УДК 533

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ДВУХСКОРОСТНОГО ДВИЖЕНИЯ И ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Канцырев Борис Леонидович, *ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н. Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, Россия, 117997, г. Москва, Нахимовский пр.,36, e-mail: boris.kantsyrev@mail.ru*

Аннотация. Имеющиеся в современной научно-технической литературе представления о виде системы уравнений двухскоростного движения гетерогенных сред и о структуре слагаемых, входящих в неё, как отмечалось в [1], уже устоялись. Однако это не относится к виду коэффициентов при дифференциальных слагаемых, Определение таких соотношений до сих пор представляет собой еще не решенную и актуальную задачу. Действительно, указанные коэффициенты определяют тип и волновые свойства системы. Недостаток информации о коэффициентах часто приводит к ухудшению расчетной модели, несмотря на более детальный учёт межфазных сил и совершаемой ими работы.

Ключевые слова. Двухскоростное движение, законы сохранения, не гиперболичность, система уравнений.

CONSISTENCY EQUATIONS OF TWO-SPEED MOTION AND CONSERVATION LAWS

Kantsyrev Boris Leonidovich*, Russia, 117997, Moscow, Nakhimovskiy Ave., 36, e-mail: boris.kantsyrev@mail.ru*

Abstract. Available in modern scientific literature notion of a two-speed system of equations of motion of heterogeneous media and the structure of the terms included in it, as noted in [1], already unsettled. However, this does not apply to the form of the coefficients of differential terms, identification of such relationships still is not solved, and urgent task. Indeed, these factors determine the type and properties of the wave system. Lack of information about the factors often leads to a deterioration of the calculation model, in spite of a more detailed account of the interfacial strength and makes them work.

Keywords. Two-speed motion, conservation laws, non-giperbolic, the system of equations.

Введение.

Авторы большинства современных гиперболических моделей двухскоростного движения (напр. [2]) рассматривают волновые свойства моделей, как следствие сделанного ими выбора дифференциальных слагаемых и далее, исходя из дополнительных соображений, определяют область значений коэффициентов, в которой модель приводит к удовлетворительным результатам. Более того, в [3] автор констатирует фактическую не применимость стандартных численных методов типа метода Годунова из-за невозможности решения задачи Римана для негиперболической системы уравнений и предлагает для неё, а также для уравнений состояния фаз специальные формы записи. После чего определяется область параметров задачи (газосодержание α_g не менее некоторой фиксированной величины), в которой обеспечивается гиперболичность. В некоторых случаях (например [4]) настроечные коэффициенты модели определяются начальными условиями. В то же время представляется очевидным, что коэффициенты при дифференциальных слагаемых в уравнениях импульса и энергии гетерогенного пузырькового потока необходимо уточнять. Этим определяется цель работы: конкретизация волновых свойств системы осредненных уравнений, т.е. характеристических скоростей и автомодельных решений типа центрированной волны и получение решений задачи Римана, необходимых для построения численных схем.

Основные предположения и общая схема рассуждений.

Предварительно сделаем важную для дальнейшего оценку соотношения вязких сил трения, сосредоточенных на межфазной границе и вязкой компоненты вектора поверхностных сил в несущей фазе, аналогичную приведённой в [5]. Действительно, для осредненных вязких сил R^{τ} на межфазной поверхности (в соответствии с обозначениями [5]) $R^{\tau} \approx s_{12}\left\langle \tau'^{\kappa} n'^{\kappa} \right\rangle_{12}$, где $s_{12} = \dfrac{\delta s_{12}}{\delta V}$ -межфазная поверхность в единице объёма двухфазной среды.

Для монодисперсной среды со сферическими пузырьками $s_{12} = 4\pi R_b^2 n = \dfrac{3\alpha_2}{R_b}$, $n = \dfrac{\alpha_2}{\left(\dfrac{4\pi R_b^3}{3}\right)}$

n- число пузырьков в единице объёма среды. R_b– радиус пузырька. Вязкие напряжения в микромасштабе $\tau' \sim \mu_L \dfrac{\partial v'_L}{\partial x'} \sim \mu_L \dfrac{U}{R_b}$, $U = v_2 - v_1$, Здесь предполагается, что в микро-окрестности пузырька скорость несущей фазы изменяется на величину порядка относительной скорости фаз. Тогда $R^{\tau} \sim \mu_L \dfrac{3\alpha_2}{R_b^2} U$, С другой стороны, макроскопические вязкие напряжения в несущей (жидкой) фазе $\left\langle \tau'^{k} \right\rangle_1 \sim \mu_L \dfrac{\partial v_1}{\partial z}$. Для оценки производной скорости несущей фазы по координате представим v_1, как функцию полного объёмного расхода и проскальзывания U. $v_1 = W - \alpha_2 U,\ \Delta v_1 = \Delta W - U\Delta\alpha_2 - \alpha_2 \Delta U$

Если пренебречь сжимаемостью фаз и фазовыми переходами, то полный объёмный расход не изменяется с координатой, а изменения газосодержания и проскальзывания на характерном макроскопическом масштабе задачи L_V имеет порядок самого газосодержания и проскальзывания. Тогда $\frac{\partial v_1}{\partial z} \approx \frac{\Delta v_1}{L_V} \sim \frac{\alpha_2 U}{L_V}$. Физический смысл последнего соотношения сводится к тому что, чем меньше газосодержание, тем меньше изменение скорости несущей фазы. Окончательно получим для вектора вязких сил $\frac{\partial(\alpha_1\langle\tau'^k\rangle_1)}{\partial z} \sim \alpha_1\mu_1 \frac{\alpha_2 U}{L_V^2}$,

следовательно: $\frac{\left[\frac{\partial(\alpha_1\langle\tau'^k\rangle_1)}{\partial z}\right]}{R^\tau} \sim \frac{\alpha_1\mu_L \frac{\alpha_2 U}{L_V^2}}{\mu_L \frac{3\alpha_2}{R_b^2} U} = \alpha_1 \frac{R_b^2}{3L_V^2} << 1$. Если же учитывается фазовый переход,

то можно показать, что для скоростей роста пузырька $\frac{dR_b}{dt}$, меньших или сравнимых с проскальзыванием U, отношение вектора вязких сил к межфазной силе R^τпропорционально $\alpha_1 \frac{R_b}{L_V}$, т.е. так же может считаться малой величиной в сравнении с единицей. Таким образом, в дальнейшем считаем вязкие силы сосредоточенными на межфазной границе. Для того, чтобы пояснить схему последующих рассуждений, рассмотрим систему уравнений гидродинамики [6, гл1, §3] парожидкостного потока с несжимаемыми фазами. При этом используем известные из монографии [7,гл16,§139] соображения о том, что уравнения двухскоростного движения для фаз могут быть конкретизированы исходя из условия их непротиворечивости с уравнениями сохранения, записанными для среды в целом. Запишем систему уравнений двухскоростного движения в следующем виде:

$$\rho_1^\circ\alpha_1 \frac{d_1 V_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial z} + F_{21} + J_{21}(V_{21} - V_1) \tag{1}$$

$$\rho_2^\circ\alpha_2 \frac{d_2 V_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial z} + F_{12} + J_{12}(V_{12} - V_2) \tag{2}$$

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_1 V_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_1^\circ} J_{21}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_2 V_2}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2^\circ} J_{12} \tag{4}$$

$$\rho_1^\circ\alpha_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = F_{21}(V_{21} - V_1) + J_{21}(u_{21} - u_1) + \frac{1}{2} J_{21}(V_{21} - V_1)^2 + Q_{21} \tag{5}$$

$$\rho_2^\circ\alpha_2 \frac{d_2 u_2}{dt} = F_{12}(V_{12} - V_2) + J_{12}(u_{12} - u_2) + \frac{1}{2} J_{12}(V_{12} - V_2)^2 + Q_{12} \tag{6}$$

где $\frac{d_i f_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + V_i \frac{\partial f_i}{\partial z}$, $f_i = u_i, V_i$, $i = 1,2$

Здесь (1)-(4)- представляют уравнения неразрывности и баланса импульса для фаз соответственно, а (5)-(6)- уравнения баланса внутренних энергий фаз u_1, u_2.

$\rho_1^\circ = \mathrm{const}$, $\rho_2^\circ = \mathrm{const}$, $F_{12} = -K_\mu \alpha_1\alpha_2(V_2 - V_1)$, $F_{21} = -F_{12}$, $J_{21} = -J_{12}$, $V_{21} = V_{12}$,

$u_{21} = u_{1S}$, $u_{12} = u_{2S}$, $i_{21} = u_{21} + \frac{p}{\rho_1^\circ}$, $i_{12} = u_{12} + \frac{p}{\rho_2^\circ}$,

Данная система из шести уравнений с шестью неизвестными тем не менее- не вполне определена. Действительно, вычисляя так называемую субстанциональную производную [6, гл1, §1] полной энергии среды (7), которая по своему физическому смыслу должна

$$\rho \frac{DE}{Dt} = \sum_{i=1}^{2}\left(\rho_i \frac{d_i E_i}{dt} + \sum_{j=1}^{2} J_{ji} E_i\right), \tag{7}$$

определяться только внешними воздействиями на объём среды фиксированной массы, можно убедиться, что для выполнения этого условия необходимо выполнение дополнительного равенства:

$$J_{12}(i_{21}-i_{12})-(Q_{21}+Q_{12})=0 \tag{8}$$

Физический смысл уравнения (8) определяется выполнением теплового баланса на межфазной поверхности, однако условие независимости (7) от внутренних процессов связано только лишь с непротиворечивостью свойств производной (7) и системы уравнений (1-6). Отметим, что подстановка в (7) уравнения сохранения полной энергии среды автоматически приведёт к независимости (7) от внутренних процессов.

Следовательно, речь идёт о непротиворечивости закона сохранения энергии и системы (1-6). Заменим в указанной системе уравнения (3) – (4) на уравнения сохранения импульса и полной энергии среды:

$$\frac{\partial\left(\rho_1^\circ\alpha_1V_1+\rho_2^\circ\alpha_2V_2\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(p+\rho_1^\circ\alpha_1V_1^2+\rho_2^\circ\alpha_2V_2^2\right)}{\partial z}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial\left[\rho_1^\circ\alpha_1\left(u_1+0.5V_1^2\right)+\rho_2^\circ\alpha_2\left(u_2+0.5V_2^2\right)\right]}{\partial t}+$$

$$+\frac{\partial\left[\rho_1^\circ\alpha_1V_1\left(u_1+0.5V_1^2\right)+\rho_2^\circ\alpha_2V_2\left(u_2+0.5V_2^2\right)+p\alpha_1V_1+p\alpha_2V_2\right]}{\partial z}=0 \tag{10}$$

Выделяя в (9) и (10) ускорения фаз $\frac{d_1V_1}{dt},\frac{d_2V_2}{dt}$ и используя уравнения неразрывности, можно привести (9) , (10) к виду:

$$\begin{gathered}\rho_1^\circ\alpha_1\frac{d_1V_1}{dt}+\rho_2^\circ\alpha_2\frac{d_2V_2}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}\\ \rho_1^\circ\alpha_1V_1\frac{d_1V_1}{dt}+\rho_2^\circ\alpha_2V_2\frac{d_2V_2}{dt}=-W\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_1^\circ\alpha_1\left(\frac{d_1u_1}{dt}\right)-\rho_2^\circ\alpha_2\left(\frac{d_2u_2}{dt}\right)\end{gathered} \tag{11}$$

Подставляя в (11) уравнения (5, 6), найдём ускорения фаз:

$$\alpha_1\rho_1^\circ\frac{d_1V_1}{dt}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial z}+K_\mu\alpha_1\alpha_2(V_2-V_1)+J_{21}(V_{21}-V_1)+\frac{Q}{(V_2-V_1)} \tag{12}$$

где $$\alpha_2\rho_2^\circ\frac{d_2V_2}{dt}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial z}-K_\mu\alpha_1\alpha_2(V_2-V_1)+J_{12}(V_{21}-V_2)-\frac{Q}{(V_2-V_1)} \tag{13}$$

$$Q=J_{12}(i_{21}-i_{12})-(Q_{21}+Q_{12})$$

Таким образом, если условие Q=0 будет обосновано (например, исходя из анализа уравнений баланса энергии на межфазной границе [6, гл 2, § 1]), то справедливость уравнений движения (3, 4) подтверждается их непротиворечивостью с законами сохранения. Рассмотренное выше иллюстративное рассуждение полезно при анализе более сложных моделей. Действительно, уравнения (3), (4) можно записать в форме уравнений баланса импульса для фаз:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho_1^\circ\alpha_1V_1}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_1^\circ\alpha_1V_1^2+\alpha_1p\right)}{\partial z}=-p\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}+K_\mu\alpha_1\alpha_2(V_2-V_1)+J_{21}V_{21}\\ \frac{\partial\rho_2^\circ\alpha_2V_2}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho_2^\circ\alpha_2V_2^2+\alpha_2p\right)}{\partial z}=p\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}-K_\mu\alpha_1\alpha_2(V_2-V_1)+J_{12}V_{21}\end{gathered} \tag{14}$$

Если в рамках вышеприведённой модели в правых частях (14) первые слагаемые представляют собой межфазную силу Х.А. Рахматулина, точное выражение для которой получено в [6], то в случае, когда модель двухскоростного движения учитывают ещё и пульсационные слагаемые [6, гл 3], в правых частях (14) присутствует сила присоединённых масс:

$$\chi(\alpha_2)\rho_1^\circ\alpha_1\alpha_2\left(\frac{d_1V_1}{dt}-\frac{d_2V_2}{dt}\right) \tag{15}$$

Причём коэффициент присоединённой массы $\chi(\alpha_2)$ в этой, более сложной модели, различными авторами представляется совершенно по-разному. Исследование непротиворечивости уравнений движения и законов сохранения позволяет дать ответ на вопрос, какое выражение для χ можно считать правильным. Какизвестно ([6]), при выводе осреднённых уравнений многофазной гидродинамики получаются дополнительные слагаемые, соответствующие вкладу пульсационных напряжений, аналогичных рейнольдсовым напряжениям в турбулентных потоках.

Пульсационные добавки в осреднённых уравнениях.

Действительно, в соответствии с ([6], гл 1, §1), систему уравнений гидродинамики для фазы сплошной среды, обозначенной индексом «i» можно представить в виде:

$$\rho_i^{0'} \frac{d_i e_i'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\rho_i^{0'} e_i' + \nabla^{'k} \rho_i^{0'} e_i' v_i^{'k} = \nabla^{'k} \psi_i^{'k} + \rho_i^{\circ'} f' \quad \textbf{(16)}$$

где

$$e_i' = 1; \quad v_i'; \quad u_i' + \frac{1}{2}(v_i')^2$$

$$\psi_i^{'k} = 0; \quad \sigma_i^{'k}; \quad \sigma_i^{'k} v_i' - q_i^{'k}$$

$$f' = 0\ ; \quad g_i\ ; \quad g_i\, v_i'$$

При осреднении каждое из слагаемых в уравнениях заменяется осреднённым.

Вводя обозначение для отклонения от среднего значения :

$$\Delta e_i' = e_i' - e_i, \tag{17}$$

можно показать ([6],гл 1, §2), что

$$\left\langle \rho_i^{\circ'} e_i' v_i^{'k} \right\rangle_i = \left\langle \rho_i^{\circ'} \right\rangle \left\langle e_i' \right\rangle \left\langle v_i^{'k} \right\rangle + \left\langle \rho_i^{\circ'} \Delta e_i' \Delta v_i^{'k} \right\rangle_i \tag{18}$$

где второе слагаемое в правой части соответствует пульсационным движениям.

Таким образом, в осреднённой системе уравнений под знаком дифференцирования оказываются не только осреднённые значения переменных, но и пульсационные.

Для их расчёта требуется дополнительная информация, поэтому в данной работе рассмотрен специальный «ламинарный режим» движения дисперсной смеси. В таком режиме хаотичное движение дисперсной фазы есть величина малости порядка $\rho_2^\circ \alpha_2 / \rho_1^\circ \alpha_1$ по отношению к пульсациям несущей фазы. Пульсации скоростей несущей (жидкой) фазы определяются разностью осреднённых скоростей фаз. Как было показано в [7, гл 16],этот режим действительно реализуется при не слишком больших (в сравнении со скоростью звука) относительных скоростях потоков. Например, в монографии [8] (стр. 222) была рассмотрена модель двухскоростного гетерогенного потока, учитывающая пульсационную кинетическую энергию потока в виде соотношения:

$$\boldsymbol{E}_\delta = \delta(1-\delta)\frac{U^2}{2}, \qquad \delta = \frac{\rho_2^\circ}{\rho}\alpha_2,\ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1$$

В данной работе рассмотрено влияние указанных пульсационных слагаемых кинетической энергии и тензора напряжений несущей фазы на волновые свойства системы уравнений пузырькового потока. В монографии [6] показано, что кинетическая энергия мелкомасштабных движений и пульсационная составляющая тензора поверхностных напряжений, соответствующая пространственно одномерному осредненному уравнению движения жидкой фазы в указанном ламинарном режиме могут быть представлены соответственно в виде;

$$k_1 = 0.5\alpha_2 \chi(\alpha_2) U^2, \tag{19}$$

$$\Pi_1 = -\alpha_2 \psi(\alpha_2) U^2, \tag{20}$$

где α_2 – объемное газосодержание,U- относительная скорость фаз $U= V_2 - V_1$,

V_2 ,V_1- соответственно макроскопические (осредненные) скорости дисперсной и несущей фазы, χ и ψ -т.н. пульсационные коэффициенты, которые являются функциями объемного газосодержания α_2. Учитывая их предельные (при $\alpha_2 \to 0$) значения $\psi_{\alpha_2=0} = \frac{1}{2}$, $\chi_{\alpha_2=0} = \frac{1}{2}$, полученные в рамках модели бесстолкновительной монодисперсной смеси ([6]),при $\alpha_2 > 0$ эти коэффициенты могут быть рассмотрены, как искомые величины. Основываясь на рассмотренном выше подходе можно уточнить выражения для работы внутренних сил в уравнениях баланса тепловой энергии, уравнение баланса потоков тепла на межфазной границе. При этом важно, что все полученные таким образом поправки зависят только от двух функций объемного газосодержания - ψ, χ. По своему физическому смыслу первая - коэффициент присоединенной массы, авторая -пульсационный коэффициент в соотношении для потока импульса. Некоторые результаты этого подхода были представлены в [1,9].

Список литературы

1. Б.Л. Канцырев. Волновые свойства системы уравнений двухскоростного движения пузырькового потока. Труды международной научной конференции «Рахматулинскиеормонбековские чтения».27-29 июня 2013. Г. Бишкек. Стр 66-68.
2. Б.Л. Канцырев. Коэффициент присоединённой массы распадающейся сферы Известия кыргызского государственного технического университета им И. Раззакова, ISSN-9967-4557,№ 22, 126-130, Бишкек, 2011.
3. Годунов С.К., Роменский Е.И. элементы механики сплошных сред и законы сохранения (Университетская серия, Т4), Новосибирск, 1998, 280 с
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Гидродинамика Т6, М. Наука, 711стр.
5. Р.И. Нигматулин, Механика сплошной среды , М, 2014, стр 464
6. Р.И. Нигматулин. Основы механики гетерогенных сред. М. Наука, 1978, 336 стр
7. Hudson J., Harris D. A high resolution scheme for Eulerian gas-solid two-phase isentropic flow , Journal of Computational Physics, v 216, (2006), pp 494-525.
8. Thanh M.D. On a two-fluid model of two-phase compressible flows and its numerical approximation. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol 17, 2012, pp 195-211.
9. Romenski E., DrikakisD.,Toro E . Conservative Models and Numerical Methods for Compressible Two-Phase Flow, J. Sci. Comput (2010), v 42, pp 68-95.