j} - \sigma_{kj,i})))dy_k\,. \qquad (6)$$

В этом выражении $u_i(x^0)$, $\omega_{ij}(x^0)$, также как и (4), произвольные постоянные.

Найдем во внутренних точках прямоугольной плиты напряжения, деформации и создавшие их перемещения. Как видим, в трудах постановки статической краевой задачи [1] приводится решение

$$\sigma_{ij} = \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,c x_3\,.\ x_i \in V \qquad (7)$$

Функции перемещений можно определить, внося (7) в (6)

$$u_i = \frac{1}{E}\int\limits_{\ell} c(-\nu\delta_{ik}x_3 + (1+\nu)\delta_{i2}\delta_{k2}x_3 + (x_j - y_j)(-\nu(\delta_{ki}\delta_{3j} - \delta_{kj}\delta_{3i}) + (1+\nu)\delta_{k2}(\delta_{i2}\delta_{3j} - \delta_{j2}\delta_{3i})))dy_k,\ x_i \in V$$

Интегрируя это выражение, находим

$u_i(x)=-c\,(\delta_{i1}\nu\, x_3\,(x_1-x_1^0)-\delta_{i2}x_3\,(x_2-x_2^0)+\delta_{i3}\,(x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)$
$-x_2^0\,(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0\,(2x_1-x_1^0)))\,/\,2)/\,E\,,\ x_i \in V \qquad (8)$

где x_i^0 - любая фиксированная точка области V. Приведем развернутый вид функций(8):

$u_1(x)= -c\ \nu\, x_3(x_1-x_1^0)\,/E,\ x_i \in V$

$u_2(x)= c\, x_3\,(x_2-x_2^0)\,/E,\ x_i \in V$

$u_3(x)= -c\,((x_2^2+\nu\,(x_3^2-x_1^2)\,-x_2^0(2x_2-x_2^0)-\nu\,((x_3^0)^2-x_1^0(2x_1-x_1^0)))\,/\,(2E),\ x_i \in V$

Функции (8) удовлетворяют уравнениям равновесия в форме Навье.

Наконец, из поля перемещений (8) определим компоненты деформации и вращения

$\varepsilon_{ij} = c\, x_3\,(-\nu\,(\,\delta_{i1}\,\delta_{j1} + \delta_{i3}\,\delta_{j3}\,) + \delta_{i2}\,\delta_{j2}\,)\,/\,E.\ x_i \in V \quad (9)$

$\omega_{ij} =-c\,(\,\nu\,(x_1-x_1^0)\,(\delta_{1i}\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{1j}\,)\,-(x_2-x_2^0)(\delta_{2i}\,\delta_{3j}-\delta_{3i}\,\delta_{2j}))\,/\,E\,,\ x_i \in V \quad (10)$

По полученным здесь выражениям в любой точке находящегося в равновесии в области V тела можно определить компоненты напряжения, деформации и вращения. Особо отметим то, что во всех выражениях (7) – (10) координаты только области V.

Расчеты напряженно- деформированного состояния конструкций.

В декартовой системе координат, оси которой обозначим через x_1, x_2, x_3, деформированное тело занимает область V: $2 \le x_1 \ge 4$, $\pi/6 \le x_2 \ge \pi/3$, $2\pi/3 \le x_3 \ge 5\pi/6$

Используя формулы Чезаро [1], находим это поле в виде

$$u_1(x_1,x_2,x_3)= u_1(x_1^o, x_2^o, x_3^o)+\omega_{12}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_2-x_2^o)+$$
$$+\omega_{13}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_3-x_3^o)+c\, x_1 \sin x_2 \cos x_3$$
$$u_2(x_1,x_2,x_3)= u_2(x_1^o, x_2^o, x_3^o)+\omega_{21}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_1-x_1^o)+$$
$$+\omega_{23}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_3-x_3^o)+c\, x_1 \sin x_2 \sin x_3 \qquad (11)$$
$$u_3(x_1,x_2,x_3)= u_3(x_1^o, x_2^o, x_3^o)+\omega_{31}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_1-x_1^o)+$$
$$+\omega_{32}(x_1^o, x_2^o, x_3^o)(x_2-x_2^o)+c\, x_1 \cos x_2,$$

где x_1^o, x_2^o, x_3^o координаты начальной точки линии интегрирования. В качестве x_1^o, x_2^o, x_3^o можно использовать координаты любой точки области V,

$u_1(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, $u_2(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, $u_3(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$

постоянные интегрирования, соответствующие параллельному переносу тела.

На основе предложенной математической модели рассмотрим кручение стальной пластины(E=110ГПа). На рисунке 1 область V показана слева. Справа показаны преобразования области V, соответствующей c = 0.28ГПа.

Реализуем решение для максимально перемещенной точки. Это точка с координатой

x1=1.5120e+001 x2=1.5708e+000 x3=3.1416e+000

тензор деформации:

$$\varepsilon_{i,j}=\begin{pmatrix} -2.1875e-001 & -8.5781e+000 & -8.5781e+000 \\ -8.5781e+000 & 0 & -1.1113e+000 \\ -8.5781e+000 & -1.1113e+000 & 0 \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений для этой точки:

$$\sigma_{i,j}=\begin{pmatrix} -2.8000e-001 & -1.7145e-017 & -6.0008e-017 \\ -1.7145e-017 & 8.3987e-033 & -1.1200e+000 \\ -6.0008e-017 & -1.1200e+000 & 0 \end{pmatrix}$$

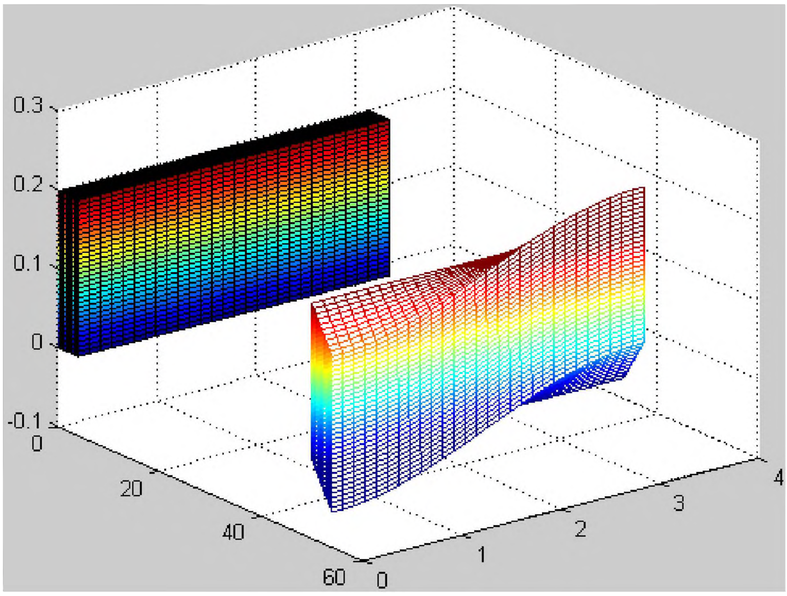

Рис .1. Кручение при c=0.28ГПа. Слева начальное состояние

Тензор вращение:

$$\omega_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 8.5781e+000 & 8.5781e+000 \\ -8.5781e+000 & 0 & 4.0750e-003 \\ -8.5781e+000 & -4.0750e-003 & 0 \end{pmatrix}$$

Нормальные напряжения:

σ_x = -2.8000e-001

σ_y = 8.3987e-033

σ_z = 0

Касательные напряжения:

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$,

τ_{xy}= -1.7145e-017, τ_{xz} = -6.0008e-017, τ_{yz} = -1.1200e+000

Перемещение:

u_x = -1.1120e+001, u_y = 1.3716e-016, u_z = 6.8580e-017

Расчеты напряженно- деформированного состояния стальной пластины показаны в таблице 1.

Таблица 1. Параметры для стали.

σ_x	0	4.7619e-003	9.5238e-003	1.4286e-002	1.9048e-002	2.3810e-002	2.8571e-002	3.3333e-002
ε_x	0	4.7393e-003	9.4340e-003	1.4085e-002	1.8692e-002	2.3256e-002	2.7778e-002	3.2258e-002
c	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07

Сравнения полученных результатов с другими упругими материалами показана на рисунке 2.

График напряженно- деформированного состояния для разных материалов $\sigma_x = f(\varepsilon_x)$

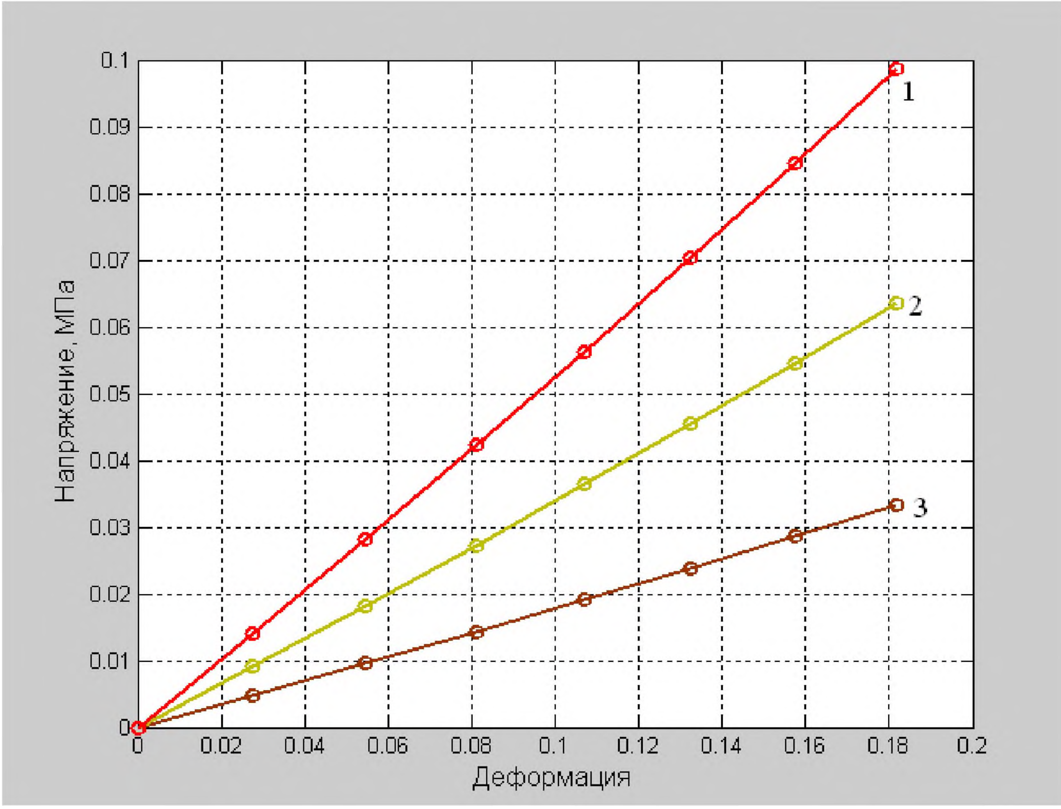

Рис.2. (1-Алюминий, 2- Медь, 3-Сталь)

Вывод: Таким образом, использование пакета Matlab позволяет реализовать численные значения напряженно- деформированного состояния стальных и других металлических конструкций при кручении.

Список литературы

1. Дуйшеналиев Т.Б. О постановке и решении статической краевой задачи// Бишкек 2001. С. 40-50.

2. Дьяконов В.П. MATLAB 6. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. С. 158-165.

3. Курбатова Е. А. MATLAB 7. Самоучитель. — М.: «Диалектика», 2005. — 256

4. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5/7.0 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. Библиотека профессионала. — М.: «СОЛОН-Пресс», 2005. — 576 с.

5. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. MATLAB 7. Самоучитель. — Пресс, 2005. — 464 с.