УДК 3713.510

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Койчуманова Жылдыз Мааметовна, *профессор КГТУ, кандидат педагогических наук, филиал им. академика Х.А. Рахматулина КГТУ им. И. Раззакова, Кыргызстан, г. Токмок*

Аннотация. В статье рассмотрены задачи с применением векторной алгебры. Повторяются формулы по нахождению длин векторов, произведение векторов, координаты вектора в пространстве. Применяются формулы, теоремы из курса элементарной геометрии. Учим студентов делать чертежи для облегчения понимания и решения задачи.

Ключевые слова: вектор, длина вектора, скалярное произведение векторов, координаты вектора в пространстве, объем параллелепипеда.

APPLICATION OF VECTOR IN SOLVING PROBLEMS

Koychumanova Zhyldyz Maametovna, *professor KSTU, candidate of pedagogical sciences, KSTU named after I. Razzakov, branch named after academician H.A.Rahmatulin in city Tokmok, Kyrgyzstan, c.Tokmok.*

Annotation. The article discusses the problem with the use of vector algebra. Repeated the formula for finding the length of the vector product of vectors, vector coordinates in space. Formulas, theorems from a course of elementary geometry are applied. We teach students to do drawings for simplification of understanding and the solution of a task.

Keywords: vector, the vector length, the inner product of vectors of the vector in the space, the volume of a parallelepiped.

Во всех технических вузах студенты первого курса изучают высшую математику. Элементы аналитической геометрии, векторной алгебры, производные, интегралы от элементарных функций они проходят в школе. Считая, что студенты знают азы, преподаватели хотят дать более сложные задачи. Но часто, приходится повторять элементарное.

Затруднение вызывают векторы, расположенные в пространстве. Студенты не знают как применить формулы, если три координаты.

Рассмотрим задачи.

Задача №1. [1]. Вектор $\bar{a}(x;\,-1;2)$ перпендикулярен вектору $\bar{b}(1;2;0)$. Найти модуль вектора $\bar{a}$.

Решение.

Чтобы найти $|\bar{a}|$ мы должны знать значение x. Векторы перпендикулярны, то *cos90°=0,* значить скалярное произведение равно нулю. Наши векторы заданы координатами $\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ и $\bar{b}\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$, то

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$1\cdot x - 1\cdot 2 + 2\cdot 0 = 0,$$

$x - 2 = 0,\quad x = 2.$ Теперь зная значение x можем найти

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\bar{a}| = 3.$$

Во время решения повторяем и формулу $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|cos\varphi$, где φ - угол между векторами.

Ответ: 3.

Задача №2. [1]. Длина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC* равна 4. Найти сумму $\overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{BC}\cdot\overline{BA} + \overline{CA}\cdot\overline{CB}$.

Решение. Можно сделать чертеж.

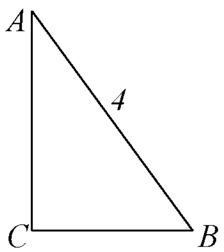

Рис.1.

Дано: ΔABC,
$\angle C = 90^o,\ \ |AB| = 4$

$\overline{AB}\cdot\overline{AC} + \overline{BC}\cdot\overline{BA} + \overline{CA}\cdot\overline{CB} - ?$

Пусть $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. ΔABC, $\angle C = 90^o$ т.е. $cosC = 0$. В прямоугольном треугольнике $\angle A + \angle B = 90^o, sin\hat{A} = cos\hat{B}$, тогда $sin\alpha = cos\beta$.

$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot sin\alpha = 4sin\alpha.$

$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot cos\alpha = 4cos\alpha$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot 4cos\alpha \cdot cos\alpha = 16cos^2\alpha$

$\overline{BC} \cdot \overline{BA} = 4sin\alpha \cdot 4 \cdot cos\beta = 16sin^2\alpha$

$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 4cos\alpha \cdot 4sin\alpha cos90^o = 0$

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BA} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 16cos^2\alpha + 16sin^2\alpha + 0 = 16(cos^2\alpha + sin^2\alpha) = 16.$

Повторяем тригонометрические функции острых углов в прямоугольном треугольнике.

Ответ: 16.

Задача №3. [1]. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 // BB_1 // CC_1 // DD_1$) служит квадрат $ABCD$, площадь которого равны 50. Точка O – центр квадрата $ABCD$, точки F и K- соответственно середины ребер CC_1 и A_1B_1. Вектор $\overline{OF}$ перпендикулярен вектору $\overline{DK}$. Найти объем параллелепипеда.

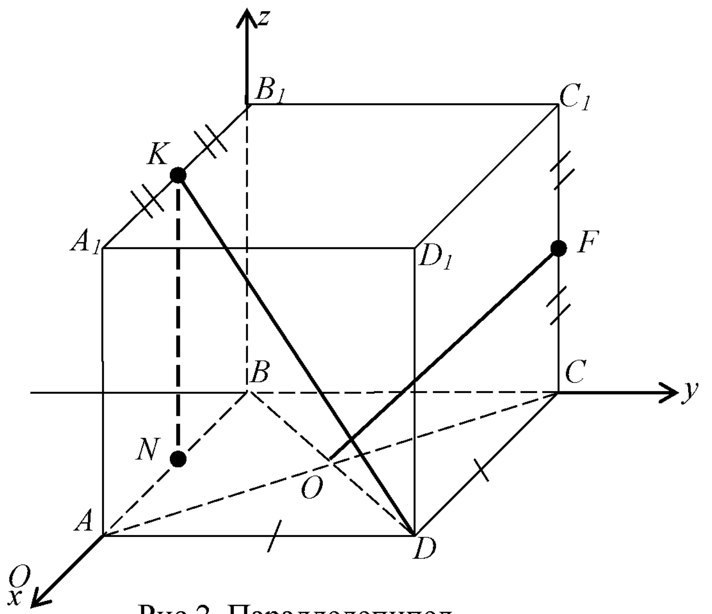

Рис.2. Параллелепипед

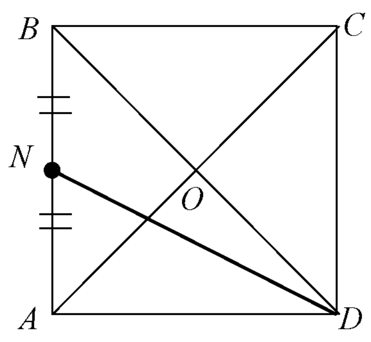

Рис.3. Квадрат

Запишем кратко данные задачи

Дано: $A - D_1$ - прямоугольный параллелепипед,
$ABCD$ - квадрат,
$S_{ABCD} = 50$
$0 = AC \cap BD$,
$|C_1F| = |FC|$, $|A_1K| = |KB_1|$
$\overline{OF} \perp \overline{DK}$

V-?

Решение. $ABCD$ чертим отдельно. Теперь видно, что это квадрат. Знаем, что S=*50*, $|AB|^2 = 50$, $|AB| = 5\sqrt{2}$ можно и через диагональ $\frac{|AC|^2}{2} = 50$, $\overline{AC} = 0$, $|OC| = 5$. Мы нашли сторону квадрата и длину диагонали. Чтобы найти объем, нам нужна высота или $|AA_1|$ параллелепипеда. По условию задачи мы имеем, что $\overline{OF} \perp \overline{DK}$, воспользуемся формулой скалярного произведения векторов и учтем, что $cos\varphi = 0$ т.к. $\varphi = 90^o$.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Пусть вершина B совпадает с началом координат ox, oy, oz. $ABCD \in (xoy)$, можем записать координаты точек:

$B(0;0;0)$, $A = (5\sqrt{2}; 0; 0)$, $C = (0; 5\sqrt{2}; 0)$, $D = (5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}; 0)$, $N = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}; 0; 0\right)$, $O = \left(\frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{5}{2}\sqrt{2}; 0\right)$. Точка O центр $ABCD$. Возьмем $|AA_1| = b$ и тогда координаты точек $K\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}; 0; b\right)$ и $F\left(0; 5\sqrt{2}; \frac{b}{2}\right)$. Следовательно, координаты векторов $\overline{OF}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{5}{2}\sqrt{2}; \frac{b}{2}\right)$, $\overline{DK}\left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}; -5\sqrt{2}; b\right)$, $\overline{OF} \cdot \overline{DK} = \frac{25}{2} - 25 + \frac{b^2}{2}$ согласно приведенной формуле. Правая часть выражения равно нулю.

$$\frac{b^2}{2} = \frac{25}{2}, \qquad b^2 = 25, \qquad b = 25.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = S_{OCH} \cdot H$.

$$V = 50 \cdot 5 = 250.$$

Ответ: 250 куб.ед.

Можно было и по формуле, через длины векторов $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos\varphi$.

Задача №4. [1]. В прямоугольном параллелепипеде *ABCD A₁B₁C₁D₁* диагонали AC и BD пересекаются в точке M и $\angle ABD = 60^o$. Определить скалярное произведение $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$, если $|B_1M| = 3$, и $\angle BMB_1 = 30^o$.

Анализируем условие задачи. Задача по стереометрии. Даем определение прямоугольного параллелепипеда. Определение вектора, скалярного произведения векторов. Все формулы пишем на доске с правой стороны от решения.

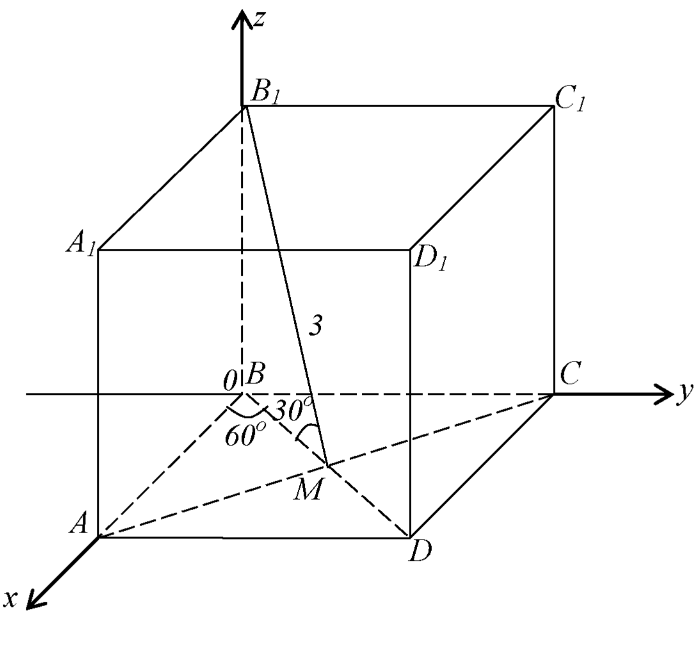

Рис.4. Параллелепипед

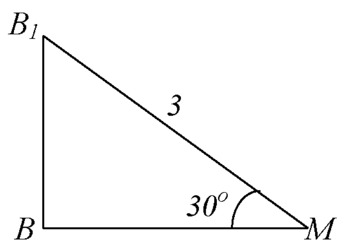

Рис.5. Треугольник

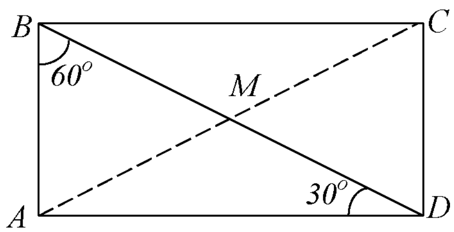

Рис.6. Прямоугольник

Дано: *A-D₁* – прямоугольный параллелепипед.

$$[AC] \cap [BD] = M, \qquad \angle ABD = 60^o$$
$$|B_1M| = 3, \qquad \angle BMB_1 = 30^o$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} - ?$$

Для решения начертим ещё треугольник $\Delta\, B_1BM$, где видно, что $\angle B_1BM = 90^o$ и прямоугольник *ABCD;* где *M* точка пересечения диагоналей $[AC]$и $[BD]$. Воспользуемся теоремой: в прямоугольном треугольнике, катет, лежащий против угла в 30^0, равен половине гипотенузы.

Решение:

из $\Delta\, B_1BM$: $\angle B_1BM = 90^o$, $\angle BMB_1 = 30^o$; $B_1M = 3 \Rightarrow |B_1B| = 1{,}5$ и $|BM| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

ΔABD: $|BM| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; $|BD| = 3\sqrt{3}$; $\angle BAD = 90^o$; $\angle ABD = 60^o \Rightarrow \angle ADB = 30^o$

$|AC| = 3\sqrt{3}$; $|AB| = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; $|AD| = \frac{9}{2}$;

Если: $B(0;0;0)$; то $C\left(0;\frac{9}{2};0\right)$; $A\left(\frac{3}{2}\sqrt{3};0;0\right)$; $D\left(\frac{3}{2}\sqrt{3};\frac{9}{2};0\right)$

В задаче просят найти скалярное произведение $\overline{AC}\ \ \overline{BD}$. Пусть вершина *B* совпадает с началом координат и имеет координаты $B(0;0;0)$. Мы уже вычислили длины сторон $[AB]$ и $[AD]$, то можем записать координаты для *A,D* и *C*. Чтобы найти координаты векторов $[AC]$ и $[AD]$ воспользуемся формулой: $\overline{AC}\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Можно устно произвести вычисления. Получим $\overline{AC}\left\{-\frac{3}{2}\sqrt{3};\ \frac{9}{2};0\right\}$; $\overline{AD}\left\{0;\ \frac{9}{2};0\right\}$. Скалярное произведение векторов в координатной форме $a \cdot b$=$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. По этой формуле имеем

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$
$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = 0 + \frac{81}{4} + 0 = \frac{81}{4} = 20{,}25$$

Ответ: 20,25.

Мы показали решения задач, которые нельзя найти в интернете.

Список литературы

1. Бронштейн И.Н., К.А. Семендяев. Справочник математике и учащихся втузов. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981.-718с.

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975.-870с.

3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М.: Физматлит, 2006.-335с.

4. Сканави М.И. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. - М.: Мир и образование, 2013.-608с.

5. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Издательство «НАУКА», 1977.-288с.