

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ БЕЛОГО СВЕТА

*Киселев Илья Викторович, Брайтмайер Месстехник, Германия, D-76275 Эттлинген, Энглерштрассе 24, e-mail: [kiselev@breitmeier.de](mailto:kiselev@breitmeier.de)*

*Киселев Егор Ильич, Технологический Институт Карлсруэ, Институт Физики, Германия, D-76131 Карлсруэ*

**Аннотация.** В этой статье мы выдвигаем метод корреляции коррелограмм как наиболее точный и устойчивый среди методов интерферометрии белого света. Характеристикой точности метода является дисперсия определяемого параметра под воздействием белого шума. Мы выводим аналитически выражения для дисперсий применяющихся в настоящее время и выдвигаемого методов. Сравнение дисперсий позволяет сравнить методы и указывает на превосходство метода корреляции коррелограмм.

**Ключевые слова.** Топография поверхности, некогерентная интерферометрия, устойчивость к шуму, волновой пакет, методы обработки сигнала.

## PRECISION ESTIMATION OF EVALUATION METHODS IN WHITE LIGHT INTERFEROMETRY.

*Kiselyov Ilya Viktorovich*, Breitmeier Messtechnik GmbH, Englerstr. 24, Ettlingen, D-76275, Germany

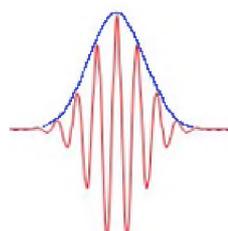
*Kiselyov Egor Ilyich*, Physikalisches Institut, Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe D-76131, Germany, Corresponding author: [kiselev@breitmeier.de](mailto:kiselev@breitmeier.de)

**Abstract.** In this paper we promote a method called correlogram correlation as the most accurate and stable for white light interferometry. Variance of the parameter being determined is the characteristics of method. We obtain analytical expressions for the variances of available methods. Comparison shows the superiority of correlogram correlation method.

**Keywords.** Surface topography, coherence scanning interferometry, noise stability, wave packet, signal processing methods.

### Введение

Измерение микро-топографии играет большую и все возрастающую роль в отраслях техники имеющих дело с поверхностями высокого качества, таких как машиностроение (измерения шероховатости поверхностей), электроника и медицина (рельеф). Ведущее положение среди технологий бесконтактного измерения микрорельефа играет интерферометрия белого света (ИБС). Имеющиеся методы обработки данных делятся на некогерентные (Coherence Scanning Interferometry, CSI), и фазовые (Phase Shifting Interferometry, PSI) [1]. Коррелограмма – волновой пакет являющийся сигналом ИБС – имеет протяженность порядка 1-5 мкм (см. рисунок, [1]). CSI исходит из факта, что положение отражающей поверхности соответствует максимуму интенсивности сигнала, поэтому ищется огибающая пакета и положению ее максимума приписывается положение отражающей поверхности. При этом фазовая информация попросту теряется. PSI, напротив, исследует фазу волны коррелограммы, теряя информацию о пакете. Ясно, что второй подход должен бы быть намного точнее первого: вместо положения пологой огибающей ищется положение острых перепадов интенсивности. Что и подтверждается практикой. Однако сдвиг фазы синусоиды  $\Delta\varphi$  при изменении высоты поверхности, определен с точностью до периода: появляется ошибки в виде  $2\pi$ -скачков. И первый и второй подходы теряют часть информации, содержащейся в коррелограмме. Мы предлагаем искать положение не огибающей и не выделенной синусоиды, но полного пакета – что логично и в схожих ситуациях широко используется в других областях. Естественно, такой подход отмечался и в ИБС (напр. [2], [3]), но не получил широкого применения, потому что авторы применяли его для разрешения специальных ситуаций, не осознавая, что метод математически доказуемо обязан быть наиболее точным. Целью данной работы является получение оценок шумовой погрешности определения положения поверхности для различных методов обработки сигнала ИБС и сравнение их.



### Расчет локальной высоты поверхности: вариации оценки имеющимися методами.

**1. Метод корреляции коррелограм (КК).** Метод вполне понятен интуитивно. Двигаясь в процессе сканирования вблизи точки равенства оптических путей лучей интерферометр выдает характерный сигнал – волновой пакет. Поэтому точка  $z_0$  на пути сканирования, где обнаруживается пакет, и есть вертикальное положение отражающей

поверхности с точностью до известной длины пути опорного луча. Если шум в измерении отсутствует, волновой пакет имеет форму, характерную для конкретного прибора. Такой сигнал называется эталонной коррелограммой (обозначим ее  $I$ ). В рядовых измерениях на фоне шума, для нахождения положения пакета мы просто примеряем эталонную коррелограмму к разным местам полученного сигнала – измеренной коррелограммы  $J$ . Место, где эталонная наилучшим образом «вписывается» в измеренную коррелограмму и есть  $z_0$ . «Вписывается» значит имеет наименьшие отклонения, в смысле метода наименьших квадратов (МНК). То есть мы ищем положение, в котором ( $j$ – номер точки снятия показания камеры на пути сканирования)

$$\sum (J_j - I_j)^2 \rightarrow \min, \quad \text{или} \quad \sum (J_j^2 - 2J_j I_j + I_j^2) \rightarrow \min, \quad (1)$$

Поскольку в процессе «примерки» мы не меняем размеров коррелограмм, первый и последний члены во второй сумме (3) постоянны и условие наилучшего совпадения

$$\sum_j J_j I_j(z_0) \rightarrow \max_{z_0}. \quad (2)$$

Процедура поиска (4) означает поиск максимума взаимной корреляционной функции. Это и есть метод КК. Не следует думать, что в (4) максимум ищется только на точках сетки  $j$ , напротив,  $z_0$  находится с любой точностью после должного интерполирования коррелограмм. Можно показать, что найденное положение эталонной коррелограммы является наиболее вероятным в случае нормально распределенного некоррелированного шума.

**2. Граница Крамера-Рао для дисперсии оценки высоты КК методом.** Критерий Крамера-Рао определяет нижнюю границу дисперсии статистически определяемого параметра [4] – в нашем случае, высоты поверхности. Если известна вероятность появления измеренной коррелограммы, дисперсия высоты удовлетворяет неравенству:

$$\text{var}(z_0) \geq -1/E \left( \partial^2 \ln p / \partial z_0^2 \right), \quad (3)$$

$E$ – математическое ожидание. Логарифм вероятность  $\ln p$  для независимых нормально распределенных с дисперсией  $\sigma^2$  отклонений  $\delta_j = J_j - I_j$  с вероятностями  $p_{\delta_j}$  равен:

$$\ln p = \ln \prod_{j=1}^N p_{\delta_j} = \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^N \exp \left( -\sum_{j=1}^N \delta_j^2 / 2\sigma^2 \right) = -\sum_{j=1}^N \delta_j^2 / 2\sigma^2 + C.$$

Для второй производной логарифма вероятности тогда выполняется

$$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial z_0^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_0} \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_j -2\delta_j \frac{\partial I_j(z_0)}{\partial z_0} \right] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_j \left\{ -\left[ \frac{\partial I_j(z_0)}{\partial z_0} \right]^2 + \delta_j \frac{\partial^2 I_j(z_0)}{\partial z_0^2} \right\},$$

где  $C$  постоянная и учтено, что  $\delta_j$  не зависят  $z_0$ . Далее, только  $\delta_j$  являются случайными величинами, причем с нулевым средним, поэтому

и, окончательно,

$$\text{var}(z_0) = \sigma^2 / E \left( \sum_j \left\{ \left[ \frac{\partial I_j(z_0)}{\partial z_0} \right]^2 - \delta_j \frac{\partial^2 I_j(z_0)}{\partial z_0^2} \right\} \right) = \sigma^2 / \sum_j \left[ \frac{\partial I_j(z_0)}{\partial z_0} \right]^2. \quad (4)$$

По Крамеру-Рао, (4) – это нижняя граница, но оценка эффективна и выполняется равенство.

**3. Оценка дисперсии CSI методов. Метод аппроксимации огибающей параболой.** Коррелограмма  $I$ , ее сопряженная и огибающая  $\hat{E}_0(z)$  записываются как (см., например, [6])

$$I(z) = \int_0^\infty \Psi(k) \cos(2kz) dk, \quad I_s(z) = \int_0^\infty \Psi(k) \sin(2kz) dk \quad \text{и} \quad \hat{E}_0(z) = \sqrt{I^2(z) + I_s^2(z)}. \quad (5)$$

Для измеренной коррелограммы  $J_j = I_j + \delta_j, J_{sj} = I_{sj} + \delta_{sj}$ . Считая  $\delta$  малыми, получаем Т.к.  $\sigma^2$ -дисперсия  $\delta_j$ , то, следовательно, и дисперсия  $\delta_{sj}$ ; тогда дисперсия огибающей

$$\hat{E}_j = \sqrt{J_j^2 + J_{sj}^2} \approx \hat{E}_{0j} + \frac{I_j}{\hat{E}_{0j}} \delta_j + \frac{I_{sj}}{\hat{E}_{0j}} \delta_{sj}.$$

$$\sigma(\hat{E}_j) = \left( \frac{I_j}{\hat{E}_{0j}} \right)^2 \sigma^2 + \left( \frac{I_{sj}}{\hat{E}_{0j}} \right)^2 \sigma^2 = \sigma^2,$$

То есть огибающая так же имеет нормальное распределение с дисперсией  $\sigma^2$ .

Обычным способом определения положения максимума огибающей является аппроксимация ее параболой. Мы заменим его поиском положения эталонной огибающей  $\hat{E}_0(z_0)$ , дающего наилучшее приближение; найденная дисперсия дает нижнюю границу и метода параболы. Поскольку поиск положения наилучшего положения полностью аналогичен изложенному в 2., но в приложении к огибающей вместо коррелограммы, мы можем применить (4), тогда:

$$\text{var}(z_0) = \sigma^2 / \sum_j \left[ \frac{\partial \hat{E}_{0j}(z_0)}{\partial z_0} \right]^2. \quad (6)$$

Очевидно, что производные огибающей много меньше, чем коррелограммы, поэтому дисперсия оценки КК (4) много меньше дисперсии метода параболы (6).

**4. Дисперсия оценки метода центроида огибающей.** Альтернативным среди методов огибающей является метод поиска позиции ее центроида. В простейшем из вариантов метода положение поверхности оценивается как:

$$\tilde{z}_0 = \sum_j j \hat{E}_j / \sum_j \hat{E}_j.$$

(здесь и ниже мы используем интервал дискретизации пути сканирования как единицу измерения длины, т.е.,  $\Delta z = I; z_j = j$ ). Если  $z_0$  – истинная позиция,  $z_0 = \sum_j j \hat{E}_0 / \sum_j \hat{E}_0$ , то

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0 &= \frac{\sum_j j(\hat{E}_{0j} + \delta_j)}{\sum_j (\hat{E}_{0j} + \delta_j)} = \frac{\sum_j j \hat{E}_{0j} + \sum_j j \delta_j}{\sum_j \hat{E}_{0j}} \left( \frac{1}{1 + \sum_j \delta_j / \sum_j \hat{E}_{0j}} \right) = \\ &= \frac{(\sum_j j \hat{E}_{0j} + \sum_j j \delta_j)(\sum_j \hat{E}_{0j} - \sum_j \delta_j)}{(\sum_j \hat{E}_{0j})^2} + o\left(\frac{\sum_j \delta_j}{\sum_j \hat{E}_{0j}}\right) = \\ &= z_0 - z_0 \frac{\sum_j \delta_j}{\sum_j \hat{E}_{0j}} + \frac{\sum_j j \delta_j}{\sum_j \hat{E}_{0j}} + o\left(\frac{\sum_j \delta_j}{\sum_j \hat{E}_{0j}}\right), \end{aligned}$$

и погрешность оценки высоты из-за шума равна

$$\delta_{z_0} = \tilde{z}_0 - z_0 = \sum_j (j - z_0) \delta_j / \sum_j \hat{E}_j. \quad (7)$$

Отклонений огибающей  $\delta_j$  не независимы – это отклонения точек огибающей – но положительно коррелированы с близлежащими. По свойству дисперсии суммы случайных величин [8], дисперсия  $\delta_{z_0}$  получается из (7) как

$$\sigma_{z_0}^2 = \left[ \sigma^2 \sum_j (j - z_0)^2 + 2 \sum_j \sum_{k < j} (j - z_0)(k - z_0) K_{jk} \right] / (\sum_j \hat{E}_j)^2.$$

Пренебрегая ковариациями  $K_{jk}$ , что возможно вследствие того, что пакет коррелограммы содержит малое число длин волн, нижняя оценка  $z_0$  метода получается как:

$$\text{var}(z_0) \equiv \sigma_{z_0}^2 = \sigma^2 \sum_j (j - z_0)^2 / (\sum_j \hat{E}_j)^2. \quad (8)$$

**5. Дисперсия оценки высоты в фазовом методе.** Дисперсия оценки высоты поверхности для PSI получена в [5], [7] как граница Крамера-Рао по распределению вероятностей фаз в разложении Фурье (ЦПФ) эталонной коррелограммы  $I$ ;  $k$ – номер гармоники:

$$\text{var}(z_0) = \sigma^2 / \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\Delta k} \left( \frac{2\pi k}{N} \right)^2 |X_k|^2, \quad I_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2\pi i \frac{jk}{N}}, \quad (9)$$

$j = 1..N$ ,  $N$ – число точек измерения;  $X_k$ – комплексные,  $\Delta k \leq N/2$ –интервал спектра.

Рассмотрим как дисперсия оценки (9) относится к полученной для метода КК(4). В (4) фигурируют непрерывные производные  $I$ , поэтому нам надо определить  $I(j+a)$ ,  $0 \leq a < 1$ , в промежуточных точках. Мы используем имеющийся дискретный спектр и соответственно смещаем фазы; необходимое свойство ЦПФ  $Y_k = Y_{N-k}^*$  сохраняется, (9) получается при  $a = 0$ :

$$I(j+a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2\pi i \frac{jk}{N}}; \quad Y_k = X_k e^{2\pi i \frac{ak}{N}}, \text{ при } k \leq N/2; \quad Y_k = X_k e^{-2\pi i \frac{a(N-k)}{N}}, \text{ при } k > N/2. \quad (10)$$

Тогда 
$$\left. \frac{dI}{da} \right|_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left. \frac{dY_k}{da} \right|_{a=0} e^{2\pi i \frac{jk}{N}}.$$

Принимая, что  $dI/dz|_j$  в (4) равна  $dI/da|_j$  и подставляем знаменатель (4) ( $L$ ), получаем:

$$L = \sum_{j=1}^N \left( \left. \frac{dI}{dz} \right|_j \right)^2 = \sum_{j=1}^N \left. \frac{dI}{dz} \right|_j \left. \frac{dI^*}{dz} \right|_j = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{N-1} \left. \frac{dY_k}{da} \left( \frac{dY_l}{da} \right)^* \right|_{a=0} e^{2\pi i \frac{j(k-l)}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{k=0 \\ l=0}}^{N-1} \delta_{k,l} \left. \frac{dY_k}{da} \left( \frac{dY_l}{da} \right)^* \right|_{a=0} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left. \frac{dY_k}{da} \right|_{a=0}^2.$$

Мы изменили порядок суммирования и учли, что производные  $I$  вещественны. Кроме того, мы использовали символ Кронекера  $\delta_{k,l} = 0, k \neq l$ ;  $\delta_{k,k} = 1$ , указывающий на ортогональность гармоник. Подставляя (10) получаем выражения для производных  $Y_k$ :

$$\left. \frac{dY_k}{da} \right|_{a=0}^2 = \left. \frac{dY_{N-k}}{da} \right|_{a=0}^2 = \left( \frac{2\pi k}{N} \right)^2 |X_k|^2 \text{ при } k \leq N/2.$$

Подстав производные (при  $k = 0$  они исчезают) в выражение для  $L$ , получаем окончательно

$$L = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \left. \frac{dY_k}{da} \right|_{a=0}^2 + \frac{1}{N} \left. \frac{dY_{N/2}}{da} \right|_{a=0}^2 = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N/2-1} \left( \frac{2\pi k}{N} \right)^2 |X_k|^2 + \frac{(\pi)^2}{N} |X_{N/2}|^2. \quad (11)$$

Эта формула показывает эквивалентность (4) и (9), если величиной  $|X_{N/2}|$  можно пренебречь. Мы получили, что погрешности фазового метода могут быть в идеальном случае равны погрешности метода КК. Тем не менее, эта точность не достигается фазовыми методами последующим причинам. Во-первых, фазовый метод подвержен  $2\pi$  скачкам, неучтенным в (9); во-вторых, на практике для определения  $|X_k|$  в фазовом методе используется не эталонная коррелограмма  $I$  как в (9), а текущая  $J$ , информация о том «как должно быть» снова теряется и погрешность, как показано ниже, становится больше.

Фазовый метод [7] опирается на нормальное распределение вероятности фаз  $\phi_k$  гармоник  $J$ :

$$p = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \right)^N \prod_{k=1}^{\Delta k} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \phi_k + \frac{2\pi k}{N} z_0 \right)^2 / \sigma_k^2 \right).$$

$\sigma_k^2 = 0.5N\sigma^2/|X_k|$ –дисперсия  $\phi_k$  [7]. Наибольшую вероятность дает  $z_0$  определяемая МНК:

$$E \left( \delta_j \cdot \partial^2 I_j(z_0) / \partial z_0^2 \right) = 0,$$

$$\Phi = \sum_k \left( \phi_k + \frac{2\pi k}{N} z_0 \right)^2 |X_k|^2 \rightarrow \min_{z_0} \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = 0; \Rightarrow \sum_k 2 \frac{2\pi k}{N} \left( \phi_k + \frac{2\pi k}{N} z_0 \right) |X_k|^2 = 0; \Rightarrow \quad (12)$$

$$z_0 = \sum_k |X_k|^2 \frac{2\pi k}{N} \phi_k / \sum_k |X_k|^2 \left( \frac{2\pi k}{N} \right)^2.$$

$\phi_k$  и  $|X_k|$  варьируются шумом; предполагая независимость их вариаций и суммируя их дисперсии, мы получаем погрешность при определении  $z_0$  фазовым методом

$$\sigma_{z_0}^2 = \sum_m \left( \frac{\partial z_0(\varphi_m, |X_m|_{meas})}{\partial \varphi_m} \right)^2 \sigma_m^2 + \sum_m \left( \frac{\partial z_0(\varphi_m, |X_m|_{meas})}{\partial |X_m|_{meas}} \right)^2 \sigma_{|X_m|_{meas}}^2 =$$

$$\frac{N}{2} \sigma^2 / \sum_m \left( \frac{2\pi m}{N} \right)^2 |X_m|^2 + N \sigma^2 \sum_m \left( \frac{\partial z_0(\varphi_m, |X_m|_{meas})}{\partial |X_m|_{meas}} \right)^2. \quad (13)$$

Сравнивая с (11) мы обнаруживаем в (13) дополнительный член. На практике он оказывается значительными точность фазового метода, хотя и значительно превышающая на гладких поверхностях точность метода огибающей, меньше точности КК.

### Заключение.

Получены оценки погрешности расчета топографии поверхности различными методами ИБС и их сравнение. Показано, что метод корреляции коррелограмм обладает наименьшей погрешностью. Таким образом, этот метод может быть рекомендован к широкому внедрению в практику измерений.

### Список литературы

1. Hirabayashi A., Ogawa H., and Kitagawa K. "Fast surface profiler by white-light interferometry by use of a new algorithm based on sampling theory". Appl. Optics, 41, 2002, 4876-4883.
2. I. Kiselev, V. Oberst, V. V. Sysoev, and U. Breitmeier, "A white-light interferometer as a gauge to measure the thickness of thin film: a practical extension of the phase method and correlogram summation", J. of Optics, 17, 125616-125625.
3. J. [Seewig](#), I. [Raid](#), C. [Wiehr](#), B. A. [George](#), "Robust evaluation of intensity curves measured by confocal microscopies," Proc. SPIE 8788, Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VIII, SPIE Press, May 2013, T-1 - T-13.
4. J. Seewig, T. Böttner, and D. Broschart, "Uncertainty of height information in coherence scanning interferometry," Proc. SPIE 8082, Optical Measurement Systems for Industrial Inspection VII, SPIE Press, May 2011, V-1 - V-9.
5. P. de Groot, "Method and system for analyzing low-coherence interferometry signals for information about thin film structures", US Patent 7,321,431, 2008.
6. P. de Groot, "Principles of interference microscopy for the measurement of surface topography," Advances in Optics and Photonics, 7, 1-65, 2015.
7. Scharf, L., "Statistical Signal Processing - Detection, Estimation and Time Series Analysis", Addison-Wesley, NY: ISBN 0-201-19038-9, 1991, 221-230.
8. <https://en.wikipedia.org/wiki/Variance>