ГОРНОЕ ДЕЛО И ТЕХНОЛОГИИ

УДК 517.962.2, 517.968.22

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ СРЕДЫ В ОДНОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СЕЙСМИКИ

Алимканов Амангельди Арапбаевич, *аспирант, ст.преп., ОшТУ им. академика М.М. Адышева, Кыргызстан, Ош, ул. Н.Исанова 81, Моб. 0554554954,* dr.amangeldy78@mail.ru
Сатыбаев Абдуганы Джунусович, *д.ф.-м.н., профессор, ОшТУ им. академика М.М. Адышева, Кыргызстан, Ош, ул. Н.Исанова 81, Моб. 0553080408,* abdu-satybaev@mail.ru

Аннотация. В данной статье рассмотрена одномерная обратная задача сейсмики, в которой определена плотность среды. Задача сведена к обратной задаче с данными на характеристиках. Построено конечно-разностное решение обратной задачи, показана сходимость этого решения к точному решению.

Ключевые слова. Уравнение сейсмики, обратная задача, плотность среды, конечно-разностное решение, сходимость.

FINITE-DIFFERENCE DETERMINATION OF THE DENSITY OF THE MEDIUM IN ONE-DIMENSIONAL INVERSE PROBLEM OF SEISMIC

Alimkanov Amangeldi Arapbaevich, *post-graduate student, senior lecturer., OshTU named after academician M.M. Adysheva, Kyrgyzstan, Osh, st. N. Isanova 81, Mob. 0554554954, dr.amangeldy78@mail.ru*
Satybaev Abdugany Dzhunusovich, *Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, OshTU named after academician M.M. Adysheva, Kyrgyzstan, Osh, st. N.Isanova 81, Mob. 0553080408, abdu-satybaev@mail.ru*

Abstract. This article describes the one-dimensional seismic inverse problem, which defines the density of the medium. The problem is reduced to inverse problem with data on characteristics. The finite-difference solution shows the convergence of this solution to the exact solution.

Keywords. The equation of the seismic inverse problem, the density of the medium, finite-difference solution convergence.

Введение. Исследования внутреннего строения Земли и распространения в ней сейсмических волн, процессов состоит из двух основных этапов: наблюдения поля сейсмических волн; интерпретация полученных данных.

При интерпретации сейсмических наблюдений требуется определить внутреннее строение среды Земли по колебаниям поверхности среды, которые происходят под действием источников (землетрясения, искусственные взрывы, вулканы и другие) [4].

Самым простым, в то время наглядно описывающим процессом распространения сейсмических волн является волновое уравнение. Поэтому решение как прямых так и обратных задач для волнового уравнения почти наглядно демонстрирует происхождения сейсмических волн в среде [1].

Классическим способом изучения прямых и обратных динамических сейсмических задач в неоднородной среде является метод линеаризации многомерных задач [3].

Смысл одномерной и многомерной линеаризованной задачи состоит в том, что решение последной задачи мало, слабо отличается от решения одномерной задачи, это имеет место как в прямых задачах так и в обратных задачах. Поэтому решение общей задачи состоит из решений одномерной и многомерно – линеаризованной задач, и конечно это еще необходимо установить, доказать строго математически.

Построения численных решений одномерных и линеаризовано многомерных (прямых, обратных) задач, разработка алгоритмов, создание комплекса программ и получение численных расчетов и графиков и их обоснования представляет большой интерес с точки зрения сейсмических приложений [2].

1. Постановка задачи. Одномерная прямая задача сейсмики заключается в определении *$u_o(x_3,t)$* – смещения почв из задачи

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_0(x_3,t)}{\partial t^2}=\mu_0(x_3)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2_3}+\mu'_{0x_3}(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3},\quad x_3\in R_+,t\in R_+, \tag{1}$$

$$u_0(x_3,t)\Big|_{t<0}\equiv 0,\qquad \mu_0(x_3)\frac{\partial u_0(x_3,t)}{\partial x_3}\Bigg|_{x_3}=-r_0\delta(t),\ \ t\in R_+, \tag{2}$$

где $\rho_0(x_3)$ – плотность среды, $\mu_0(x_3)$ - коэффициент Ламе известные функции, $\delta(t)$ – дельта функция Дирака.

Обратная задача заключается в определении $\rho_0(x_3)$ – плотность среды, при известной функции $\mu_0(x_3)$ и дополнительной информации вида

$$u_0(x_3,t)\big|_{x_3=0}=f(t),\quad t\in[0,T], \tag{3}$$

Отметим, что обратная задача (1)-(3) возникла при линеаризации двумерной обратной задачи сейсмики [см. 5]. Пусть выполнено условие

$$\mu_0(x_3)|,\ \rho_0(x_3)\in\Lambda_0, \tag{4}$$

$$\Lambda_0=\{\rho_0(x)\in C^6(R_+),\rho_0'(+0)=0,\ 0<M_1\le\rho_0(x)\le M_2,\|\rho_0\|_{c^2}\le M_3\},$$

M_1, M_2, M_3 –положительные постоянные.

2. Приведем к обратной задаче с данными на характеристиках.

Введем новую переменную $x=\int\limits_0^{x_3}\frac{d\Sigma}{\sqrt{\mu_0(\Sigma)/\rho(\Sigma)}}$ и новые функции

$$u(x,t)=u_0(x_3,t),a(x)=\rho_0(x_3),\ c(x)=\mu_0(x_3)\ .$$

Тогда из обратной задачи (1)-(3) имеем следующую обратную задачу

$$\left.\begin{aligned}
&u(x,t)=u_{xx}(x,t)+\frac{1}{2}\left(\frac{a'(x)}{a(x)}+\frac{c'(x)}{c(x)}\right)u_x(x,t),\ x,t\in R^2_+,\\
&u(x,t)\Big|_{t<0}\equiv 0,\ \frac{a(0)}{c(0)}u_x(x,t)\Bigg|_{x=0}=-r_0\delta(t),\ t\in R_+,\\
&u(x,t)\big|_{x=0}=f(t),\ t\in[0,T]
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Здесь неизвестной является функция *a(x)*.

Продолжим теперь все *a(x)*, *c (x)* и *u(x,t)* четным образом по переменной *x* на полупространство $x\in R\_$, $R=\{x\in R : x<0\}$.

В силу условия (3), (4) и принципа конечной зависимости области решения гиперболического уравнения от области определения его коэффициентов и от области данных можно ограничиться рассмотрением обратной задачи (5) в области

$$\Delta(T) = \left\{(x,t) \in (R \times R_+) : x \in (0, \frac{T}{2}),\ |x| < t < T - |x|\right\}.$$

Для выделения особенностей решения задачи (5) представим решение прямой задачи в виде

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + S(x)\theta(t - |x|),\ x \in R,\ t \in R_+, \qquad (6)$$

где $\tilde{u}(x,t)$ - гладкая непрерывная функция, *θ(t)* – тета функция Хевисайда. Вычислим

$$u_{tt}(x,t) = \tilde{u}_{tt}(x,t) + S(x)\delta^{`}(t-|x|),\ u_x(x,t) = \tilde{u}_x(x,t) + S^{`}_x(x)\theta(t-|x|) - S(x)\delta(t-|x|),$$

$$u_{xx}(x,t) = \tilde{u}_{xx}(x,t) + S^{``}_{xx}(x)\theta(t-|x|) - 2S^{`}_x(x)\delta(t-|x|) + S(x)\delta^{`}_x(t-|x|),\ (7)$$

Подставляя последние выражения в уравнения (5) и собирая одинаковые функции при $\theta(t-|x|), \delta(t-|x|), \delta^{`}(t-|x|)$, получим обратную задачу относительно S(*x*):

$$\left.\begin{aligned} & u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) - \frac{2S^{`}(x)}{S(x)} u_x(x,t),\ (x,t) \in \Delta(T), \\ & u(x,t)\Big|_{t=|x|} = S(x),\ x \in \left[0, \frac{T}{2}\right]. \\ & u(x,t)\Big|_{x=0} = f(t),\ t \in [0,T] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Находим связь между функциями *S(x)* и *a(x), c(x)*. При одинаковых $\delta^{`}(t-|x|)$ получим $-2S^{`}_x(x) = \frac{1}{2}(\frac{a^{`}(x)}{a(x)} + \frac{c^{`}(x)}{c(x)})S(x),$ отсюда

$$\frac{S^{`}(x)}{S(x)} = -\frac{1}{4}(\frac{a^{`}(x)}{a(x)} + \frac{c^{`}(x)}{c(x)}),$$ проинтегрируем

$$\ln S(x) = -\frac{1}{4}\left[\ln a(x) + \ln c(x)\right] + C_2 = -\frac{1}{4}\left[\ln a(x)\cdot c(x)\right] + \ln C_1 =$$

$$= \ln\left[a(x)\cdot c(x)^{-\frac{1}{4}}\right] + \ln C_1 = \ln\left[\left(a(x)\cdot c(x)\right)^{-\frac{1}{4}} * C\right].$$ Здесь C_2, C_1, C – положительные постоянные. Отсюда $S(x) = C * \sqrt[4]{\frac{1}{a(x)\cdot c(x)}}$, определим постоянную *C*.

$$S(o) = C\sqrt[4]{\frac{1}{a(o)\cdot c(o)}} = r_o \cdot \frac{c(o)}{a(o)};$$ Отсюда

$$C = r_o \frac{c(o)}{a(o)} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{a(o)\cdot c(o)}}} = r_o \cdot \frac{c(o)}{a(o)} \cdot \sqrt[4]{a(o)\cdot c(o)}.$$ Тогда

$$S(x) = r_0 \frac{c(o)}{a(o)} * \sqrt[4]{\frac{a(o)\cdot c(o)}{a(x)\cdot c(x)}}, \qquad (9)$$

3. Конечно-разностное решение.

Теорема. Пусть для функции $f(t) \in C^4[0,T]$ существует решение обратной задачи (1)-(3) удовлетворяющее условию (4) и пусть решение прямой задачи (1)-(2) $u(x,t) \in C^4(\Delta(t))$. Тогда при малом T приближенное решение обратной задачи, построенной конечно-разностным методом, сходится к точному обратной задачи в классе C со скоростью порядка $O(h)$.

Доказательство. Введем сеточную область

$$\Delta_h(T) = \{x_1 = ih, t_k = kh, (ih, kh: h = T/2N,\ ih \in (0, T/2),\ i = \overline{1,N},\ ih \le kh \le T - ih\} \qquad (10)$$

где h – сеточный шаг по x,t.

Используя конечно-разностные обозначения, составим разностную схему для обратной задачи (8)

$$\left.\begin{aligned} &u_{\bar{t}t}(ih,kh) = u_{xx}(ih,kh) - 2\frac{S_{0\bar{x}}(ih)}{\frac{S_i + S_{i-2}}{2}} \cdot u_{0\bar{x}}(ih,kh) + O(h),\ (ih,kh) \in \Delta_h(T),\ u_i^i = S_i,\ i = \overline{0,N} \\ &u_i^i = S_i,\ i = \overline{0,N} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$u_0^k = f^k,\ k = \overline{0,2N}. \qquad (12)$$

Исследуем в начале сходимости обратной задачи (11)-(12) к точному решению обратной задачи (8). Для этого распишем разностное уравнение

$$u_{i+1}^k = u_i^{k+1} + u_i^{k-1} - u_{i-1}^k + h^2 B_i^k,$$

$$\text{где } B_i^k = \frac{S_i - S_{i-2}}{h^2} \cdot \frac{4}{S_i + S_{i-2}} \cdot \left(u_i^k - u_{i-2}^k\right). \qquad (13)$$

Последовательно подставляя в правую часть последнего уравнения выражения u_i^{k+1}, u_i^{k-1}, u_{i-1}^{k-2}, получим

$$u_{i+1}^k = \frac{1}{2}\left[f^{k+i+1} + f^{k-i-1}\right] + h^2 \sum_{\rho=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\rho} B_\mu^{k-i-\mu+2\rho}. \qquad (14)$$

Полагая в (14) $k=i+1$ и учитывая вторую формулу (11) получим

$$S_{i+1} = \frac{1}{2}\left[f^{2i+2} + f^0\right] + h^2 \sum_{\rho=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{\rho} B_\mu^{1-\mu+2\rho}. \qquad (15)$$

Из (14) следует

$$u_i^k = \frac{1}{2}\left(f^{k+i} + f^{k-i}\right) + h^2 \sum_{\rho=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{\rho} B_k^{k-i-\mu+2\rho+1} . \tag{16}$$

$$u_{i-2}^k = \frac{1}{2}\left(f^{k+i-2} + f^{k-i+2}\right) + h^2 \sum_{\rho=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^{\rho} B_\mu^{k-i-\mu+2\rho+3} . \tag{17}$$

Откуда

$$\frac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} = \frac{1}{2h}\left(f^{k+i} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}\right) + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{k-i-\mu+1} + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{k+i-\mu-1} , \tag{18}$$

а из (16) и (17) следует

$$S_i = \frac{1}{2}\left[f^{2i} + f^0\right] + h^2 \sum_{\rho=1}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{\rho} B_\mu^{1-\mu+2\rho} , \tag{19}$$

$$S_{i-2} = \frac{1}{2}\left[f^{2i-4} + f^0\right] + h^2 \sum_{\rho=1}^{i-3} \sum_{\mu=1}^{\rho} B_\mu^{1-\mu+2\rho} . \tag{20}$$

Следовательно,

$$\frac{S_i - S_{i-2}}{h} = \frac{1}{2h}\left(f^{2i} - f^{2i-4}\right) + h\sum_{\mu=1}^{i-1} B_\mu^{2i-\mu-1} + h\sum_{\mu=1}^{i-3} B_\mu^{2i-\mu-3} . \tag{21}$$

Введем следующие обозначения

$$F_i^k = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} f^{k+1} + f^{k-i} \\ \frac{1}{h}(f^{k+1} - f^{k+i-2} + f^{k-i} + f^{k-i+2}) \\ f^{2i} + f^0 \\ \frac{1}{h}(f^{2i} - f^{2i-4}) \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\Phi_i^k = \begin{pmatrix} u_i^k \\ \dfrac{u_i^k - u_{i-2}^k}{h} \\ S_i \\ \dfrac{S_i - S_{i-2}}{h} \end{pmatrix} \tag{23}$$

и введем оперативное выражение

$$A\left[\Phi_p^k\right] = \begin{pmatrix} h\sum_{\mu=1}^{p} B_k^{k-i-\mu+2p+1} \\ B_p^{k-i+p+1} + B_p^{k+i-\mu-1} \\ h\sum_{\mu=1}^{p} B_\mu^{1-\mu+2p} \\ B_p^{2i-p-1} + B_{p-1}^{2i-p-2} - B_o^{2i-3} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Тогда из (16), (18), (19), (21) следует

$$\Phi_i^k = F_i^k + h\sum_{p=1}^{i-1} A\left[\Phi_p^k\right]. \tag{25}$$

(25) является нелинейной замкнутой системой разностных уравнений. Из (25), используя дискретный аналог Гронуолла-Беллмана. Определяя *S(x)* определим *a(x)* по формуле (9), затем определим плотность функции $\rho_0(x_3)$ по известной *a(x)*.

Список литературы

1. Артемьев А.Е. Физические основы сейсморазведки. – Саратов: ООО «ИЦ Наука», 2012г.-56 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство. 2009г. – 457с.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. – М.: Наука, 1984г. – 264 с.
4. Саверенский Е.Ф. Сейсмические волны. - М.: Недра, 1972г. - 293 с.
5. Сатыбаев А.Дж. Алгоритм решения двумерно-линеаризованной обратной задачи сейсмики //Вопросы функционально-дифференциальных уравнений.– Ош: ОВК, 1999г.- С.41-46.