

У.Н. Бримкулов

**КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА ИЗМЕРЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ МАРКОВСКИХ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Монография

Москва
2018

УДК 519.6: 519.2

ББК

Б87

Рецензенты:

Омуралиев А.С. — доктор физико-математических наук, профессор;

Укуев Б.Т. — доктор технических наук.

Бримкулов У.Н.

Б87

Ковариационная матрица измерений в задачах экспериментального исследования марковских случайных процессов: монография. — М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2018. — 290 с.

ISBN 978-5-91327-540-0

DOI 10.17513/np.322

В книге рассмотрены особенности ковариационной матрицы измерений марковских процессов. Исследованы ковариационные матрицы простого (односвязного), сложного (многосвязного) и векторного процессов. Введено понятие ковариационно марковского процесса (КМ-процесса), в котором условие марковости накладывается на вид ковариационной функции процесса. Введение понятия КМ-процесса дает возможность построить достаточно простые процедуры линейного оценивания характеристик для широкого класса процессов, не являющихся марковскими в обычном смысле, но широко используемые в практике инженерных исследований.

Найдены структуры ковариационной матрицы измерений для измерений упорядоченных и неупорядоченных в порядке возрастания координат точек измерений. Это позволило построить весьма простые процедуры рекуррентного оценивания для задач фильтрации и идентификации КМ-процессов.

Предложен метод дискретной аппроксимации немарковских процессов многосвязными марковскими процессами. Рассматриваются вопросы планирования эксперимента для задач оценивания КМ-процессов. Приведены примеры применения полученных результатов для решения некоторых практических задач.

В приложениях приведены краткие сведения из матричной алгебры, примеры одно-, дву-, трех- и многомерных КМ-процессов, доказательства некоторых теорем и утверждений и формулы рекуррентного обращения матриц, рассмотренных в книге.

ISBN 978-5-91327-540-0

© Бримкулов У.Н., 2018

© ИД «Академия Естествознания»

© АНО «Академия Естествознания»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ	16
1.1. Некоторые сведения из корреляционной теории случайных процессов.....	16
1.2. Задачи анализа случайных процессов на основе экспериментальных данных.....	22
1.3. Методы оценивания. Обобщенный метод наименьших квадратов	24
1.4. Оптимальная линейная фильтрация и интерполяция случайного процесса.....	30
1.5. Постановка задачи планирования эксперимента для оценивания характеристик случайных процессов.....	35
Выводы по главе	39
2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И АППРОКСИМАЦИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВСКИМИ.....	40
2.1. Марковские процессы в узком смысле.....	41
2.2. Марковские процессы в широком смысле и ковариационные марковские процессы (КМ-процессы).....	43
2.3. Марковские процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений	50
2.4. Анализ компонент векторного марковского процесса.....	52
2.5. Марковские процессы как модели реальных случайных процессов и аппроксимация немарковских процессов марковскими	57
Выводы по главе	62
3. ТИПОВЫЕ МАРКОВСКИЕ И КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ.....	64
3.1. Одномерные марковские и соответствующие им КМ-процессы	64
3.2. Двумерные марковские процессы, их компоненты и соответствующие им КМ-процессы	71
3.3. Некоторые трехмерные и многомерные (m -мерные) марковские и КМ-процессы	85
Выводы по главе	89

4.	КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОСТЫХ КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (КМ-ПРОЦЕССОВ)	91
4.1.	Постановка задачи	91
4.2.	Некоторые предварительные результаты	94
4.3.	Ковариационная матрица измерений КМ-процесса	97
4.4.	Рекуррентные процедуры оценивания	100
4.5.	Примеры ковариационных матриц КМ-процессов и их обращение	103
	Связь с известными результатами и выводы по главе	110
5.	КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (КМ-ПРОЦЕССОВ)	113
5.1.	Некоторые предварительные результаты	114
5.2.	Приведение квадратной матрицы общего вида к матрице вида A_n^m . Алгоритм обращения матриц вида A_n^m	122
5.3.	Ковариационная функция и ковариационная матрица измерений m -связного КМ-процесса	125
5.4.	Рекуррентное оценивание m -связных КМ-процессов по измерениям в точках упорядоченных планов	129
5.5.	Дискретная аппроксимация случайных процессов m -связными КМ-процессами (КМ-аппроксимация)	132
5.6.	Численное исследование точности КМ-аппроксимации в задаче параметрической идентификации математического ожидания процесса	136
	Выводы по главе	143
6.	КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ И КОМПОНЕНТ ВЕКТОРНЫХ КМ-ПРОЦЕССОВ	145
6.1.	Оптимальные оценки в задачах фильтрации векторных случайных процессов (схема обработки 1)	145
6.2.	Оптимальные оценки в задачах фильтрации векторных марковских процессов (схема обработки 2)	155
6.3.	Ковариационная функция и ковариационная матрица измерений векторного КМ-процесса	159
6.4.	Ковариационная матрица измерений векторного КМ-процесса в точках плана общего вида. Эффективность использования оценок в задачах с КМ-процессами	166
6.5.	Рекуррентные процедуры	171
6.6.	Примеры	173

6.7.	Обзор некоторых новых работ, связанных с трехдиагональными, ленточными и блочно-ленточными матрицами и марковской аппроксимацией немарковских процессов	191
	Выводы по главе 6 и общий вывод по главам 4–6	193
7.	ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ	195
7.1.	Постановка задачи планирования эксперимента при фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов.....	196
7.2.	Численные процедуры планирования эксперимента	200
7.3.	Рекуррентные формулы вычисления оценок и дисперсий	204
7.4.	Особенности применения численных процедур планирования для КМ-процессов	207
	Выводы по главе	213
8.	ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ	215
8.1.	Лазерная доплеровская анемометрия	215
8.2.	Принцип действия ЛДА	216
8.3.	Статистические характеристики и модели полезных сигналов и шумов ЛДА.....	218
8.4.	Марковская аппроксимация сигналов ЛДА.....	225
8.5.	Разработка АСНИ голографических экспериментов.....	227
8.6.	Экспериментальное определение параметров хроматографических пиков	231
	Выводы по главе	234
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	235
	ЛИТЕРАТУРА	238
	Приложение 1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ.....	254
	Приложение 2. ПРИМЕРЫ ОДНО-, ДВУ-, ТРЕХ- И МНОГОМЕРНЫХ КМ-ПРОЦЕССОВ	258
	А. Одномерные КМ-процессы	258
	Б. Двумерные КМ-процессы и их компоненты	259
	В. Трехмерные КМ-процессы	263
	Г. Многомерные КМ-процессы	265
	Приложение 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ И УТВЕРЖДЕНИЙ.....	266
	Приложение 4. РЕКУРРЕНТНОЕ ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ ВИДА \tilde{A}_n^1 И КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ (КМИ) \tilde{K}_n^1 ПРОСТОГО КМ-ПРОЦЕССА.....	276

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, рассматриваемые в настоящей книге, связаны с анализом и разработкой методов оценивания характеристик случайных полей и процессов по экспериментальным данным, в частности, рассмотрены задачи фильтрации и идентификации случайных процессов.

В работе подробно рассматриваются характеристики, способы задания и классы случайных процессов (полей), а также формулируются задачи исследования случайных процессов и методы их решения. Приводятся решения этих задач для многих известных классов случайных процессов и различных областей применения.

Одним из широко известных классов случайных процессов являются Марковские процессы. Марковские процессы представляют собой один из наиболее удобных для решения практических задач моделей реальных случайных сигналов и процессов. Поэтому теоретическим вопросам и практическим задачам, связанным с Марковскими процессами, посвящено большое количество монографий, обзоров и т.д. Здесь надо отметить работы Андерсона Б.Д.О., Дуба Дж., Казакова В.А., Куликова Е.И., Левина Б.Р., Пугачева В.С., Розанова Ю.А., Сарымсакова Т.А., Синицына И.Н., Сосулина Ю.Г., Стратоновича Р.Л., Тихонова В.И., Хида Е. и многих других (см. например, [1, 3–7, 12, 13, 21, 22, 27, 29, 32–40, 114–116, 160–162, 165, 166, 170, 174, 176, 185, 186]).

В этих работах подробно рассматриваются теоретические основы и формулируются задачи исследования Марковских процессов, приводятся примеры физических процессов и систем, которые наиболее удобно описывать с помощью Марковских моделей. Большое внимание уделяется Марковским процессам, задаваемым с помощью систем стохастических уравнений. Здесь надо отметить, что недостаточное внимание уделяется рассмотрению Марковских процессов в рамках корреляционной теории случайных процессов, когда Марковский процесс задается первыми двумя моментными функциями или только ковариационной функцией [1, 4, 8, 15].

Широкое использование разнообразных экспериментальных методов исследования вызвало появление такого научного направления как *теория планирования эксперимента*, основной задачей которого является разработка методов повышения эффективности экспериментальных исследований (минимизации затрат времени и средств на эксперимент, повышение статистической точности и достоверности получаемых результатов и т.п.). Основателем теории планирования эксперимента

считается английский статистик Р. Фишер [216]. Среди зарубежных ученых, внесших большой вклад в теорию планирования эксперимента можно назвать американских ученых Дж. Бокса и Дж. Кифера, которые в 50-х годах 20-го столетия опубликовали ряд основополагающих работ по планированию эксперимента (см. например, [169, 214, 215]). Боксу принадлежат результаты по планированию регрессионного эксперимента для полиномиальных функций регрессии, планированию экстремальных экспериментов, выбору критериев оптимальности. Работы Кифера лежат в основе классической теории планирования регрессионного эксперимента — наиболее развитого в настоящее время раздела теории оптимального эксперимента.

Важным направлением в теории планирования эксперимента являются вопросы построения оптимальных планов по оцениванию характеристик случайных полей и процессов. Впервые такая постановка задачи планирования эксперимента была сделана в работах американских ученых Сакса и Илвисейкера [181] в 1966 г. Эти работы получили широкое развитие (см. например, [31, 111–118, 203]).

Задачи и методы оценивания случайных процессов и полей

Большинство задач математической статистики, в том числе задачи статистики случайных процессов (регрессионный анализ, параметрическая идентификация, фильтрация случайных процессов и т.п.), сводятся к нахождению оценок неизвестных характеристик (параметров, значений) случайной величины или случайного процесса по наблюдениям реализации случайной величины или случайного процесса в заданной области. Среди многих методов оценивания (метод моментов, метод максимума правдоподобия, байесовский и минимаксный методы и т.д.) одним из широко известных и распространенных является **метод наименьших квадратов (МНК)** (см. например, [23–25, 47–51, 54–62, 64–68, 103]).

МНК один из старейших и широко применяемых на практике методов оценивания. Его использовал Лежандр в 1805 г., широко известно также использование этого метода Гауссом в 1809 г. (по некоторым источникам в 1795 г.). МНК позволяет решать задачи аппроксимации наблюдений моделью в виде заданной системы функций с неизвестными параметрами. При этом подбираются такие значения параметров, которые минимизируют сумму квадратов отклонений предсказанных по модели значений от наблюдаемых. В случае независимых наблюдений с аддитивной помехой и равными дисперсиями оценки МНК являются наилучшими для линейных по параметрам моделей в классе линейных несмещенных оценок, независимо от закона распределения наблюдений.

Для вычисления МНК-оценок не требуется никакой априорной информации о статистических свойствах наблюдений. Это является одним из главных преимуществ метода, обусловившим его широкое распространение в практике инженерных исследований. Это же позволяет использовать его для решения не только статистических, но и чисто детерминированных задач, например, для аппроксимации значений одной функции другой функцией или системой функций. В то же время, это важное достоинство метода является и его недостатком. Вычислительная схема метода не позволяет использовать имеющуюся априорную информацию о статистических свойствах наблюдений. Например, в случае коррелированных наблюдений оценки МНК оказываются неэффективными, а при определенных условиях смещенными и несостоятельными. В то же время метод не позволяет использовать информацию о коррелированности наблюдений, если она даже известна экспериментатору.

Развитием МНК является *обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК)*, в котором для получения оценок с заданными свойствами вводится весовая матрица наблюдений. Это позволяет путем выбора соответствующей весовой матрицы получать оценки, удовлетворяющие тем или иным требованиям. Обычно в качестве критерия выбора весовой матрицы используется точность получаемых при этом оценок. Так, например, если наблюдения коррелированы друг с другом, ковариационная матрица наблюдений известна и в качестве весовой выбирается матрица, обратная ковариационной, то оценки ОМНК совпадают с наилучшими линейными несмещенными оценками в классе линейных несмещенных оценок и линейных моделей [23, 48, 67].

Таким образом, при решении задач статистики случайных процессов в рамках корреляционной теории в качестве НЛНО можно использовать оценки ОМНК с такой весовой матрицей для линейных задач. Оценки МНК являются частным случаем оценок ОМНК при единичной весовой матрице.

В книге представлены следующие результаты, исследованные автором.

1. Дано определение нового класса случайных процессов – *ковариационно Марковских процессов* (далее – КМ-процессов), для которых условие марковости накладывается на вид ковариационной функции процесса. Класс КМ-процессов в общем случае не совпадает с классом обычных Марковских процессов и Марковских процессов в широком смысле (в определении Дуба [1]). Но для нормальных процессов с нулевым средним понятия Марковский процесс, Марковский процесс в широком смысле и КМ-процесс имеют одинаковый смысл. Понятия КМ-процесс и Марковский процесс в широком смысле совпадают для процессов с нулевым средним, независимо от вида распределения.

2. Описан и классифицирован ряд одномерных, двумерных и многомерных КМ-процессов, широко используемых в практике инженерных исследований в качестве моделей реальных случайных процессов.

3. Получен один из видов матриц, обращение которых приводит к трехдиагональным матрицам. Получены простые формулы вычисления элементов обратной матрицы через элементы трех центральных диагоналей прямой матрицы. Показано, что подмножество положительно определенных матриц этого класса представляет собой класс ковариационных матриц одномерных КМ-процессов для наблюдений, упорядоченных в порядке возрастания (убывания) координат точек измерений. Таким образом, для КМ-процессов достаточно просто решаются задачи фильтрации и идентификации.

4. Используя хорошо известные результаты с матрицами перестановок показано, что ковариационную матрицу неупорядоченных наблюдений одномерного КМ-процесса можно получить путем умножения ковариационной матрицы упорядоченных наблюдений этого же процесса на соответствующую матрицу перестановки. При этом обратная матрица получается разреженной с числом ненулевых элементов не превышающим $3n - 2$, где n – порядок матрицы.

5. Найден класс матриц, обращение которых приводит к ленточным матрицам с заданной полушириной ленты m и предложен простой рекуррентный алгоритм обращения матриц из этого класса, более эффективный по сравнению со стандартными процедурами обращения матриц. Такие матрицы полностью определяются элементами, лежащими внутри ленты полушириной m . Показано, что подмножество положительно определенных матриц этого класса можно считать классом ковариационных упорядоченных наблюдений многосвязных КМ-процессов.

6. Рассмотрен метод дискретной аппроксимации немарковских процессов m -связными КМ-процессами, который заключается в замене ковариационной матрицы упорядоченных наблюдений произвольного случайного процесса ковариационной матрицей упорядоченных наблюдений многосвязного КМ-процесса. Точность такой аппроксимации повышается с увеличением связности m аппроксимирующего КМ-процесса и при m , равном $n - 1$, становится абсолютно точной. На практике всегда можно найти такое значение связности m аппроксимирующего КМ-процесса, при котором обеспечивается заданный компромисс между точностью получаемых оценок и трудоемкостью их вычисления.

7. Показано, что если ковариационную матрицу наблюдений векторного КМ-процесса представить в виде блочной матрицы, каждый блок которой есть значение матричной ковариационной функции векторного процесса

в заданных точках, то обратная к ней матрица будет иметь блочно-тредиагональную структуру. Получены формулы вычисления подматриц (блоков) обратной матрицы через подматрицы, наннзанные на три центральные диагонали прямой блочной матрицы. Найден вид матрицы перестановки, с помощью которой ковариационную наблюдений векторного случайного процесса, разбитую на блоки указанным способом, можно привести к блочной матрице, блоки которой соответствуют ковариационным матрицам наблюдений составляющих векторного случайного процесса.

8. Получены простые рекуррентные формулы вычисления ОМНК-оценок с ленточными весовыми матрицами, применимые для задач линейной фильтрации и идентификации КМ-процессов (для которых они являются НЛНО) и произвольных процессов путем их аппроксимации КМ-процессами соответствующей связности (при этом получаемые оценки будут квазиоптимальными).

9. Проанализированы особенности планирования эксперимента в задачах с Марковскими процессами и предложен метод модификации известных численных процедур построения последовательных и точных планов, учитывающий особенности ковариационной матрицы наблюдений КМ-процесса. При этом вычислительная сложность процедур резко снижается (относительно процедур для процессов общего вида). Это делает возможным синтез планов с большим числом точек и численное построение оптимальных плотностей расположения точек измерений в заданной области. Все сказанное касается и процессов, аппроксимируемых КМ-процессами.

Области применения результатов

Результаты работы могут быть использованы в любых задачах статистики случайных процессов на основе конечного множества дискретных наблюдений, в которых вероятностные свойства процесса полностью определяются заданием ковариационной матрицы значений процесса в точках наблюдений (ковариационной матрицы наблюдений). Что касается вопросов внедрения результатов работы, то здесь автору хотелось бы вначале привести с некоторыми сокращениями следующую цитату (см. В.С. Пугачев, И.Н. Синицын [4]), к которой он полностью присоединяется.

«Современная теория стохастических систем располагает мощными методами для исследования процессов в этих системах. Однако эти методы находят пока лишь ограниченное применение, так как они сложны и требуют громоздких вычислений, особенно в случае систем высокой размерности. Впрочем, вопросы ограниченности практических применений относятся не только к теории стохастических систем, но и вообще ко всей математике. Современный прогресс в области вычислительной техники и информатики

делает математические методы потенциально применимыми буквально во всех областях человеческой деятельности. Однако для практического применения математических методов необходимы глубокие знания в области математики, в частности, для практического применения методов теории стохастических систем необходима достаточно хорошая подготовка в этой области. Такая подготовка, естественно, отсутствует у большинства специалистов в областях науки и отраслях народного хозяйства, не связанных в своей практической деятельности с математикой. Предполагать, что какая-то часть этих специалистов может, отложив на время свою обычную работу, выучить соответствующие разделы математики, нельзя.

Таким образом, единственный способ обеспечить широкое применение математических методов во всех отраслях науки и отраслях народного хозяйства — создание такого интеллектуализированного программного обеспечения для ЭВМ массового применения (в первую очередь, для персональных ЭВМ), которое позволит специалистам в различных областях, не имеющих специальной математической подготовки в области программирования, пользоваться математическими методами для решения задач, возникающих в их практической деятельности. Только создание такого программного обеспечения позволит широко внедрить математические методы теории стохастических систем в практику».

Полученные теоретические результаты были использованы для разработки алгоритмов и программ, позволяющих обрабатывать наблюдения случайных процессов путем их аппроксимации КМ-процессами. С этой целью разработан пакет подпрограмм, включающий в себя подпрограмму обращения ковариационной матрицы наблюдений КМ-процесса произвольной связности, подпрограммы работы с ленточными матрицами (вывод на печать, умножение, сложение, преобразование из одной формы хранения в другую и т.п.), подпрограмму вычисления значений типовых ковариационных функций (в том числе, компонент одно-, двух- и трехмерных КМ-процессов). С помощью этих подпрограмм модифицированная библиотека прикладных программ СТАНС (см. [118, 150]), предназначенная для планирования и анализа экспериментов в задачах исследования стохастических объектов и полей.

Структура и особенности изложения книги

Книга состоит из введения, 8 глав, заключения, списка использованной литературы и 4 приложений. Формулы, рисунки, теоремы и т.д. имеют единую нумерацию в пределах главы и приложения (первое число — номер главы, второе — порядковый номер формулы, рисунка и т.д. внутри главы).

В *первой главе* излагаются основные сведения из корреляционной теории случайных процессов и теории оценивания, на которые опираются результаты работы. Рассматриваются аспекты применения обобщенного метода наименьших квадратов для решения задач статистики случайных процессов, связанных с оцениванием характеристик (параметров, значений) случайных процессов. Показано, что вычисление ОМНК-оценок для этих задач наталкивается на ряд вычислительных трудностей. На основе анализа этих трудностей ставится задача поиска класса(ов) случайных процессов, для которых нахождение ОМНК-оценок существенно упрощается. Формулируется задача планирования эксперимента по оцениванию характеристик случайных процессов и ставится задача поиска эффективных процедур численного планирования эксперимента для найденного класса процессов.

Вторая глава посвящена Марковским процессам. Приводятся классические определения и способы задания простых (одномерных), m -связных и векторных (многомерных) Марковских процессов. На основе их анализа делается вывод, что они не совсем удовлетворяют поставленным целям работы и вводятся понятия простых, m -связных и векторных ковариационно Марковских процессов (КМ-процессов). Рассматриваются Марковские процессы, определяемые *стохастическими дифференциальными уравнениями* (СДУ) и их связь с КМ-процессами. Анализируются свойства отдельных компонент и связей между ними для Марковского процесса, заданного векторным СДУ и выделяются несколько важных частных случаев векторного СДУ. Исследуются возможности использования Марковских процессов в качестве моделей реальных процессов и сигналов. Приводятся примеры физических систем, сигналы на выходе которых удобно интерпретировать как Марковские или компоненты векторных Марковских процессов. Рассматриваются возможные способы аппроксимации немарковских процессов Марковскими.

Глава 3 полностью посвящена описанию Марковских и соответствующих им КМ-процессов, которые нашли широкое применение в практике научных и инженерных исследований, а также используются в примерах последующих глав. Рассматриваются Марковские процессы, представляющие собой решение линейного СДУ первого порядка, в частности винеровский процесс, нормальный Марковский процесс и т.д. Большое внимание уделено двумерным Марковским процессам, определяемым СДУ 2-го порядка. Показывается, что первые компоненты таких двумерных процессов, которые могут быть немарковскими, широко используются для описания реальных процессов в статистической теории связи, теории автоматического управления, в метеорологии, гидрологии

и других важных приложениях. Также приводятся примеры простейших трехмерных и многомерных Марковских процессов.

В *четвертой главе* излагаются основные теоретические результаты, связанные с особенностями структуры ковариационной матрицы измерений простых (одномерных, односвязных) КМ-процессов. Наиболее важные результаты формулируются в виде теорем, следствий и замечаний к ним. В процессе решения основной задачи находятся новые виды матриц, обратные к которым являются *трехдиагональными* или *разреженными* матрицами. Выводятся простые формулы вычисления ненулевых элементов обратных матриц для этих матриц. При этом для упорядоченных наблюдений обратная ковариационная матрица является трехдиагональной, а для неупорядоченных — разреженной. Выводятся рекуррентные формулы вычисления оптимальных ОМНК-оценок для задач линейной фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов и показывается как упрощается их вычисление для простых КМ-процессов. В последнем разделе главы приводятся примеры, иллюстрирующие справедливость полученных результатов.

В *главе 5* результаты четвертой главы обобщаются на m -связные скалярные КМ-процессы. Находится вид матрицы, обратная к которой является ленточной матрицей с заданной шириной ленты. Предлагается простой алгоритм рекуррентного обращения таких матриц, позволяющий исключить заведомо ненужные операции. Получен общий вид ковариационной матрицы наблюдений m -связного КМ-процесса. Находятся условия, которым должна удовлетворять ковариационная функция 2- и 3-связного КМ-процесса. Полученные в главе 4 формулы рекуррентного ОМНК-оценивания простых КМ-процессов обобщаются на m -связные КМ-процессы. Предлагается способ дискретной аппроксимации немарковских процессов m -связными КМ-процессами, который заключается в замене ковариационной матрицы наблюдений немарковского процесса одноименной матрицей КМ-процесса заданной связности. При этом точность аппроксимации повышается с увеличением связности m аппроксимирующего КМ-процесса и становится абсолютно точной при $m = n - 1$. На основе большого числа экспериментов с широко распространенными процессами, полиномиальными и гауссовскими моделями математического ожидания процесса показывается возможность и эффективность такой замены для снижения трудоемкости вычисления ОМНК-оценок.

В *шестой главе* рассматриваются задачи оценивания характеристик векторных процессов общего вида и КМ-процессов или отдельных их компонент. Подробно описываются две схемы нахождения оптимальных ОМНК-оценок (другими словами — НЛНО) для задачи линейной

фильтрации векторного случайного процесса с одновременной параметрической идентификацией его математического ожидания. При этом рассматриваются два способа формирования и разбиения на блоки ковариационной матрицы измерений векторного случайного процесса. Находится вид матрицы перестановки, с помощью которой можно преобразовать ковариационную матрицу из одной формы в другую. Анализируется влияние свойств отдельных компонент и связей между ними на структуру ковариационной матрицы наблюдений векторного КМ-процесса.

Находится вид ковариационной матрицы наблюдений векторного КМ-процесса для двух отмеченных способов ее формирования. Показывается, что в обоих случаях обратная матрица имеет блочно-трехдиагональную структуру, но с различным разбиением на блоки. Выводятся рекуррентные оптимальные ОМНК-оценки, учитывающие блочно-трехдиагональную структуру обратной ковариационной матрицы наблюдений векторного КМ-процесса. Исследуется эффективность использования ОМНК-оценок в задачах с Марковскими процессами. В последнем разделе главы рассматриваются примеры двумерных Марковских процессов, для которых вычисляются элементы ковариационных и обратных к ним матриц.

Седьмая глава посвящена вопросам планирования эксперимента в задачах оценивания Марковских случайных процессов. Анализируются известные численные процедуры последовательных и точных оптимальных планов для задач фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов. Показывается, как надо изменить эти процедуры, чтобы они учитывали специфику КМ-процессов. С этой целью находятся рекуррентные алгоритмы ОМНК-оценивания для измерений КМ-процесса в точках плана общего вида. Модифицированные таким образом процедуры планирования пригодны для численного построения планов с большим числом точек. Предложенный подход позволяет легко адаптировать различные численные процедуры построения планов к задачам с Марковскими процессами.

Восьмая, заключительная глава работы, посвящена вопросам практического применения теоретических результатов. Подробно рассматривается проблема автоматизации лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА). Показывается, что сигнал ЛДА является сложным нестационарным случайным процессом и корректный его анализ может быть выполнен только статистическими методами.

На основе анализа литературы по ЛДА выявлены характерные модели полезного сигнала, ковариационной функции сигнала и шумов ЛДА. На примере выборочной ковариационной функции шумов измерительного

тракта ЛДА, полученной в режиме калибровки, показывается, что выходной сигнал ЛДА можно аппроксимировать КМ-процессом с небольшой величиной связности.

Рассматривается задача создания АСНИ голографических экспериментов (ГЭ). Анализируются частные задачи, решаемые с помощью АСНИ ГЭ и выявляются задачи, при решении которых можно использовать полученные результаты для повышения эффективности экспериментальных исследований. В конце главы исследуются возможности применения КМ-аппроксимации при исследовании сигналов на выходе хроматографов.

В *заключении* приводятся общие выводы, подчеркивается значимость полученных результатов для развития таких перспективных разделов математической статистики и теории случайных процессов, как теория оценивания и теория Марковских процессов.

В *приложении* вынесены многие полезные результаты в области матричной алгебры, полученные автором в процессе решения основной задачи и не вошедшие в основной текст диссертации, доказательства теорем, документы и материалы об использовании результатов работы при решении различных прикладных задач, внедрений результатов в учебный процесс в ряде вузов страны и другие материалы.

В *приложении 1* приведены краткие сведения из матричной алгебры, на которые опираются результаты работы.

В *приложении 2* приведена сводка одномерных, двумерных и трехмерных КМ-процессов.

В *приложении 3* вынесены наиболее длинные доказательства теорем.

В *приложении 4* находятся формулы рекуррентного обращения матриц A_n^1 и \tilde{A}_n^1 найденных в главе 4. Приводится пример обращения матрицы вида \tilde{A}_n^1 .

1. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА И ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ

В главе кратко излагаются основные положения корреляционной теории случайных процессов (полей) и теории построения оценок, которые используются в работе. Формулируются основные задачи статистики случайных процессов, сводящиеся к оцениванию тех или иных характеристик или значений случайного процесса. Рассматривается дискретный обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) и возможности его применения для задач статистики случайных процессов. Формулируется задача поиска класса(ов) процессов, для которых вычисление ОМНК-оценок можно упростить за счет учета ковариационной структуры процесса (структуры ковариационной матрицы наблюдений процесса). Рассматриваются вопросы оптимальной линейной интерполяции, экстраполяции и фильтрации случайных процессов. Приводится постановка задачи планирования эксперимента, проводимого с целью оценивания статистических характеристик случайного процесса.

Ряд определений и результатов матричной алгебры, на которые опираются результаты работы, приведены в приложении 1.

1.1. Некоторые сведения из корреляционной теории случайных процессов

Поведение большого числа экспериментально исследуемых стохастических объектов (как статических, так и динамических) может быть описано в терминах случайных полей и процессов. Случайный характер функционирования таких объектов объясняется как внутренней стохастичностью явлений, происходящих в объекте, так и внешним воздействием на объект случайных возмущений и наличием случайных ошибок измерения координат объекта. При этом экспериментальное определение соответствующих характеристик случайных полей и процессов позволяет получать математическое описание исследуемых объектов с целью дальнейшего прогнозирования их поведения и управления ими. Очевидно, что качество прогнозирования и управления в значительной мере зависит от точности определения характеристик случайных полей и процессов.

Под *случайным полем* в работе понимается случайная функция нескольких независимых переменных [1–17]. Если случайная функция

зависит только от одной переменной, интерпретируемой обычно как время, то ее обычно называют *случайным процессом*. Так как основные результаты, полученные в работе, относятся к скалярным и векторным случайным функциям скалярной независимой переменной, то в дальнейшем везде будет использоваться термин случайный процесс. Однако все, что излагается в данной главе (и в других главах, исключая результаты, применимые только к Марковским процессам), относится в равной мере и к случайным функциям векторного аргумента, т.е. случайным полям.

Можно привести множество примеров реальных физических процессов, для изучения которых наиболее удобно использовать аппарат теории случайных процессов и полей. Некоторые из таких процессов, рассмотрены в последующих главах диссертации, и мы не будем на них здесь останавливаться. Ниже дается только краткое изложение основных положений теории вещественных случайных процессов, на которые опираются результаты, полученные в работе.

Наиболее полно случайный процесс может быть охарактеризован заданием n -мерных функций распределения его значений в произвольных точках t_1, t_2, \dots, t_n при любом n , либо соответствующих характеристических функций или плотностей вероятностей [3–5]. Мы будем рассматривать задачу в рамках *корреляционной теории случайных процессов*¹ (см. например, [8–15]), когда случайный процесс $Z(t)$ задается двумя первыми моментными функциями, чаще всего это математическое ожидание $\eta_z(t)$ и ковариационная функция $k_z(s, t)$, определяемые следующим образом:

$$\eta_z(t) = EZ(t) \quad (1.1)$$

и
$$k_z(s, t) = E[Z(s) - EZ(s)][Z(t) - EZ(t)], s, t \in T, \quad (1.2)$$

где E – оператор математического ожидания; T – область задания случайного процесса.

При $s = t$ выражение (1.2) определяет дисперсию процесса $Z(t)$:

$$\sigma_z^2(t) = k_z(t, t) = E[Z(t) - EZ(t)]^2. \quad (1.3)$$

Наряду с ковариационной функцией часто используют нормированную ковариационную (корреляционную) функцию процесса $Z(t)$

$$\rho_z(s, t) = \frac{k_z(s, t)}{\sigma_z(s)\sigma_z(t)} \quad (1.4)$$

¹ В работе [4] под корреляционной теорией случайных процессов понимается раздел теории случайных процессов, рассматривающий классы процессов, для которых определены операции математического анализа, основанные на понятии среднеквадратической сходимости.

Для двух случайных процессов $Z(t)$ и $Y(t)$ наряду с функциями $k_z(s, t)$, $k_y(s, t)$, $\rho_z(s, t)$, $\rho_y(s, t)$ можно определить также взаимные ковариационные функции

$$k_{zy}(s, t) = E[Z(s) - EZ(s)][Y(t) - EY(t)], \quad (1.5)$$

$$k_{yz}(s, t) = E[Y(s) - EY(s)][Z(t) - EZ(t)] \quad (1.6)$$

и их нормированные аналоги

$$\rho_{zy}(s, t) = k_{zy}(s, t) / \sigma_z(s) \sigma_y(t); \quad (1.7)$$

$$\rho_{yz}(s, t) = k_{yz}(s, t) / \sigma_y(s) \sigma_z(t). \quad (1.8)$$

Нетрудно видеть, что

$$k_{zy}(s, t) = k_{yz}(t, s); \quad \rho_{zy}(s, t) = \rho_{yz}(t, s). \quad (1.9)$$

Заметим, что с учетом (1.1) любой случайный процесс $Z(t)$ можно всегда представить в виде

$$Z(t) = \eta(t) + \xi(t), \quad (1.10)$$

где $\eta(t)$ — детерминированный процесс ($\eta_z(t) = EZ(t)$); $\xi(t)$ — центрированный (чисто случайный) процесс с $k_\xi(s, t) = k_z(s, t)$.

Ковариационная функция представляет собой центральный момент второго порядка случайного процесса. Нами далее будет использоваться также начальный момент второго порядка, определяемый выражением

$$r_z(s, t) = EZ(s)Z(t), \quad s, t \in T \quad (1.11)$$

и взаимные начальные моменты второго порядка процессов $Z(t)$ и $Y(t)$:

$$r_{zy}(s, t) = EZ(s)Y(t); \quad r_{yz}(s, t) = EY(s)Z(t). \quad (1.12)$$

Ковариационные функции и начальные моменты второго порядка (далее они будут называться *моментными функциями второго порядка*) связаны соотношениями

$$r_z(s, t) = k_z(s, t) + \eta_z(s) \eta_z(t) \quad (1.13)$$

и
$$r_{zy}(s, t) = k_{zy}(s, t) + \eta_z(s) \eta_y(t). \quad (1.14)$$

Моментные функции второго порядка обладают многими полезными свойствами ковариационных функций, в частности

$$r_{zy}(s, t) = r_{yz}(t, s). \quad (1.15)$$

Из (1.13) видно, что для процессов с нулевым математическим ожиданием функции $r(s,t)$ и $k(s,t)$ совпадают.

Пусть $\mathbf{Z}(t)$, $t \in T$ – m -мерный случайный процесс, т.е.

$$\mathbf{Z}(t) = [Z_1(t), \dots, Z_m(t)]^T.$$

Ковариационной функцией векторного случайного процесса $\mathbf{Z}(t)$ называется матрица, элементами которой служат ковариационные и взаимные ковариационные функции ее компонент

$$K_z(s,t) = \begin{bmatrix} k_{11}(s,t) & k_{12}(s,t) & \dots & k_{1m}(s,t) \\ k_{21}(s,t) & k_{22}(s,t) & \dots & k_{2m}(s,t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ k_{m1}(s,t) & k_{m2}(s,t) & \dots & k_{mm}(s,t) \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

где $k_{ij}(s,t) = E \overset{0}{Z}_i(s) \overset{0}{Z}_j(t)$; $(i, j = \overline{1, m})$, $s, t \in T$,

$$\overset{0}{Z}_i(t) = Z_i(t) - EZ_i(t) = \xi_i(t); \quad EZ_i(t) = \eta_i(t) \quad (i = \overline{1, m}).$$

Выражение (1.16) можно записать также в виде

$$K_z(s,t) = E[\mathbf{Z}(s) - EZ(s)][\mathbf{Z}(t) - EZ(t)]^T = E\Xi(s)\Xi^T(t), \quad (1.17)$$

где $\Xi(t) = \mathbf{Z}(t) - EZ(t) = \mathbf{Z}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]^T$;
 $\boldsymbol{\eta}(t) = EZ(t) = [\eta_1(t), \dots, \eta_m(t)]^T$.

Матричные взаимные ковариационные функции векторных процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ определяются следующим образом:

$$K_{zy}(s,t) = E \overset{0}{\mathbf{Z}}(s) \left[\overset{0}{\mathbf{Y}}(t) \right]^T; \quad K_{yz}(s,t) = E \overset{0}{\mathbf{Y}}(s) \left[\overset{0}{\mathbf{Z}}(t) \right]^T. \quad (1.17a)$$

В (1.17a) размерности векторов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ могут быть различными, например, m и p . При этом матрица $K_{zy}(s,t)$ будет прямоугольной матрицей размера $m \times p$.

Также определяется матричная функция второго порядка для векторного процесса $\mathbf{Z}(t)$:

$$R_z(s,t) = EZ(s)Z^T(t) \quad (1.18)$$

и матричные взаимные моментные функции второго порядка процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$:

$$R_{zy}(s,t) = EZ(s)Y^T(t); \quad R_{yz}(s,t) = EY(s)Z^T(t). \quad (1.19)$$

Моменты более высоких порядков в работе не рассматриваются.

Случайный процесс $Z(t)$ *среднеквадратически* (с.к.) *дифференцируем* тогда и только тогда, когда его моментная функция второго порядка $r_z(s, t)$ имеет непрерывную производную $\partial^2 r_z(s, t) / \partial s \partial t$ при всех $s, t \in T$:

$$r_{z'}(s, t) = \frac{\partial^2 r_z(s, t)}{\partial s \partial t} \quad (1.20)$$

Можно дать определение с.к. дифференцируемого процесса в терминах математического ожидания и ковариационной функции: случайный процесс $Z(t)$ с.к. дифференцируем тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция его математического ожидания $\eta_z(t)$ и непрерывная смешанная производная его ковариационной функции $k_z(s, t)$, $s, t \in T$.

При этом математическое ожидание и ковариационная функция с.к. производной $Z'(t)$, а также и взаимные ковариационные функции $Z(t)$ и $Z'(t)$ определяются формулами

$$\eta_{z'}(t) = EZ'(t) = \eta'_z(t), \quad (1.21)$$

$$k_{z'}(s, t) = \frac{\partial^2 k_z(s, t)}{\partial s \partial t}, \quad (1.22)$$

$$k_{z'z}(s, t) = \frac{\partial k_z(s, t)}{\partial s}; \quad k_{zz'}(s, t) = \frac{\partial k_z(s, t)}{\partial t}. \quad (1.23)$$

С.к. производные случайного процесса более высоких порядков определяются аналогично, т.е. с.к. производной порядка p случайного процесса $Z(t)$ называется с.к. производная от его с.к. производной порядка $p - 1$ ($p = 2, 3, \dots$). Из формул (1.20)–(1.23) по индукции вытекают следующие формулы

$$\eta_{z^{(p)}}(t) = EZ^{(p)}(t) = \eta_z^{(p)}(t); \quad (1.24)$$

$$k_{z^{(p)}z^{(q)}}(s, t) = \frac{\partial^{p+q} k_z(s, t)}{\partial s^p \partial t^q}; \quad (1.25)$$

$$r_{z^{(p)}z^{(q)}}(s, t) = \frac{\partial^{p+q} r_z(s, t)}{\partial s^p \partial t^q}. \quad (1.26)$$

Векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t)$ с.к. дифференцируем тогда и только тогда, когда с.к. дифференцируемы все его компоненты. При этом справедливы все формулы (1.20)–(1.26) с заменой $Z(t)$ на $\mathbf{Z}(t)$. Реализации с.к. дифференцируемой функции могут быть как дифференцируемыми, так и недифференцируемыми.

Случайные процессы (поля) можно классифицировать самым различным образом, например:

– по виду случайного процесса (стационарный, нестационарный, Марковский, немарковский, гауссовский, негауссовский, скалярный, векторный, эргодический, неэргодический и т.д.);

– по способу задания (описания) процесса (*косвенное* задание процесса с помощью n -мерных функций распределения, плотностей распределения, моментов заданного порядка и т.д.; *прямое* задание процесса с помощью систем стохастических дифференциальных уравнений, моделей скользящего среднего, авторегрессии и т.д.);

– по виду и размерности аргумента t (процессы, поля, временные ряды (случайные последовательности), непрерывные процессы, Марковские цепи и т.д.).

В работе рассматриваются стационарные и нестационарные случайные процессы (скалярные и векторные), заданные с помощью моментов первого и второго порядка (математических ожиданий, ковариационных и взаимных ковариационных функций, моментных функций второго порядка). В главах 2, 3 и 6 рассматриваются также процессы, заданные с помощью скалярных и векторных стохастических дифференциальных уравнений. Основное внимание уделяется ковариационно Марковским процессам, задаваемым в виде определенного условия на вид ковариационной функции процесса [144], а также Марковским процессам в обычном [1–13, 18–22, 33–39] и широком смысле [1, 8]. Марковским процессам в обычном, широком и ковариационном смысле посвящены главы 2 и 3 работы, поэтому мы не будем здесь на них останавливаться.

В последующих главах работы широко используются понятия винеровского процесса и белого шума. Поэтому ниже даются краткие определения этих процессов, взятые из [4].

Определение 1.1. Скалярный или векторный вещественный случайный процесс с независимыми приращениями $W(t)$, $t > 0$, называется винеровским процессом, если он удовлетворяет условиям:

- 1) все реализации $w(t)$ процесса $W(t)$ непрерывны и $w(0) = 0$;
- 2) одномерное распределение $W(t)$ нормально;
- 3) математическое ожидание $W(t)$ тождественно равно нулю, а его ковариационная функция определяется формулой

$$k_w(s, t) = \int_0^{\min(s, t)} v(\tau) d\tau, \quad (1.27)$$

где $v(t)$ – неотрицательная функция, называемая интенсивностью винеровского процесса.

Из этого определения следует, что любой винеровский процесс представляет собой нормально распределенную случайную функцию. Скалярный винеровский процесс при $v(t) \equiv 1$ называется *стандартным винеровским процессом*. Из (1.27) для стандартного винеровского процесса имеем

$$k_w(s, t) = \min(s, t). \quad (1.28)$$

Определение 1.2. Случайный процесс $N(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией, содержащей множителем δ -функцию

$$EN(t) = 0; EN(s)N(t) = k_N(s, t) = \sigma^2(t)\delta(s - t), \quad (1.29)$$

называется белым шумом. Множитель $\sigma^2(t)$ при δ -функции называется интенсивностью белого шума $\sigma^2(t) \geq 0$. Интенсивность векторного белого шума представляет собой неотрицательно определенную симметричную матрицу.

Белый шум, полученный дифференцированием процесса с независимыми приращениями, называется *белым шумом в строгом смысле*.

Белый шум, представляющий собой производную винеровского процесса, называется *нормально распределенным белым шумом*.

Белый шум постоянной интенсивности ($\sigma^2(t) = \sigma^2$) называется стационарным белым шумом. Спектральная плотность стационарного белого шума постоянна и равна $\sigma^2/2\pi$.

1.2. Задачи анализа случайных процессов на основе экспериментальных данных

Одними из основных задач, решаемых при экспериментальном исследовании случайных процессов, являются задачи оценивания (идентификации) его статистических характеристик (например, математического ожидания, ковариационной функции, функций распределения или плотностей распределения), а также задачи оценивания (восстановления, предсказания) значений самого исследуемого процесса или некоторых функционалов от него по результатам измерений (наблюдений) одной или нескольких реализаций исследуемого либо статистически связанного с ним наблюдаемого процесса. Задачи оценивания значений процесса в зависимости от их постановки делятся на задачи интерполяции, экстраполяции и, в наиболее сложном случае, фильтрации случайного процесса по данным измерений его реализации (реализаций).

Ниже мы будем называть все задачи оценивания статистических характеристик – *задачами идентификации*, а задачи оценивания значений процесса – *задачами фильтрации* случайных процессов или использовать еще более общий термин – *задачи статистики случайных процессов*.

Задачи идентификации и фильтрации случайных процессов сводятся к построению *оценок* тех или иных характеристик процесса, отвечающих заданным критериям качества. Используемые при этом методы оценивания можно условно разделить на *параметрические*, когда оцениваются неизвестные параметры модели оцениваемой характеристики и *непараметрические*, когда оцениваются значения ординат самой характеристики. Используются также гибридные методы оценивания, сочетающие в себе непараметрическое оценивание отдельных ординат оцениваемой характеристики с дальнейшей аппроксимацией их параметрической моделью.

В работе рассматриваются методы оценивания по результатам измерений одной реализации случайного процесса. В этой ситуации, как правило, предпочтительным, а во многих случаях, единственно возможным является применение *параметрических моделей* для оцениваемой характеристики и, соответственно, параметрических методов оценивания.

Пусть цель эксперимента состоит в определении математического ожидания $\eta(t)$ и (или) ковариационной функции $k(s,t)$ случайного процесса $Z(t)$ по результатам измерений одной его реализации, заданной в ограниченном интервале T . При этом в зависимости от уровня априорной информации о функциях $\eta(t)$, $k(s,t)$ и цели эксперимента возможны постановки следующих задач параметрического оценивания [30, 145].

1. Функция $\eta(t)$ известна с точностью до вектора неслучайных параметров $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$, т.е. $\eta(t) = \eta(t, \mathbf{B})$, а функция $k(s,t)$ известна полностью. Требуется найти оценки параметров \mathbf{B} . Наиболее исследованным является случай, когда $\eta(t, \mathbf{B})$ есть линейная по параметрам \mathbf{B} функция, т.е.

$$\eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t) = \sum_{i=1}^p \beta_i f_i(t), \quad (1.30)$$

где $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))^T$ – вектор известных линейно независимых в области T функций.

2. Функция $\eta(t)$ полностью известна (без ограничения общности можно положить $\eta(t) = 0$) и требуется оценить параметры \mathbf{A} функции $k(s,t) = k(s,t, \mathbf{A})$.

3. Функции $\eta(t, \mathbf{B})$ и $k(s,t, \mathbf{A})$ известны с точностью до параметров \mathbf{B} и \mathbf{A} . Необходимо найти оценки параметров \mathbf{A} , рассматривая параметры \mathbf{B} как мешающие, или оценить параметры \mathbf{B} при мешающих \mathbf{A} .

4. Функции $\eta(t, \mathbf{B})$ и $k(s,t, \mathbf{A})$ известны с точностью до параметров \mathbf{B} и \mathbf{A} . Необходимо найти процедуру совместного оценивания параметров \mathbf{B} и \mathbf{A} .

Помимо рассмотренных задач идентификации, нередко при исследовании случайных процессов возникает задача фильтрации, частным случаем которой являются задачи интерполяции и экстраполяции.

5. Функция $k(s, t)$ полностью известна, а функция $\eta(t) = \eta(t, \mathbf{B})$ известна с точностью до параметров \mathbf{B} . Требуется по наблюдениям реализации $z(t)$ процесса $Z(t)$ в интервале (области) T_u найти его значение в интервале T_0 . Если $T_0 \subset T_u$, то эту задачу называют задачей интерполяции, если T_0 и T_u не имеют общих точек, то иногда эту задачу называют также задачей экстраполяции случайного процесса.

6. Обобщением предыдущей задачи является фильтрация случайного процесса $Y(t)$. При этом предполагается, что в области T наблюдению доступна реализация процесса

$$Z(t) = Y(t) + V(t) = \eta(t) + \xi(t) + V(t), \quad (1.31)$$

где $Y(t)$ рассматривается как полезный (информативный) процесс, а $V(t)$ — шумовой процесс. При решении этой задачи обычно считают, что $V(t)$ имеет нулевое среднее ($EV(t) = 0$), ковариационные и взаимные ковариационные функции процессов $Y(t)$ и $V(t)$ известны, а $\eta(t) = EY(t) = \eta(t, \mathbf{B})$ есть функция известная с точностью до параметров \mathbf{B} . Требуется найти оценку информативного процесса $Y(t)$ в заданной области T_0 .

1.3. Методы оценивания.

Обобщенный метод наименьших квадратов

В разделе 1.2 было отмечено, что решение задач идентификации и фильтрации случайных процессов сводится к построению оценок тех или иных характеристик процесса или его значений по данным измерений его реализации (реализаций) в заданном диапазоне изменения аргумента (см., также [4]).

В настоящее время известно большое количество различных методов и алгоритмов построения оценок [15–20, 23–25, 30, 31, 34, 42–69, 71–79]. Среди них можно выделить такие как метод наименьших квадратов (МНК), взвешенный метод наименьших квадратов (ВМНК), обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК), метод максимального правдоподобия (ММП), байесовские методы (БМ), метод моментов (ММ), метод максимальной энтропии (ММЭ), метод максимина (МММ) и т.д. В зависимости от поставленной задачи исследования, вида априорной информации, характера (дискретные или непрерывные) и количества измерений, требуемой точности построения оценок выбирается тот иной метод оценивания.

Одним из основных требований при выборе метода оценивания является вид априорной информации о статистических характеристиках процесса. К немногим методам оценивания, не требующим никакой информации о статистической структуре процесса, относится МНК. Как

известно, для применения МНК достаточно иметь результаты измерений и координаты точек, в которых эти измерения были выполнены. Это позволяет использовать МНК для решения не только статистических, но и чисто детерминированных задач, например, задач аппроксимации значений одной функции другой функцией. Этим же обстоятельством можно объяснить широкое распространение МНК в практике инженерных исследований, особенно новых объектов, когда исследователь, как правило, не располагает априорной информацией о статистических свойствах исследуемого объекта. ММП, БМ, ММ, ММЭ требуют знания функции распределения или плотности распределения. МММ требует знания класса ковариационных матриц, которому принадлежит ковариационная матрица оцениваемого процесса.

Простота использования МНК является одновременно и его недостатком, так как алгоритм метода не позволяет использовать имеющуюся априорную информацию о статистических свойствах объекта исследования, которая может быть у экспериментатора. В то же время известно, что в статистических задачах оценки МНК являются оптимальными, т.е. наилучшими в смысле точности и несмещенности) только для независимых наблюдений с одинаковыми дисперсиями и нормальным законом распределения. При других видах распределения, коррелированности и неравноточности наблюдений оптимальность МНК-оценок теряется. В этом случае, в зависимости от вида априорной информации необходимо прибегать к другим более эффективным методам оценивания. Одним из таких методов является ОМНК. Выбирая структуру весовой матрицы ОМНК в зависимости от вида априорной информации, можно построить оценки с заданными характеристиками. Достаточно часто, в качестве весовой выбирается матрица, обратная ковариационной матрице измерений.

Ранее было отмечено, что в работе рассматриваются случайные процессы в рамках корреляционной теории случайных процессов. В этом случае статистические свойства процесса полностью определяются заданием его ковариационной функции. В случае конечного числа дискретных наблюдений статистические свойства процесса могут быть заданы ковариационной матрицей измерений. Для таких процессов, оценки ОМНК, в которых в качестве весовой выбирается матрица, обратная ковариационной матрице измерений являются (для линейных задач) наилучшими линейными несмещенными оценками (ННЛО), независимо от вида распределения процесса. Ниже такие оценки еще называются оптимальными ОМНК-оценками.

На протяжении всей работы будут рассматриваться дискретные оценки ОМНК с обратной ковариационной матрицей в качестве весовой. Но

не всегда эти оценки будут совпадать с НЛНО. Так, в работе исследуются оценки ОМНК, в которых весовая матрица получена путем обращения матрицы, представляющей сумму ковариационной матрицы измерений исследуемого процесса с другой матрицей, такой, что результирующая матрица совпадает с ковариационной матрицей измерений КМ-процесса. Естественно, в этом случае оценки ОМНК уже не будут НЛНО.

Рассмотрим ОМНК подробнее (см. также [23, 25, 30, 31, 44, 48, 54, 62, 64, 66, 67, 145 и др.]). Пусть в области (интервале) T задана реализация случайного процесса $Z(t)$, описываемого моделью

$$Z(t) = \eta(t, \mathbf{B}) + V(t), \quad EV(t) = 0, \quad EV(s)V(t) = k(s, t), \quad (1.32)$$

где $\eta(t, \mathbf{B})$ есть математическое ожидание $Z(t)$, представляющее собой функцию известного вида; $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ – вектор оцениваемых параметров; $k(s, t)$ – ковариационная функция процесса $Z(t)$. Дискретные ОМНК-оценки параметров \mathbf{B} определяются следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}} &= \arg \min_{\mathbf{B}} [\mathbf{z}_n - \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B})]^T W_n [\mathbf{z}_n - \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B})] = \\ &= \arg \min_{\mathbf{B}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_{ij} [z(t_i) - \eta(t_i, \mathbf{B})][z(t_j) - \eta(t_j, \mathbf{B})], \end{aligned} \quad (1.33)$$

где
$$\mathbf{z}_n = (z_1, \dots, z_n)^T, \quad (z_i = z(t_i)) \quad (1.34)$$

– вектор отсчетов поля в точках t_1, \dots, t_n ($t_i \in T$; $t_i \neq t_j$; $i, j = \overline{1, n}$);

$$\boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) = (\eta(t_1, \mathbf{B}), \dots, \eta(t_n, \mathbf{B}))^T \quad (1.35)$$

– вектор значений функции $\eta(t, \mathbf{B})$ в тех же точках; $W_n = [\omega_{ij}]_{i,j=1}^n$ – весовая положительно определенная матрица размера $n \times n$.

Использование необходимых условий минимизации выражений, входящих в (1.33), приводит к следующей системе уравнений относительно оценок $\hat{\mathbf{B}}_n$:

$$[\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B})]^T W_n [\mathbf{z}_n - \boldsymbol{\eta}_n(\hat{\mathbf{B}})] = 0, \quad (1.36)$$

где
$$\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) = [\nabla_{\mathbf{B}} \eta(t_1, \mathbf{B}), \dots, \nabla_{\mathbf{B}} \eta(t_n, \mathbf{B})]^T \quad (1.37)$$

– матрица размера $n \times p$.

В частности, для линейной по параметрам модели $\eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t)$ из (1.36) и (1.37) с учетом того, что $\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) = F_n^T$,

где
$$F_n = [\mathbf{f}(t_1), \dots, \mathbf{f}(t_n)], \quad (1.38)$$

получаем линейные дискретные ОМНК-оценки

$$\hat{\mathbf{B}}_n = [F_n W_n F_n^T]^{-1} F_n W_n \mathbf{z}_n, \quad (1.39)$$

которые не смещены ($E \hat{\mathbf{B}}_n = \mathbf{B}$), поскольку в этом случае

$$E \mathbf{z}_n = F_n^T \mathbf{B}_n \quad (1.40)$$

и имеют ковариационную (дисперсионную) матрицу

$$D_n = [F_n W_n F_n^T]^{-1} F_n W_n K_n W_n^T F_n [F_n W_n F_n^T]^{-1}. \quad (1.41)$$

Матрица K_n в (1.41) есть ковариационная матрица вектора измерений \mathbf{z}_n , элементы которой совпадают со значениями ковариационной функции $k(s, t)$ в точках $s = t_i$ и $t = t_j$ ($t_i \in T$; $t_i \neq t_j$; $i, j = \overline{1, n}$). Отметим, что исследование структуры и вида ковариационной матрицы K_n и ее инверсии для марковских процессов является одной из основных целей этой работы.

Наивысшая точность линейных ОМНК-оценок получается при [23, 48]

$$W_n = K_n^{-1}. \quad (1.42)$$

Таким образом, если ковариационная матрица K_n известна (с точностью до постоянного множителя) или может быть вычислена с помощью функции $k(s, t)$, то мы можем построить оптимальные ОМНК-оценки, совпадающие с НЛНО [23, 48], называемыми также *Марковскими оценками*

$$\hat{\mathbf{B}}_n = [F_n K_n^{-1} F_n^T]^{-1} F_n K_n^{-1} \mathbf{z}_n, \quad (1.43)$$

для дисперсионной матрицы которых из (1.41) с использованием (1.42) получаем

$$D_n = [F_n W_n F_n^T]^{-1}. \quad (1.44)$$

Для нелинейно-параметризованной функции $\eta(t, \mathbf{B})$, предполагая выполнение ряда условий для функций $\eta(t, \mathbf{B})$, $k(s, t)$ и матрицы W_n , при достаточно большом интервале T и числе отсчетов n и при некоторых ограничениях на размещение измерений в интервале T ОМНК-оценки

(1.33) можно приближенно считать несмещенными и имеющими ковариационную матрицу

$$D_n = D_n(\mathbf{B}) \approx \left[\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n^T(\mathbf{B}) W_n \nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) \right]^{-1} \nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n^T(\mathbf{B}) W_n K_n \times \\ \times W_n^T \nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) \left[\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n^T(\mathbf{B}) W_n \nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) \right]^{-1}, \quad (1.45)$$

зависящую от истинных значений параметров \mathbf{B} . Если матрица K_n известна, то, выбирая W_n в соответствии с (1.42), получаем, как и в линейном случае, оценки с наилучшими статистическими свойствами, ковариационная матрица которых определяется выражением

$$D_n = D_n(\mathbf{B}) \approx \left[\nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n^T(\mathbf{B}) K_n^{-1} \nabla_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}_n(\mathbf{B}) \right]^{-1}. \quad (1.46)$$

Отметим, что в отличие от линейного случая, когда ОМНК-оценки вычисляются в соответствии с (1.38) в виде известного линейного преобразования вектора \mathbf{z}_n , в нелинейном случае для их нахождения требуется, как правило, использовать численные методы решения нелинейной системы (1.36) [51, 89, 103].

Если процесс $Z(t)$ является гауссовским, то независимо от вида модели $\eta(t, \mathbf{B})$ оптимальные дискретные ОМНК-оценки с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$, являются также оценками максимального правдоподобия, т.е. максимизируют n -мерную функцию правдоподобия измерений z_i ($i = 1, \dots, n$) [34, 43].

Если матрица K_n неизвестна и невозможен выбор оптимальной матрицы $W_n = K_n^{-1}$, в качестве W_n при нахождении ОМНК-оценок следует брать в зависимости от имеющейся априорной информации и допустимой сложности численного метода подходящую положительно определенную матрицу.

Как уже отмечалось, в работе рассматриваются оценки ОМНК с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$, где K_n – вещественная положительно определенная матрица. Также отмечалось, что если K_n есть ковариационная матрица наблюдений исследуемого процесса, то оценки ОМНК с $W_n = K_n^{-1}$ совпадают с НЛНО, т.е. являются оптимальными в классе линейных несмещенных оценок.

Практическое применение оценок ОМНК с при большом числе измерений связано со значительными вычислительными трудностями, связанными прежде всего с необходимостью хранения в памяти ЭВМ и обращения матрицы K_n . Матрица K_n (или W_n) требует $n(n+1)/2$ ячеек памяти ЭВМ, если хранить (с учетом ее симметричности) только верхнюю (или нижнюю) ее часть, т.е. объем памяти, занимаемой матрицей,

пропорционален n^2 . Кроме того, операция обращения матриц относится к числу некорректных задач и в случае плохо обусловленных матриц может приводить к неверным результатам, особенно при обращении матриц большой размерности [208]. Эти трудности, а также необходимость априорного знания всех элементов K_n (или ковариационной функции процесса) приводит к тому, что в практических ситуациях исследователь часто отказывается от оценок ОМНК в пользу неоптимальных, но более простых в вычислительном отношении и требованиях к виду и количеству априорной информации оценкам (например, оценкам обычного или взвешенного МНК).

Здесь весьма актуальной является задача выделения класса(ов) процессов $Z(t)$, для которых удастся избежать отмеченных выше трудностей путем учета особенностей (структуры) ковариационной матрицы измерений. Таким образом, в работе ставится *задача поиска класса процессов*, для которых:

1) Ковариационная матрица измерений матрица K_n имеет известную и достаточно простую структуру, позволяющую легко вычислять матрицу $W_n = K_n^{-1}$, не прибегая к стандартным процедурам обращения матриц;

2) число ненулевых элементов матрицы K_n^{-1} меньше или равно $N = n(n + 1)/2$ и при больших n может быть существенно меньше N , другими словами, при больших n матрица K_n^{-1} является разреженной;

3) структура матрицы K_n позволяет по небольшому числу элементов, расположенных в известных позициях, вычислить все остальные элементы матрицы или, другими словами, для вычисления матрицы $W_n = K_n^{-1}$ необходимо априорное знание только небольшого количества элементов K_n , расположенных в заданных позициях.

Для такого класса процессов оценки ОМНК с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$ для линейных задач совпадают с НЛНО, в то же время можно ожидать, что разреженная структура матрицы W_n и простота ее вычисления позволят построить эффективные процедуры ОМНК-оценивания для различных задач статистики случайных процессов (с точки зрения числа арифметических операций и объема памяти компьютера).

В работе также ставится задача исследования возможностей аппроксимации ковариационной матрицы K'_n измерений произвольного процесса ковариационной матрицей K_n измерений процесса, принадлежащего искомому классу, таким образом, чтобы оценки ОМНК с $W_n = (K'_n)^{-1}$ были близки к оптимальным.

В качестве иллюстрации эффективности применения получаемых результатов для построения простых процедур ОМНК-оценивания выбрана задача оптимальной фильтрации случайного процесса с одновременной параметрической ОМНК идентификацией его математического

ожидания [145]. Частным случаем этой, довольно общей, задачи являются задачи интерполяции и экстраполяции случайного процесса, задачи параметрической идентификации и предсказания математического ожидания процесса, задачи регрессионного анализа при коррелированных и некоррелированных наблюдениях.

Но результаты работы могут быть использованы и в нелинейном случае. Соотношения (1.45), (1.46) показывают, что в случае нелинейного ОМНК-оценивания применение весовой матрицы $W_n = K_n^{-1}$ также повышает статистическую точность получаемых оценок. При этом, как и в линейном случае, можно воспользоваться результатами настоящей работы для упрощения вычисления ОМНК-оценок для нелинейных задач. Обобщая можно сказать, что результаты, получаемые в работе, можно использовать для повышения вычислительной эффективности всех процедур, в которых так или иначе встречается матрица K_n или обратная к ней матрица $W_n = K_n^{-1}$.

1.4. Оптимальная линейная фильтрация и интерполяция случайного процесса

Рассмотрим случайный процесс, описываемый моделью

$$Z(t) = Y(t) + V(t) = \eta(t) + \xi(t) + V(t), \quad t \in T, \quad (1.47)$$

представляющей собой сумму полезного (фильтруемого) $Y(t)$ и шумового (мешающего) $V(t)$ случайных процессов, удовлетворяющих предположениям

$$EY(t) = \eta(t) = \eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t); \quad E\xi(t) = 0; \quad (1.48)$$

$$E[Y(s) - \eta(s)][Y(t) - \eta(t)] = k_y(s, t) = E\xi(s)\xi(t) = k_\xi(s, t); \quad (1.49)$$

$$EV(t) = 0; \quad EV(s)V(t) = k_v(s, t); \quad (1.50)$$

$$E[Y(s) - \eta(s)]V(t) = k_{yv}(s, t) = E\xi(s)V(t) = k_{\xi v}(s, t); \quad (1.51)$$

$$EV(s)[Y(t) - \eta(t)] = k_{vy}(s, t) = EV(s)\xi(t) = k_{v\xi}(s, t). \quad (1.52)$$

В (1.48)–(1.52): $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))^T$ – вектор известных линейно-независимых детерминированных функций; $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ – вектор неизвестных параметров; $k_y(s, t)$, $k_v(s, t)$, $k_{yv}(s, t)$, $k_{vy}(s, t)$ известные ковариационные и взаимные ковариационные функции процессов $Y(t)$ и $V(t)$. Предполагается, что соотношения (1.48)–(1.52) справедливы для всех s и t из некоторой области T .

Таким образом, наблюдаемый процесс $Z(t)$ в области T представляет собой сумму полезного детерминированного процесса $\eta(t)$, описываемого линейно-параметризованной моделью, известной с точностью

до параметров \mathbf{B} и центрированных случайных процессов $\xi(t)$ и $V(t)$, из которых $\xi(t)$ является полезным, а $V(t)$ – шумовым.

Предположим, что задачей эксперимента является нахождение наилучших в заданном смысле оценок значений процесса $Y(t)$ в области T_0 по результатам дискретных измерений одной реализации $z(t)$ процесса $Z(t)$ в области T_u . Такая задача обычно называется фильтрацией процесса $Y(t)$ по наблюдениям процесса $Z(t)$. При этом должны выполняться условия $T_0 \subset T$ и $T_u \subset T$. Области T_0 и T_u могут совпадать, не иметь общих точек или пересекаться. Промежуточным этапом решения задачи фильтрации $Y(t)$ является нахождение наилучших оценок процессов $\eta(t)$ и $\xi(t)$ и параметров \mathbf{B} .

Будем искать оценки в классе линейных несмещенных оценок и под наилучшей оценкой процесса $Y(t)$ в точке $t \in T_0$ понимать линейную оценку $\hat{Y}(t)$ с минимальной дисперсией ошибки

$$\Delta Y(t) = \hat{Y}(t) - Y(t), \quad (1.53)$$

удовлетворяющую условию несмещенности

$$E\hat{Y}(t) = EY(t), \quad (1.54)$$

что эквивалентно условию $E\Delta Y(t) = 0$. Аналогичным образом вводятся понятия наилучших несмещенных оценок $\hat{\eta}(t)$ и $\hat{\xi}(t)$.

Пусть в точках t_1, \dots, t_n ($t \in T_u$; $i = \overline{1, n}$) выполнены измерения $z(t_1), \dots, z(t_n)$ процесса $Z(t)$. Обозначим $\mathbf{z}(t) = (z_1, \dots, z_n)^T$, где $z_i = z(t)$, ($t \in T_u$; $i = \overline{1, n}$). Будем считать, что нам известны ковариационные функции $k_z(s, t)$ и $k_{z_v}(s, t)$ или ковариационная матрица K_n измерений $Z(t)$ в точках t_1, \dots, t_n и n -мерный вектор $\mathbf{k}(z_n, y_t) = (k_{z_1}(t_1, t), \dots, k_{z_n}(t_n, t))^T$, представляющий собой вектор ковариаций измерений процесса $Z(t)$ в точках t_1, \dots, t_n со значением процесса $Y(\cdot)$ в точке t ($y_t = y(t)$). Здесь необходимо отметить, что при формулировке задачи в терминах случайных процессов более естественно считать заданными ковариационные функции $k_z(s, t)$ и $k_{z_v}(s, t)$, хотя для дискретных измерений может быть достаточным знание ковариационной матрицы K_n и вектора $\mathbf{k}(z_n, y_t)$. Ковариационные функции $k_z(s, t)$ и $k_{z_v}(s, t)$ можно вычислить также через функции $k_\xi(s, t)$, $k_v(s, t)$, $k_{\xi v}(s, t)$ и $k_{v\xi}(s, t)$, используя соотношения

$$\begin{aligned} k_{z_v}(s, t) &= k_{z\xi}(s, t) = k_\xi(s, t) + k_{v\xi}(s, t); \\ k_z(s, t) &= k_\xi(s, t) + k_{\xi v}(s, t) + k_{v\xi}(s, t) + k_v(s, t). \end{aligned} \quad (1.55)$$

В [145] показано, что дискретная НЛНО $\hat{y}(t)$ значений процесса $Y(t)$ по данным измерений одной реализации $z(t)$ процесса $Z(t)$ в точках t_1, \dots, t_n определяется выражением

$$\hat{y}_n(t) = \hat{\xi}_n(t) + \hat{\eta}_n(t), \quad (1.56)$$

где
$$\hat{\xi}_n(t) = \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) K_n^{-1} (\mathbf{z}_n - F_n^T \hat{\mathbf{B}}_n) \quad (1.57)$$

– НЛНО центрированного процесса $\xi(t)$;

$$\hat{\eta}_n(t) = \mathbf{f}^T(t) \hat{\mathbf{B}}_n \quad (1.58)$$

– НЛНО детерминированной функции $\eta(t)$;

$$\hat{\mathbf{B}}_n = D_n F_n K_n^{-1} \mathbf{z}_n \quad (1.59)$$

– НЛНО параметров \mathbf{B} , совпадающие с оптимальными ОМНК-оценками;

$$D_n = [F_n K_n^{-1} F_n^T]^{-1} \quad (1.60)$$

– ковариационная (дисперсионная) матрица оценок $\hat{\mathbf{B}}_n$.

В (1.56)–(1.60) $F_n = [\mathbf{f}(t_1), \dots, \mathbf{f}(t_n)] p \times n$ матрица значений вектора $\mathbf{f}(t)$ в точках $t_i \in T_n; i = \overline{1, n}$; K_n^{-1} – матрица, обратная ковариационной матрице K_n .

Пусть $\Delta y_n(t) = \hat{y}_n(t) - y(t)$; $\Delta \xi_n(t) = \hat{\xi}_n(t) - \xi(t)$; $\Delta \eta_n(t) = \hat{\eta}_n(t) - \eta(t)$ – ошибки оценок (1.56)–(1.58) и $\sigma_{\Delta y}^2(t), \sigma_{\Delta \xi}^2(t), \sigma_{\Delta \eta}^2(t)$ – дисперсии этих ошибок. Тогда дисперсия ошибки предсказания процесса $Y(\cdot)$ в точке $t \in T_0$ по измерениям в точках $t \in T_n; i = \overline{1, n}$ определяется выражением

$$\sigma_{\Delta y}^2(t) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t) + \sigma_{\Delta \eta}^2(t) + 2 \text{cov}\{\Delta \xi_n(t), \Delta \eta_n(t)\}, \quad (1.61)$$

где
$$\sigma_{\Delta \xi}^2(t) = \sigma_y^2(t) - \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) K_n^{-1} [I_n - F_n^T D_n F_n K_n^{-1}] \mathbf{k}(\mathbf{z}_n, y_t), \quad (1.62)$$

$\sigma_y^2(t)$ – дисперсия процесса $Y(\cdot)$ в точке t ;

$$\sigma_{\Delta \eta}^2(t) = \mathbf{f}^T(t) D_n \mathbf{f}(t); \quad (1.63)$$

– дисперсия ошибки предсказания математического ожидания $\eta(\cdot)$ в точке t , совпадающая с дисперсией $\sigma_{\hat{\eta}_n}^2(t)$ оценки $\hat{\eta}_n(t)$

$$\text{cov}\{\Delta \xi_n(t), \Delta \eta_n(t)\} = -\mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) K_n^{-1} F_n^T D_n \mathbf{f}(t); \quad (1.64)$$

– ковариация ошибок предсказания процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в точке t .

Можно выделить некоторые важные частные случаи рассмотренной задачи фильтрации случайного процесса.

1. Пусть шумовой процесс отсутствует, т.е. в (1.47) положим $V(t) = 0$. Тогда $Z(t) = Y(t)$ и $k_z(s, t) = k_y(s, t) = k_\xi(s, t)$. Все остальные ковариационные и взаимно ковариационные функции равны 0. В этом случае мы приходим к задаче интерполяции или экстраполяции процесса $Y(t) = \eta(t, \mathbf{B}) + \xi(t)$. При этом в приведенных выше выражениях вектор \mathbf{z}_n надо заменить на вектор $\mathbf{y}_n = (y_1, \dots, y_n)^T$ ($y_i = y(t_i)$), матрицу $K_n = E\mathbf{z}_n\mathbf{z}_n^T$ заменить на матрицу $K_n = E\mathbf{y}_n\mathbf{y}_n^T$, представляющую собой ковариационную матрицу вектора \mathbf{y}_n , вектор $\mathbf{k}(\mathbf{z}_n, y_t)$ – на $\mathbf{k}(\mathbf{y}_n, y_t) = (k_y(t_1, t), \dots, k_y(t_n, t))$. Если T_0 совпадает с T_u (задача интерполяции), то оценки $\hat{y}_n(t)$ в точках измерений будут совпадать с измеренными значениями $y(t)$, т.е. $\hat{y}_n(t) = y(t_i)$ и $\sigma_{\Delta y}^2(t_i) = 0$ ($i = \overline{1, n}$).

Промежуточным этапом решения этой задачи является нахождение оценок параметров \mathbf{B} модели математического ожидания $\eta(t, \mathbf{B})$ процесса $Y(t)$. При этом, если трактовать процесс $\xi(t)$ как шум измерений (помеху), то мы приходим к классической задаче регрессионного анализа при коррелированных помехах [19, 23, 44, 47, 48, 54, 55, 64, 72–75, 78 и др.].

2. Если отсутствуют шумовой процесс $V(t)$ и детерминированная составляющая процесса $Y(t)$, т.е. $V(t) = \eta(t) = 0$ и $Z(t) = Y(t) = \xi(t)$, то мы приходим к задаче интерполяции (экстраполяции) случайного процесса с нулевым математическим ожиданием.

Дискретная НЛНО $\hat{y}_n(t)$ и дисперсия ее ошибки записываются для этого случая следующим образом:

$$\hat{y}_n(t) = \hat{\xi}_n(t) = \mathbf{k}^T(\mathbf{y}_n, y_t)K_n^{-1}\mathbf{y}_n; \quad (1.65)$$

$$\sigma_{\Delta y}^2(t) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t) = \sigma_y^2(t) - \mathbf{k}^T(\mathbf{y}_n, y_t)K_n^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{y}_n, y_t). \quad (1.66)$$

При этом, как и в предыдущем случае, НЛНО процесса в точках измерений совпадает с измеренным значением процесса в этих точках: $\hat{y}_n(t_i) = y(t_i)$; $\sigma_{\Delta y}^2(t_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$. В (1.65) и (1.66) $K_n = E\mathbf{y}_n\mathbf{y}_n^T$.

3. Если детерминированная составляющая информативного поля равна нулю, т.е. $\eta(t) = 0$, то $Z(t) = Y(t) + V(t) = \xi(t) + V(t)$. При этом

$$\hat{y}_n(t) = \hat{\xi}_n(t) = \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t)K_n^{-1}\mathbf{z}_n; \quad (1.67)$$

$$\sigma_{\Delta y}^2(t) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t) = \sigma_y^2(t) - \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t)K_n^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{z}_n, y_t), \quad (1.68)$$

где $K_n = E\mathbf{z}_n\mathbf{z}_n^T$.

Рассмотрим, как выглядят дискретные линейные несмещенные оценки (ЛНО) с весовой матрицей W_n для данной задачи. Можно получить следующие выражения для ЛНО значений $Y(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ и \mathbf{B} по результатам измерений реализации $z(t)$ процесса $Z(t)$ в точках t_1, \dots, t_n (во избежании путаницы будем обозначать ЛНО через $y_n^0(t)$, $\eta_n^0(t)$, $\xi_n^0(t)$ и \mathbf{B}_n^0):

$$y_n^0(t) = \xi_n^0(t) + \eta_n^0(t), \quad (1.69)$$

где
$$\xi_n^0(t) = \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) W_n (\mathbf{z}_n - F_n^T \mathbf{B}_n^0) \quad (1.70)$$

– ЛНО центрированного процесса $\xi(t)$;

$$\eta_n^0(t) = \mathbf{f}^T(t) \mathbf{B}_n^0 \quad (1.71)$$

– ЛНО детерминированной функции $\eta(t)$;

$$\mathbf{B}_n^0 = C_n F_n W_n \mathbf{Z}_n \quad (1.72)$$

– ЛНО параметров \mathbf{B} , совпадающие с ОМНК-оценками $\hat{\mathbf{B}}_n$, полученными с помощью весовой матрицы W_n ; $C_n = [F_n W_n F_n^T]^{-1}$ – положительно определенная матрица $p \times p$, где p – число оцениваемых параметров.

Оценки (1.69)–(1.72) отличаются от НЛНО (1.56)–(1.59) только тем, что в выражениях (1.69)–(1.72) вместо весовой матрицы $W_n = K_n^{-1}$ используется произвольная положительно определенная матрица \hat{W}_n . Так как оценки (1.69)–(1.72) опираются на линейные ОМНК-оценки (1.72), далее мы будем называть оценки (1.69)–(1.72) ОМНК-оценками, а оценки (1.56)–(1.59) – оптимальными, т.е. совпадающими с НЛНО, ОМНК-оценками.

Выражения для дисперсий ошибок

$$\Delta y_n(t) = y_n^0(t) - y(t); \quad \Delta \xi_n(t) = \xi_n^0(t) - \xi(t); \quad \Delta \eta_n(t) = \eta_n^0(t) - \eta(t)$$

и дисперсионной матрицы ОМНК-оценок параметров \mathbf{B} определяются довольно громоздкими выражениями, существенно отличающимися от (1.60)–(1.64):

$$\sigma_{\Delta y}^2(t) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t) + \sigma_{\Delta \eta}^2(t) + 2 \text{cov}\{\Delta \xi_n(t), \Delta \eta_n(t)\}, \quad (1.73)$$

где
$$\sigma_{\Delta \xi}^2(t) = \sigma_y^2(t) - \mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) W_n \times \left[\begin{array}{l} K_n W_n - 2 K_n W_n F_n^T C_n F_n W_n + \\ + F_n^T D_n^0 F_n W_n + 2 F_n^T C_n F_n W_n - 2 I_n \end{array} \right] \times \mathbf{k}(\mathbf{z}_n, y_t); \quad (1.74)$$

– дисперсия ошибки $\Delta \xi_n(t)$ оценки $\xi_n^0(t)$;

$$\Delta\sigma_{\Delta\eta}^2(t) = \mathbf{f}^T(t)D_n^0\mathbf{f}(t); \quad (1.75)$$

– дисперсия ошибки $\Delta\eta_n(t)$ оценки $\eta_n^0(t)$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\Delta\xi_n(t), \Delta\eta_n(t)\} &= -\mathbf{k}^T(\mathbf{z}_n, y_t) \times \\ &\times \left[W_n F_n^T D_n^0 - W_n K_n W_n F_n^T C_n + W_n F_n^T C_n \right] \mathbf{f}(t); \end{aligned} \quad (1.76)$$

– ковариация ошибок $\Delta\xi_n(t)$ и $\Delta\eta_n(t)$;

$$D_n^0 = C_n F_n W_n K_n W_n F_n^T C_n; \quad (1.77)$$

– дисперсионная матрица ОМНК-оценок $\hat{\mathbf{B}}_n$ параметров \mathbf{B} .

В (1.74), (1.76), (1.77) учтено, что $W_n^T = W_n$. Если в (1.74), (1.76), (1.77) подставить $W_n = K_n^{-1}$, то дисперсии ошибок ОМНК-оценок (1.73)–(1.77) совпадут с дисперсиями ошибок НЛНО (1.60)–(1.64).

1.5. Постановка задачи планирования эксперимента для оценивания характеристик случайных процессов

Задачи статистики случайных процессов, сводящиеся к оцениванию тех или иных параметров, характеристик или значений наблюдаемого случайного процесса или его составляющих (например, задачи идентификации и фильтрации) можно рассматривать в двух постановках:

1) определение наилучших в каком-либо смысле оценок по данным измерений в заданных точках области T_u , т.е. выбор метода построения оценок;

2) выбор оптимального (например, с точки зрения статистической точности получаемых оценок) расположения точек измерений в области T_u при заданном методе вычисления оценок.

Первая из этих задач называется *задачей обработки* результатов эксперимента, а вторая – *задачей планирования* эксперимента на случайных полях (процессах) [31, 111–117, 134–135, 140–142, 145, 147, 149, 152–159, 166–168, 180–184, 187, 203].

Вторая задача, в свою очередь, распадается на две самостоятельные:

а) задана точность приближения оценок к их истинным значениям – необходимо найти число и расположение измерений в области T_u , обеспечивающих заданную точность;

б) задано число измерений — необходимо найти их расположение в области T_u , обеспечивающее наибольшую близость оценок параметров к их истинным значениям и оценить степень этой близости.

В настоящее время различные аспекты проведения и оптимизации эксперимента достаточно подробно рассмотрены в многочисленной литературе по планированию эксперимента. Большинство работ посвящено решению задачи планирования эксперимента в традиционной постановке, когда измерения считаются некоррелированными (независимыми случайными переменными (см. например, [89, 94–95, 97–105, 110]). В терминах случайных процессов такая постановка называется планированием эксперимента на некоррелированных (дельтакоррелированных) полях, т.е. представляет собой частный случай более общей задачи планирования эксперимента на случайных полях. В [142, 145] достаточно подробно описаны постановка и особенности планирования эксперимента на случайных полях. Приведем некоторые определения и постановку задачи планирования эксперимента при оценивании характеристик случайных процессов.

Из выражений (1.41), (1.44), (1.46), (1.60)–(1.64), (1.73)–(1.77) видно, что дисперсии ошибок предсказания $\sigma_{\Delta y}^2(t)$, $\sigma_{\Delta \xi}^2(t)$, $\sigma_{\Delta \eta}^2(t)$ и дисперсионная матрица оценок параметров D_n , определяющие статистическую точность оценок $\hat{y}_n(t)$, $\hat{\xi}_n(t)$, $\hat{\eta}_n(t)$ и $\hat{\mathbf{B}}_n$, зависят от расположения точек измерений t_i ($i = 1, \dots, n$) в области T_u и не зависят от результатов измерений в этих точках, т.е. от вектора \mathbf{z}_n . Поэтому, в случае известной ковариационной функции $k(s, t)$ и взаимной ковариационной функции $k_{\nu}(s, t)$, а также структуры модели $\eta(t, \mathbf{B})$, можно поставить задачу такого априорного выбора точек t_i ($i = 1, \dots, n$) в области T_u , при котором будут минимизироваться дисперсии ошибок или заданный функционал от дисперсионной матрицы оценок. Таким образом, можно повысить статистическую точность оценивания указанных характеристик процесса при фиксированном числе измерений. Наиболее легко эта задача решается в случае линейно параметризованных моделей математического ожидания процесса. В случае нелинейной по параметрам функции $\eta(t, \mathbf{B})$ дисперсии ошибок предсказания и дисперсионная матрица D_n зависят от истинных значений параметров \mathbf{B} и задача планирования эксперимента существенно усложняется. Обычно, как в линейном, так и в нелинейном случаях, задача планирования эксперимента решается с помощью итерационных численных процедур.

В экспериментах по оцениванию характеристик случайных процессов могут использоваться различные дискретные схемы измерений, которые мы будем называть n -точечными планами эксперимента:

- 1) общего вида $\varepsilon_n = \{t_1, \dots, t_n | t_i \neq t_j; i, j = \overline{1, n}\}$;
- 2) возрастающими $\varepsilon_n^> = \{t_1, \dots, t_n | t_1 < \dots < t_n\}$;
- 3) равномерными $\varepsilon_n^p = \{t_1, \dots, t_n | t_{i+1} = t_1 + i\Delta; i = \overline{1, n-1}\}$,

где Δ – интервал между точками измерений ($\Delta > 0$). Для всех планов $t_i \in T_u \subset T$, где T_u – замкнутый ограниченный интервал.

Планы вида $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p будут еще называться *упорядоченными планами*, а измерения, выполненные в точках этих планов – *упорядоченными измерениями*. Планы ε_n , $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p обладают следующими свойствами. Если какое-то утверждение (формула) справедливо(а) для плана ε_n , то оно(а) справедливо(а) и для планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p . Утверждение, справедливое для плана $\varepsilon_n^>$, справедливо также для плана ε_n^p . Но обратное неверно, т.е., например, формула, справедливая для плана $\varepsilon_n^>$, может быть неверной для плана общего вида ε_n .

В самом общем виде задачу планирования эксперимента по оцениванию характеристик случайного процесса можно сформулировать следующим образом. Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)^T$ p -мерный вектор, элементы которого представляют собой оцениваемые характеристики (параметры, значения и т.п.) случайного процесса. Например, элементами \mathbf{q} могут быть параметры \mathbf{B} (при этом $\mathbf{q} = \mathbf{B}$), значения $Y(t)$, $\xi(t)$, $\eta(t)$ в заданных точках $t_i \in T_0$ ($i = \overline{1, n}$) и т.д. Пусть A – положительно определенная матрица размера $p \times p$, элементы которой характеризуют статистическую точность оценок элементов вектора \mathbf{q} . Обозначим через E_n множество всех n -точечных планов вида ε_n . При $p > 1$ определим также функционал Ψ от матрицы A , который позволяет сравнивать между собой матрицы A для различных планов $\varepsilon_n \in E_n$. Тогда математическая постановка задачи планирования эксперимента может быть записана в следующем виде: найти план эксперимента $\varepsilon_n^* \in E_n$, который минимизирует заданный функционал Ψ от матрицы A , или в другой форме, найти план $\varepsilon_n^* \in E_n$, для которого

$$\Psi[A(\varepsilon_n^*)] = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \Psi[A(\varepsilon_n)], \quad (1.78)$$

где $A(\varepsilon_n)$ – матрица A , соответствующая плану ε_n .

В зависимости от вида функционала Ψ различают D – оптимальные планы, когда $\Psi[A] = \det A$, A – оптимальные планы, при $\Psi[A] = SpA$ и т.д. (см. например, [145]). Вид функционала $\Psi[\cdot]$ выбирается в зависимости от целей и условий проведения эксперимента.

Если оценивается значение процесса $Y(t)$ в заданной точке t , то размерность вектора \mathbf{q} будет равна 1 и (1.78) принимает вид

$$\sigma_{\Delta y}^2(\varepsilon_n^*, t) = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \sigma_{\Delta y}^2(\varepsilon_n, t), \quad (1.79)$$

где $\sigma_{\Delta y}^2(\varepsilon_n, t)$ – значение $\sigma_{\Delta y}^2(t)$ для плана ε_n .

План ε_n^* , найденный в соответствии с критерием (1.79) назван в [111] оптимальным *экстраполяционным планом*. Если оцениваются составляющие $\xi(t)$ и $\eta(t)$ процесса $Y(t)$, то в (1.79) надо подставить, соответственно, $\sigma_{\Delta \xi}^2(\varepsilon_n, t)$ или $\sigma_{\Delta \eta}^2(\varepsilon_n, t)$.

Аналитическое построение планов ε_n^* , удовлетворяющих (1.78) или (1.79) возможно только в простейших случаях [142, 145, 180–185, 187]. На практике для поиска точек оптимальных планов используются универсальные численные алгоритмы, независимые от вида модели, размерности аргумента t и конфигурации области планирования T_u (если размерность t больше 1) [111, 112, 134, 141, 145, 147, 148, 152, 155].

Но и численные методы построения оптимальных планов, несмотря на свою универсальность, имеют свои ограничения. Эффективность их быстро падает с увеличением размерности задачи. Особенно это касается численных процедур, в основе которых лежит обобщенный метод наименьших квадратов. Вычислительные трудности, связанные с использованием ОМНК-оценок подробно рассмотрены в разделе 1.3. Все эти трудности, даже в большей степени, имеют место и при построении оптимальных планов. По этим причинам применение численных процедур ограничено построением планов с небольшим числом точек.

Таким образом, здесь весьма актуальна задача построения более эффективных численных процедур поиска оптимальных планов, учитывающих особенности решаемой задачи, в частности, учитывающих класс исследуемых случайных процессов. В разделе 1.3 была поставлена задача поиска класса(ов) процессов, для которых вычисление ОМНК-оценок можно существенно упростить. Очевидно, если такой класс процессов существует, то для него можно найти более простые численные процедуры построения оптимальных планов.

Таким образом, еще одной из целей (задач) настоящей работы является *построение эффективных процедур численного синтеза оптимальных планов* для найденного класса случайных процессов.

Выводы по главе

1. Рассмотрены постановки задачи анализа и планирования экспериментов при исследовании случайных процессов (задачи оптимальной фильтрации и интерполяции).

2. Показано, что вычисление оптимальных ОМНК-оценок для этих задач связано с рядом вычислительных трудностей, главными из которых являются необходимость хранения в памяти компьютера и обращения ковариационной матрицы измерений наблюдаемого процесса. Это усложняет или делает невозможным применение ОМНК для решения задач идентификации и фильтрации случайных процессов и планирования эксперимента для задач большой размерности.

3. Поставлена задача поиска класса случайных процессов, для которых можно упростить вычисление ОМНК-оценок путем учета ковариационной структуры процесса. Если такой класс или классы процессов существует(ют), то необходимо разработать конкретные алгоритмы вычисления ОМНК-оценок для таких процессов, обратив особое внимание на рекуррентные процедуры.

4. Сформулирована задача оптимального планирования экспериментов, целью которого является оценивание заданных характеристик (параметров, значений) случайного процесса. Отмечено, что численные алгоритмы нахождения оптимальных планов быстро вырождаются при увеличении размерности задачи. В связи с этим поставлена задача поиска численных процедур синтеза оптимальных планов для найденного класса процессов, более эффективных по сравнению с известными.

2. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И АППРОКСИМАЦИЯ НЕМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ МАРКОВСКИМИ

В главе кратко излагаются основные сведения из теории марковских процессов. Классические способы определения (задания) Марковских процессов в виде условных функций (плотностей) распределения, условных математических ожиданий или систем стохастических уравнений (СДУ) со случайными начальными условиями не удобны для решения поставленных в книге задач. Определяя Марковский процесс классическими способами, мы однозначно задаем все его характеристики, в частности, вид математического ожидания процесса. В задачах же параметрической идентификации математического ожидания случайных процессов, задаваясь вероятностными характеристиками процесса, мы должны иметь определенную свободу в выборе модели его математического ожидания. Кроме того, рассматриваются только такие процессы, вероятностные свойства которых полностью определяются видом ковариационной функции процесса.

Основной целью данной главы является определение и исследование класса случайных процессов, марковское свойство которых выражено в терминах его ковариационной функции. Такой класс Марковских процессов позволяет успешно решать задачи параметрической идентификации, так как не накладывает никаких ограничений на вид математического ожидания процесса. Поэтому ниже, наряду с изложением широко известных результатов в области Марковских процессов, вводится ряд новых определений, понятий и доказываются теоремы, определяющие класс Марковских процессов в рамках корреляционной теории случайных процессов.

Подробно рассматриваются Марковские процессы, определяемые системами СДУ и их связь с Марковскими процессами, задаваемыми в виде определенного условия на вид ковариационной функции процесса. Проводится анализ свойств отдельных компонент и связей между ними векторного Марковского процесса, определяемого СДУ.

Рассматриваются вопросы аппроксимации немарковских процессов Марковскими и примеры реальных физических систем, сигналы на выходе которых можно считать одномерными, многомерными или компонентами многомерных (векторных) процессов.

2.1. Марковские процессы в узком смысле

В настоящее время марковским процессам, представляющим важнейший раздел теории случайных процессов, посвящена обширная литература (см. например, [1–13, 18–22, 27, 29, 32–39]). Классическое определение марковского процесса (в узком смысле) приведено в [1].

Определение 2.1. Процесс $\{Z(t), t \in T\}$ называется марковским процессом в узком смысле, если для любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ условное распределение вероятностей величины $Z(t_n)$ относительно величин $Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_{n-1})$ совпадает с условным распределением величины $Z(t_n)$ относительно $Z(t_{n-1})$ в том смысле, что для каждого $x \in X$ с вероятностью 1 выполняется равенство

$$P\{Z(t_n) \leq x | Z(t_{n-1}), \dots, Z(t_1)\} = P\{Z(t_n) \leq x | Z(t_{n-1})\}, \quad (2.1)$$

где X – область значений (выборочное пространство) процесса $Z(t)$.

Определение 2.1 говорит о том, что вероятностные свойства марковского процесса в будущем при фиксированном настоящем не зависят от значений процесса в прошлом.

В терминах условных функций распределения вероятностей и плотностей распределения вероятностей, (2.1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) &= F(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}); \\ f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) &= f(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Отметим, что для полной характеристики марковских процессов достаточно знать только двумерные законы распределения, т.е. марковский процесс является процессом второго порядка.

Замечание 2.1. Когда какой-нибудь процесс называют марковским, то, как правило, подразумевают, что речь идет о марковском процессе в узком смысле. Поэтому, мы далее в тех случаях, когда это не вызывает путаницы или разночтений, будем называть марковский процесс в узком смысле просто марковским процессом.

Определение 2.2. Векторный случайный процесс $\{\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T\}$ называется m -мерным марковским процессом, если для любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и любым $X = (x_1, \dots, x_m) \in X$ с вероятностью 1 выполняется равенство

$$P\{\mathbf{Z}(t_n) \leq X | \mathbf{Z}(t_{n-1}), \dots, \mathbf{Z}(t_1)\} = P\{\mathbf{Z}(t_n) \leq X | \mathbf{Z}(t_{n-1})\}, \quad (2.2)$$

где X – область значений (выборочное пространство) процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Приведенное определение многомерного марковского процесса является естественным обобщением определения скалярного марковского процесса $Z(t)$. Такое же непосредственное обобщение допускают и формулы, описывающие распределение вероятностей марковского процесса. При этом, скалярный процесс, удовлетворяющий (2.1), часто называют простым (одномерным) марковским процессом или марковским процессом 1-го порядка, а m -мерный марковский процесс – марковским процессом m -го порядка.

Отметим, что отдельные компоненты многомерного марковского процесса могут не обладать марковским свойством, т.е. являться одномерными марковскими процессами в смысле определения 2.1. Однако, если процесс $\mathbf{Z}(t)$ состоит из независимых между собой одномерных марковских процессов $\{Z_i(t), i = 1, 2, \dots, m\}$, то $\mathbf{Z}(t)$ удовлетворяет (2.2) и, следовательно, в этом частном случае, процесс $\mathbf{Z}(t)$ в целом и каждая из его компонент являются марковскими.

Определение 2.3. Случайный процесс $\{Z(t)\}$ называется сложным или m -связным марковским процессом, если существует целое число m такое, что для любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, любого $x \in X$ и при любом n с вероятностью 1 выполняется равенств

$$P\{Z(t_n) \leq x \mid Z(t_{n-1}), \dots, Z(t_1)\} = P\{Z(t_n) \leq x \mid Z(t_{n-1}), \dots, Z(t_{n-m})\}. \quad (2.3)$$

В том случае, когда $m = 1$, процесс, определяемый выражением (2.3) является простым или одномерным марковским процессом.

Сложный (m -связный) марковский процесс $\{Z(t)\}$ можно представить в виде компоненты m -мерного марковского процесса

$$\mathbf{Z}(t) = (Z(t_n), \dots, Z(t_{n+m-1})) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Это обстоятельство позволяет изучать многосвязные марковские процессы при помощи математического аппарата, разработанного для многомерных марковских процессов с дискретным временем.

Если ввести понятие марковского процесса с нулевой и бесконечной связностью ($m = 0$ и $m = \infty$), то с помощью сложных марковских процессов можно описать любой реальный процесс. При этом случайный процесс с независимыми значениями можно рассматривать как частный случай сложного марковского процесса с нулевой связностью, а случайный процесс, значения которого в любой фиксированный момент времени t зависят от всей предыстории процесса до t , как марковский процесс с бесконечной связностью.

2.2. Марковские процессы в широком смысле и ковариационные марковские процессы (КМ-процессы)

Основная масса работ, связанных с разработкой теоретических положений и приложениями теории марковских процессов к решению различных практических задач, в частности задач фильтрации и идентификации случайных процессов, изложена в терминах n -мерных плотностей (условных плотностей) или функций распределения, а также условных математических ожиданий. При этом считаются заданными функции распределения или плотности случайного процесса. В последнее время интенсивно развиваются методы исследования стохастических объектов, основанные на интерпретации марковских процессов, как решений соответствующих систем СДУ [4–7, 13, 19–22, 33–38, 20]. При этом решение многих практически важных задач сводится к решению СДУ, построенных в соответствии с особенностями исследуемого объекта. (Об интерпретации марковских случайных процессов как решений, соответствующим образом построенных систем стохастических дифференциальных уравнений см. ниже раздел 2.3).

В настоящее время практически не встречаются работы, в которых изложена корреляционная теория марковских процессов, за исключением работы [1], в которой введено понятие марковского в широком смысле процесса и получено условие на вид моментной функции второго порядка, определяющее такой класс процессов. В то же время, во многих практически важных ситуациях случайный процесс задается своими моментными функциями первого и второго порядка, в частности, часто считают заданной только ковариационную функцию процесса. При этом заманчивым представляется построение теории марковских процессов, опирающейся только на свойства моментных функций первого и второго порядка, в частности, опирающейся только на свойства ковариационной функции процесса.

Чтобы определить марковский процесс в широком смысле, необходимо найти какое-либо свойство процесса $Z(t)$, выраженное через его вторые моменты, эквивалентное или являющееся важнейшим частным случаем марковского процесса. Для этого нам потребуется понятие линейного условного математического ожидания.

Известно [3, 8, 18], что для любой среднеквадратично интегрируемой случайной величины x_n и любых случайных величин x_1, \dots, x_{n-1} *условное математическое ожидание* $E\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\}$ можно рассматривать как *наилучшую аппроксимацию* x_n с помощью функции(й) от x_1, \dots, x_{n-1} или среднеквадратичную регрессию x_n на x_1, \dots, x_{n-1} , т.е.

$$E\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\} = g_2(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где функция $g_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ минимизирует средний квадрат отклонения

$$E[x_n - g_2(x_1, \dots, x_{n-1})]^2.$$

В работе [1] введено понятие *линейного условного математического ожидания* $\hat{E}\{\}$, которое понимается как наилучшая аппроксимация x_n с помощью линейной комбинации случайных величин, т.е.

$$\hat{E}\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i, \quad (2.8)$$

где α_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) – постоянные величины.

В общем случае, наилучшая *линейная* аппроксимация при произвольном законе распределения случайных величин x_1, \dots, x_{n-1} не является настолько близкой к x_n , как условное математическое ожидание $E\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Но для гауссовских случайных величин с нулевым средним условное математическое ожидание

$$E\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\} = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}} x_i,$$

где a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) – элементы положительно определенной (весовой) матрицы, т.е. $E\{\}$ является линейной функцией величин x_1, \dots, x_{n-1} . Таким образом, для гауссовых вещественных случайных величин понятия условное математическое ожидание и линейное условное математическое ожидание совпадают:

$$E\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\} = \hat{E}\{x_n | x_1, \dots, x_{n-1}\}.$$

Для нахождения величины $\hat{E}\{\}$ достаточно знание только вторых моментов случайных величин (процессов).

В [1, Дуб] дано следующее определение марковского в широком смысле процесса, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 2.4 [1, с. 87]. Процесс $Z(t)$, независимо от того гауссовский он или нет, называется *марковским процессом в широком смысле*, если $E\{Z^2(t)\} < \infty$ при всех t и при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется условие

$$\hat{E}\{Z(t_n) | Z(t_{n-1}), \dots, Z(t_1)\} = \hat{E}\{Z(t_n) | Z(t_{n-1})\}. \quad (2.9)$$

Пусть при любых $s, t \in T$, моментная функция второго порядка удовлетворяет условиям $r(s, t) < \infty$ и $r(s, t) = 0$, если $r(t, t) = 0$.

Теорема 2.1. ([1, с. 212]). Процесс $Z(t)$ является марковским процессом в широком смысле тогда и только тогда, когда моментная функция второго порядка $r(s, t)$ удовлетворяет условию

$$r(s, t) = \frac{r(s, \tau)r(\tau, t)}{r(\tau, \tau)} \quad r(t, t) < \infty, \quad (2.10)$$

где $s < \tau < t$.

Доказательство этой теоремы приведено в [1].

В ряде работ [1, 8, 34, 37] показано, что моментная функция второго порядка марковского и одновременно гауссовского процесса с нулевым средним удовлетворяет (2.10), т.е. марковский гауссовский процесс с нулевым средним является марковским процессом в широком смысле и, наоборот, гауссовский марковский процесс в широком смысле является марковским и в узком смысле.

Следствие 2.1. Ковариационная функция марковского процесса в широком смысле удовлетворяет условию

$$k(s, t) = \frac{(k(s, \tau) + m(s)m(\tau))(k(\tau, t) + m(\tau)m(t))}{k(\tau, \tau) + m^2(\tau)} - m(s)m(t), \quad (2.11)$$

где $s < \tau < t$.

Это следствие вытекает из соотношения $k(s, t) = r(s, t) - m(s)m(t)$.

Следствие 2.2. Процесс $Z(t)$ с нулевым средним является марковским процессом в широком смысле тогда и только тогда, когда ковариационная функция $Z(t)$ удовлетворяет условию

$$k(s, t) = \frac{k(s, \tau)k(\tau, t)}{k(\tau, \tau)}, \quad (2.12)$$

где $s < \tau < t$.

Это следствие вытекает из (2.11) при $m(t) = 0$.

Нас в дальнейшем будут в основном интересовать свойства ковариационной матрицы измерений процессов с ненулевым математическим ожиданием, ковариационные функции которых заданы и удовлетворяют условию (2.12), а математические ожидания неизвестны и требуют определения (идентификации) в процессе эксперимента. Так как задача рассматривается в параметрической постановке, математическое ожидание процесса задается в виде параметрической модели с неизвестными параметрами, никак не связанной с видом ковариационной функции процесса. Очевидно, в такой постановке, момент второго порядка $r(s, t)$ наблюдаемого процесса не будет, в общем случае, удовлетворять условию (2.10), даже если выполняется (2.12).

Это связано с тем, что при заданной ковариационной функции для марковского процесса в широком смысле, $k(s, t)$ и $m(t)$ должны удовлетворять соотношению (2.11). Только при этом $r(s, t)$ будет удовлетворять (2.10).

Условия (2.10) и (2.11) удовлетворяются одновременно только в тех случаях, когда исследуемый процесс имеет нулевое среднее или является марковским процессом в узком смысле с ковариационной функцией $k(s, t)$ и математическим ожиданием $m(t)$. В этом случае, при выполнении (2.10) будет выполняться и (2.12).

Пример 2.1. Нормальный нестационарный марковский в узком смысле процесс $Z(t)$ имеет ковариационную функцию

$$k(s, t) = \sigma^2 [\exp(-\alpha |s - t|) - \exp(-\alpha(s + t))]$$

и математическое ожидание

$$m^*(t) = Z_0 \exp(-\alpha t).$$

Можно проверить, что $k(s, t) = k(s, \tau)k(\tau, t)^{-1}k(\tau, t)$ и при $m(t) = m^*(t)$, функция $r(s, t) = r(s, \tau)r(\tau, t)^{-1}r(\tau, t)$.

Таким образом, исследуемые в работе процессы, когда условие марковости накладывается только на вид ковариационной функции, можно назвать процессами, марковскими относительно ковариационной функции или *ковариационно марковскими процессами* (КМ-процессами). При этом марковским процессом в широком смысле (в определении Дуба) будет только центрированная составляющая процесса, а сам процесс будет КМ-процессом.

Введем определение КМ-процесса. Пусть $Z^0(t) = Z(t) - m_x(t)$ — центрированная составляющая процесса $Z(t)$.

Определение 2.5. Процесс $Z(t)$ называется КМ-процессом, если $E\{Z^0(t)\}^2 < \infty$ при всех t и при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} \leq t_n$ выполняется условие

$$\hat{E}\{Z^0(t_n) | Z^0(t_{n-1}), \dots, Z^0(t_1)\} = \hat{E}\{Z^0(t_n) | Z^0(t_{n-1})\}, \quad (2.13)$$

где $\hat{E}\{\cdot\}$ — линейное условное математическое ожидание.

Введенное понятие КМ-процесса дает возможность исследовать процессы с произвольным математическим ожиданием, основываясь только на свойствах ковариационной функции процесса, которая не зависит от вида математического ожидания процесса.

При этом из (2.11) вытекают следующие утверждения, доказательства которых тривиальны.

Утверждение 2.1. Для процессов с нулевым средним понятия марковский процесс в широком смысле и КМ-процесс совпадают независимо от вида распределения процесса.

Утверждение 2.2. Для нормальных (гауссовских) случайных процессов с нулевым средним совпадают все три понятия – марковский процесс в узком смысле, марковский процесс в широком смысле и КМ-процесс.

Утверждение 2.3. Ковариационная функция нормального марковского процесса определяет соответствующий КМ-процесс.

Последнее утверждение весьма важно в том смысле, что позволяет найти примеры КМ-процессов путем анализа широко известных примеров нормальных случайных процессов.

Пусть $k(t,t) < \infty$ и $k(s,t) = 0$, если $k(t,t) = 0$.

Теорема 2.2. Процесс $Z(t)$ является КМ-процессом тогда и только тогда, когда ковариационная функция процесса $k(s,t)$ удовлетворяет условию (2.12).

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.1, приведенное в [1], с заменой $r(s,t)$ на $k(s,t)$ и $Z(t)$ на $Z^0(t)$.

Суммируем все приведенные определения одномерных марковских процессов. Пусть $E\{Z^2(t)\} < \infty$; $\hat{E}\{\cdot\}$ – оператор линейного условного математического ожидания; $Z_i = Z(t_i)$; $Z_i^0 = Z^0(t_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 2.6. Если для процесса $Z(t)$ при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется:

$$E\{f(Z_n) | Z_{n-1}, \dots, Z_1\} = E\{f(Z_n) | Z_{n-1}\}, \quad (2.14)$$

то $Z(t)$ является марковским процессом в узком смысле;

$$\hat{E}\{Z_n | Z_{n-1}, \dots, Z_1\} = \hat{E}\{Z_n | Z_{n-1}\}, \quad (2.15)$$

то $Z(t)$ является марковским процессом в широком смысле;

$$\hat{E}\{Z_n^0 | Z_{n-1}^0, \dots, Z_1^0\} = \hat{E}\{Z_n^0 | Z_{n-1}^0\}, \quad (2.16)$$

то $Z(t)$ является КМ-процессом.

Условия (2.15) и (2.16) можно переписать в терминах моментной функции второго порядка (2.10) и ковариационной функции (2.12), соответственно. Обратно, если выполняются (2.10) и (2.12), то справедливы (2.15) и (2.16).

По аналогии с определениями марковского процесса в широком смысле и КМ-процесса введем определения m -связного марковского процесса в широком смысле и m -связного КМ-процесса.

Определение 2.7. Процесс $Z(t)$ называется m -связным марковским процессом в широком смысле, если при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется:

$$\hat{E}\{Z_n | Z_{n-1}, \dots, Z_1\} = \hat{E}\{Z_n | Z_{n-1}, Z_{n-2}, \dots, Z_{n-m}\}, \quad m < n. \quad (2.17)$$

Определение 2.8. Процесс $Z(t)$ называется m -связным КМ-процессом, если при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется

$$\hat{E}\{Z_n^0 | Z_{n-1}^0, \dots, Z_1^0\} = \hat{E}\{Z_n^0 | Z_{n-1}^0, Z_{n-2}^0, \dots, Z_{n-m}^0\}, \quad (2.18)$$

где $Z_n^0 = Z^0(t_n) = Z(t_n) - E\{Z(t_n)\}$.

Пусть $\mathbf{r}_{[j-1],l} = (r_{j-m,l}, \dots, r_{j-1,l})^T$ — m -мерный вектор значений $r(s,t)$ в точках t_{j-m}, \dots, t_{j-1} и точке t_l ;

$R_m^{-1}[j-1]$ — матрица, размером $m \times m$, обратная матрице значений функции $r(s,t)$ в точках t_{j-m}, \dots, t_{j-1} , т.е. $r_{ij} = r(t_i, t_j)$;

$\mathbf{k}_{[j-1],l} = (k_{j-m,l}, \dots, k_{j-1,l})^T$ — m -мерный вектор значений $k(s,t)$ в точках t_{j-m}, \dots, t_{j-1} и точке t_l ;

$K_m^{-1}[j-1]$ — матрица, размером $m \times m$, обратная матрице значений функции $k(s,t)$ в точках t_{j-m}, \dots, t_{j-1} , т.е. $k_{ij} = k(t_i, t_j)$; $Z_{[j-1]} = (Z_{j-m}, \dots, Z_{j-1})$; $Z_{[j-1]}^0 = (Z_{j-m}^0, \dots, Z_{j-1}^0)$.

Теорема 2.3.

1. Процесс $Z(t)$ является m -связным марковским процессом в широком смысле тогда и только тогда, когда при любых $t_i < t_{j-m} < t_{j-m+1} < \dots < t_{j-1} < t_j$ момент второго порядка $r(s,t)$ удовлетворяет условию

$$r(t_i, t_j) = \mathbf{r}_{i,[j-1]}^T R_m^{-1}[j-1] \mathbf{r}_{[j-1],j}. \quad (2.19)$$

2. Процесс $Z(t)$ является m -связным КМ-процессом тогда и только тогда, когда при любых $t_i < t_{j-m} < t_{j-m+1} < \dots < t_{j-1} < t_j$ ковариационная функция $k(s,t)$ удовлетворяет условию

$$k(t_i, t_j) = \mathbf{k}_{i,[j-1]}^T K_m^{-1}[j-1] \mathbf{k}_{[j-1],j}. \quad (2.20)$$

Доказательство теоремы 2.3 приведено в приложении 3.

Замечание 2.2. При $m = 1$ $\mathbf{r}_{i,[j-1]}^T = r_{i,j-1}$; $\mathbf{r}_{[j-1],j} = r_{j-1,j}$; $R_m^{-1}[j-1] = r_{j-1,j-1}^{-1}$ и из (2.19) получаем $r(t_i, t_j) = r_{i,j-1} r_{j-1,j-1}^{-1} r_{j-1,j}$. Заменяя t_i на t_s , t_{j-1} на t_τ и t_j на t , получаем (2.10). Таким образом, результат теоремы 2.1 есть частный случай теоремы 2.3.

Замечание. Для m -связных процессов с нулевым средним верны утверждения (2.1)–(2.3).

Все вышеизложенные определения и теоремы легко обобщаются на случай векторных процессов.

Определение 2.9. Векторный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ называется m -мерным марковским процессом в широком смысле, если при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется

$$\hat{E}\{\mathbf{Z}_n | \mathbf{Z}_{n-1}, \dots, \mathbf{Z}_1\} = \hat{E}\{\mathbf{Z}_n | \mathbf{Z}_{n-1}\}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение 2.10. Векторный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ называется m -мерным КМ-процессом, если при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ с вероятностью 1 выполняется

$$\hat{E}\left\{\overset{0}{\mathbf{Z}}_n | \overset{0}{\mathbf{Z}}_{n-1}, \dots, \overset{0}{\mathbf{Z}}_1\right\} = \hat{E}\left\{\overset{0}{\mathbf{Z}}_n | \overset{0}{\mathbf{Z}}_{n-1}\right\}, \quad (2.21)$$

где $\overset{0}{\mathbf{Z}}_i = \overset{0}{\mathbf{Z}}(t_i) = \mathbf{Z}(t_i) - \mathbf{m}_i(t_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\mathbf{R}(s, t) = E\{\mathbf{Z}(s)\mathbf{Z}^T(t)\}$ – матричная моментная функция второго порядка векторного процесса $\mathbf{Z}(t)$; $\mathbf{K}(s, t) = E\left\{\overset{0}{\mathbf{Z}}(s)(\overset{0}{\mathbf{Z}}(t))^T\right\}$ – матричная ковариационная функция процесса $\overset{0}{\mathbf{Z}}(t)$, совпадающая с матричной ковариационной функцией процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Теорема 2.4.

1. Векторный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ является m -мерным марковским процессом в широком смысле тогда и только тогда, когда матричная моментная функция второго порядка $\mathbf{R}(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{R}(s, t) = \mathbf{R}(s, \tau)\mathbf{R}(\tau, t)^{-1}\mathbf{R}(\tau, t), \quad (2.23)$$

где $s < \tau < t$.

2. Векторный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ является m -мерным КМ-процессом тогда и только тогда, когда матричная ковариационная функция $\mathbf{K}(s, t)$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{K}(s, t) = \mathbf{K}(s, \tau)\mathbf{K}(\tau, t)^{-1}\mathbf{K}(\tau, t), \quad (2.24)$$

где $s < \tau < t$.

Доказательство. Все свойства условного математического ожидания, использованные при доказательстве аналогичных теорем для одномерного случая справедливы и для векторных случайных величин. Поэтому

доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательства вышеупомянутых теорем с заменой $Z(t_i)$ на $\mathbf{Z}(t_i)$, $\overset{0}{Z}(t_i)$ на $\overset{0}{\mathbf{Z}}(t_i)$ и, естественно, с учетом правил обращения с векторами и матрицами.

И, наконец, введем понятия марковски связанных процессов в широком смысле и ковариационно марковских процессов.

Определение 2.11. Процессы $Z_i(t)$ и $Z_j(t)$ называются:

1) *марковски связанными в широком смысле*, если смешанные моментные функции второго порядка $r_{ij}(s, t)$ и $r_{ji}(s, t)$ удовлетворяют условию (2.10), как при $s < \tau < t$, так и при $s > \tau > t$;

2) *ковариационно марковски связанными (КМ-связанными)*, если взаимные ковариационные функции $k_{ij}(s, t)$ и $k_{ji}(s, t)$ удовлетворяют условию (2.12), как при $s < \tau < t$, так и при $s > \tau > t$.

Замечание 2.3. Могут встречаться ситуации, когда функции $r_{ij}(s, t)$ или $k_{ij}(s, t)$ удовлетворяют условиям (2.10) или (2.12), соответственно, только при $s < t$ или при $s > t$. При этом для функций $r_{ji}(s, t)$ или $k_{ji}(s, t)$ условия (2.10) или (2.12), соответственно, будут удовлетворяться при обратном соотношении величин s и t . Такие процессы являются марковски связанными только при $s < t$ или при $s > t$ и мы будем называть их *полумарковски связанными процессами*.

2.3. Марковские процессы как решения стохастических дифференциальных уравнений

Важнейшую роль при описании и изучении марковских процессов играет аппарат стохастических дифференциальных уравнений [4–7, 13, 19–22, 33–39]. Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) позволяют получить прямое описание марковских процессов. Применение аппарата СДУ дает возможность свести решение многих задач исследования марковских процессов к построению и решению соответствующих СДУ.

Пусть случайный процесс $Z(t)$ задан с помощью СДУ 1-го порядка

$$\frac{dZ(t)}{dt} = f(Z(t), t) + g(Z(t), t)N(t); \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (2.25)$$

где $f(Z(t), t)$ и $g(Z(t), t)$ – непрерывно дифференцируемые детерминированные функции; $N(t)$ – нормальный белый шум с интенсивностью $\sigma_n^2(t)$; Z_0 – случайная величина, независимая от $N(t)$ при $t > t_0$.

Тогда случайный процесс $Z(t)$ является одномерным марковским процессом. Уравнение (2.25) называется *стохастическим дифференциальным уравнением Ито* [4].

Частным случаем (2.25) является линейное СДУ 1-го порядка

$$\frac{dZ(t)}{dt} = a_1(t)Z(t) + a_0(t) + b(t)N(t), \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (2.26)$$

где $a_1(t)$, $a_0(t)$ и $b(t)$ – непрерывно дифференцируемые детерминированные функции времени.

Линейному уравнению (2.26) с начальным условием $Z(t_0) = Z_0$ соответствует линейное стохастическое интегральное уравнение

$$Z(t) = Z_0 + \int_{t_0}^t [a(\tau)Z(\tau) + a_0(\tau)]d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau)dW(\tau), \quad (2.27)$$

где $W(t)$ – винеровский процесс с $W(0) = 0$, $EW(t) = 0$ и $EW(s)W(t) = \min(s, t)$.

Уравнение (2.26) и равноценное ему уравнение

$$dZ(t) = [a_1(t)Z(t) + a_0(t)]dt + b(t)dW(t) \quad (2.28)$$

с начальным условием $Z(t_0) = Z_0$ следует понимать как сокращенную запись стохастического дифференциального уравнения (2.27).

Пусть векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ задан системой обобщенных нелинейных СДУ

$$\left\{ dZ_i(t) = f_i(\mathbf{Z}(t), t)dt + \sum_{l=1}^m g_{il}(\mathbf{Z}(t), t)dW_l(t), Z_i(t_0) = Z_{i0}, (i = \overline{1, m}) \right\}, \quad (2.29)$$

где $f_i(\mathbf{Z}(t), t)$ и $g_{il}(\mathbf{Z}(t), t)$ – непрерывно дифференцируемые детерминированные функции; $W_l(t)$ – взаимнонезависимые винеровские процессы с известными статистическими характеристиками $EW_l(t) = 0$; $EW_l(s)W_j(t) = r_{ij} \sigma_i \sigma_j \min(s, t)$; r_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, \dots, m$; Z_{i0} – случайные величины, независимые от приращений $W(t)$ при $t > t_0$. Тогда многомерный случайный процесс $\mathbf{Z}(t)$ является m -мерным марковским процессом.

Эквивалентная запись системы (2.29) имеет вид

$$\left\{ \frac{dZ_i(t)}{dt} = f_i(\mathbf{Z}(t), t) + \sum_{l=1}^m g_{il}(\mathbf{Z}(t), t)N_l(t), Z_i(t_0) = Z_{i0}, (i = \overline{1, m}) \right\}, \quad (2.30)$$

$EN_i(t) = 0$; $EN_i(s)N_j(t) = r_{ij} \sigma_i \sigma_j \delta(s - t)$; $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Векторный марковский процесс $\mathbf{Z}(t)$ с компонентами $Z_1(t), \dots, Z_m(t)$ может быть в частном случае задан системой линейных СДУ

$$\left\{ \frac{dZ_i(t)}{dt} = -\sum_{l=1}^m a_{il}Z_l(t) + b_i N_i(t) + a_{0i}, Z_i(t_0) = Z_{i0}, (i = \overline{1, m}) \right\}. \quad (2.31)$$

В (2.31) a_{ip} , a_{oi} и b_i – постоянные коэффициенты, не зависящие от t и $Z_i(t)$; $N_i(t)$ и Z_{i0} определены выше; $i = 1, 2, \dots, m$.

В матричной форме (2.31) можно записать следующим образом:

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -AZ(t) + BN(t); \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (2.32)$$

где $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^m$; B – диагональная матрица с диагональными элементами

$$(b_1, \dots, b_m)^T; \quad Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T;$$

$$N(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))^T; \quad Z_0 = (Z_{10}, \dots, Z_{m0})^T.$$

Пусть случайный процесс $Z(t)$ описывается с помощью линейного СДУ m -го порядка

$$\sum_{i=0}^m a_{m-i}(t) \frac{d^i Z(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^l b_i(t) \frac{d^i N(t)}{dt^i}, \quad l < m, \quad (2.33)$$

$a_0(t) = 1$; $Z^i(t_0) = Z_0^i$ случайные величины, независящие от $N(t)$ и его производных при $t > t_0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Тогда $Z(t)$ есть *первая компонента m -мерного марковского процесса*.

Рассмотрим связь между одномерными марковскими процессами, являющимися решениями СДУ 1-го порядка (марковскими процессами в узком смысле) и КМ-процессами.

Теорема 2.5. Одномерный марковский процесс, представляющий собой решение линейного СДУ 1-го порядка (2.26) при $a_0(t) = 0$, $z(t_0) = 0$ является одновременно и КМ-процессом.

Доказательство теоремы приведено в приложении 3.

Теорема 2.6. Одномерный КМ-процесс с нулевым средним является одновременно и одномерным марковским процессом, представляющим собой решение линейного СДУ вида (2.26) при $a_0(t) = 0$, $z(t_0) = 0$.

Доказательство. Согласно [4], любую случайную функцию, ковариационная функция которой удовлетворяет (2.12), можно представить как случайную функцию, связанную с некоторым белым шумом линейным СДУ (2.26). Решение же (2.26) является марковский процесс 1-го порядка.

2.4. Анализ компонент векторного марковского процесса

В приложениях имеет важное значение знание свойств отдельных компонент векторного марковского процесса, а также характера связей между компонентами. Рассмотрим такие свойства компонент и связей между ними как марковость и дифференцируемость. В отличие от векторного стационарного процесса, все компоненты которого должны

быть стационарными и стационарно связанными, компоненты векторного марковского процесса могут быть немарковскими и немарковски связанными, точнее, все компоненты векторного марковского процесса являются марковскими и марковски связанными (в широком смысле) только в некоторых частных случаях, рассматриваемых ниже.

1. Как уже отмечалось, в общем случае, компоненты векторного марковского процесса могут быть марковскими и немарковскими, немарковские компоненты могут быть дифференцируемыми и недифференцируемыми в среднеквадратичном смысле (см. главу 1). Дифференцируемые компоненты всегда являются немарковскими (т.к. одномерный марковский процесс недифференцируем), а недифференцируемые компоненты могут быть как марковскими, так и немарковскими (рис. 2.1).

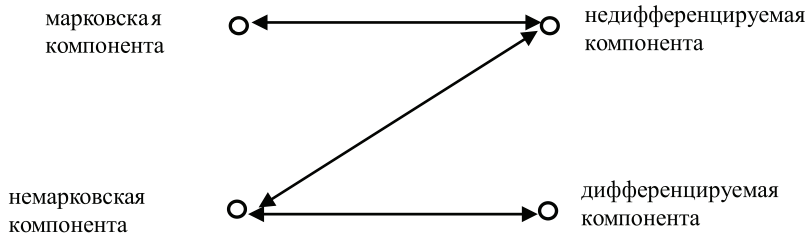


Рис. 2.1. Возможные сочетания свойств марковости и дифференцируемости у компонент векторного марковского процесса

Дальнейший анализ векторного марковского процесса удобно проводить на основе системы СДУ вида (2.30), описывающих этот процесс.

2. Если i -я компонента векторного марковского процесса описывается СДУ 1-го порядка вида (2.25) с белым шумом в правой части {при этом в (2.30) $f_i(\mathbf{Z}(t), t) = f_i(Z_i(t), t)$; $g_{ij}(\mathbf{Z}(t), t) = g_{ij}(Z_i(t), t)$; $i = 1$ }, то, очевидно, она будет марковской и недифференцируемой.

3. Если i -я компонента векторного марковского процесса описывается СДУ общего вида (2.30), когда $f_i(\cdot)$ и $g_i(\cdot)$ отличны от 0 и зависят не только от $Z_i(t)$, но и от других $Z_j(t)$ ($j \neq i$), то компонента $Z_i(t)$, очевидно, будет немарковской и дифференцируемой.

4. Если i -я компонента векторного марковского процесса описывается СДУ общего вида (2.30), но без белого шума в правой части { $g_{ij}(\mathbf{Z}(t), t) = 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$ }, то она будет немарковской и дифференцируемой.

5. Так как марковские процессы порождаются белым шумом, среди компонент векторного марковского процесса должна быть хотя бы одна

недифференцируемая компонента, т.е. хотя бы одно из уравнений системы (2.30) должно содержать в правой части белый шум.

6. Марковские компоненты могут быть независимы от других компонент, но немарковские компоненты должны быть связаны прямо или через другие компоненты с недифференцируемой компонентой, т.к. в противном случае процесс в целом не будет марковским.

7. Линейные связи между компонентами также могут быть марковскими, немарковскими и полумарковскими (см. выше определение 2.11 и замечание 2.3). Тут можно отметить следующие закономерности (рис. 2.2):

- а) связи между марковскими компонентами являются марковскими, так как в данном случае компоненты могут быть связаны только через белый шум;
- б) связи между немарковскими компонентами являются немарковскими;
- в) связи между марковскими и немарковскими компонентами являются полумарковскими, т.е. марковскими при $s < t$ и немарковскими при $s > t$ или наоборот.

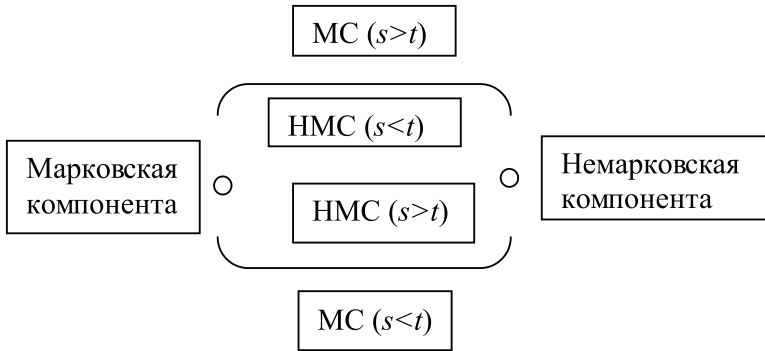


Рис. 2.2. Возможный характер связей между компонентами векторного марковского процесса (МС – марковская связь; НМС – немарковская связь)

В общем случае можно отметить, что немарковские связи осуществляются через функции $f_i(\mathbf{Z}(t), t)$, а марковские связи через функции $g_{ij}(\mathbf{Z}(t), t)$.

8. В частных случаях все компоненты векторного марковского процесса могут быть марковскими или все немарковскими.

Рассмотрим несколько важных частных случаев.

8.1. Все уравнения системы (2.30) представляют собой СДУ вида (2.25), т.е. векторный процесс $\mathbf{Z}(t)$ описывается системой

$$\left\{ \frac{dZ_i(t)}{dt} = f_i(Z_i(t), t) + g_i(Z_i(t), t)N_i(t), Z_i(t_0) = Z_{i0}, (i = \overline{1, m}) \right\}. \quad (2.34)$$

В этом случае, очевидно, все компоненты $Z(t)$ будут представлять собой одномерные марковские процессы и процесс $Z(t)$ в целом и все его компоненты будут недифференцируемыми. Что касается связей между компонентами, то тут можно отметить следующее (см. также рис. 2.3):

а) Если все белые шумы $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), входящие в правую часть всех уравнений (2.34), взаимно независимы (рис. 2.3а), то между уравнениями системы нет никакой связи, т.е. мы имеем векторный марковский процесс, состоящий из m независимых между собой марковских процессов.

б) Если $N_1(t) = \dots = N_m(t) = N(t)$, т.е. в правую часть всех уравнений (2.34) входит один и тот же белый шум $N(t)$ (рис. 2.3б), т.е. уравнения системы (2.34) связаны общим белым шумом. При этом векторный марковский процесс, представляющий собой решение (2.34) будет состоять из марковских и марковски связанных компонент.

Если операторы $F_1 = F_2 = \dots = F_m = F$, то мы будем иметь вырожденный векторный процесс, в котором при одинаковых начальных условиях $Z_{0i} = Z_0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), все компоненты будут функционально связаны друг с другом. При этом достаточно наблюдать за одной компонентой процесса, чтобы с вероятностью 1 предсказывать значения всех других компонент.

в) Если число белых шумов равно k , где $1 \leq k \leq m$, то часть белых шумов может быть общей для некоторых групп уравнений системы, а часть белых шумов будет входить в правую часть только одного уравнения системы (рис. 2.3в). При этом часть компонент векторного процесса будут независимыми одномерными марковскими процессами, а группы компонент, образованные общими белыми шумами – марковски связанными одномерными марковскими процессами.

8.2. Часть уравнений системы (2.30) представляет собой уравнения вида (2.25), а остальные уравнения имеют более общий характер (2.30). При этом компоненты, описываемые уравнениями вида (2.25) будут одномерными марковскими, а следовательно, недифференцируемыми процессами. Остальные компоненты процесса могут быть как дифференцируемыми, так и недифференцируемыми, в зависимости от того, входит белый шум в правую часть уравнений, определяющих эти компоненты или нет.

Связи между компонентами в зависимости от характера компонент могут быть марковскими, полумарковскими или немарковскими.

8.3. Ни одно из уравнений системы (2.30) не может быть представлено в виде (2.25). При этом ни одна из компонент векторного марковского процесса не может быть одномерным марковским процессом и, очевидно, все связи между компонентами также будут немарковскими.

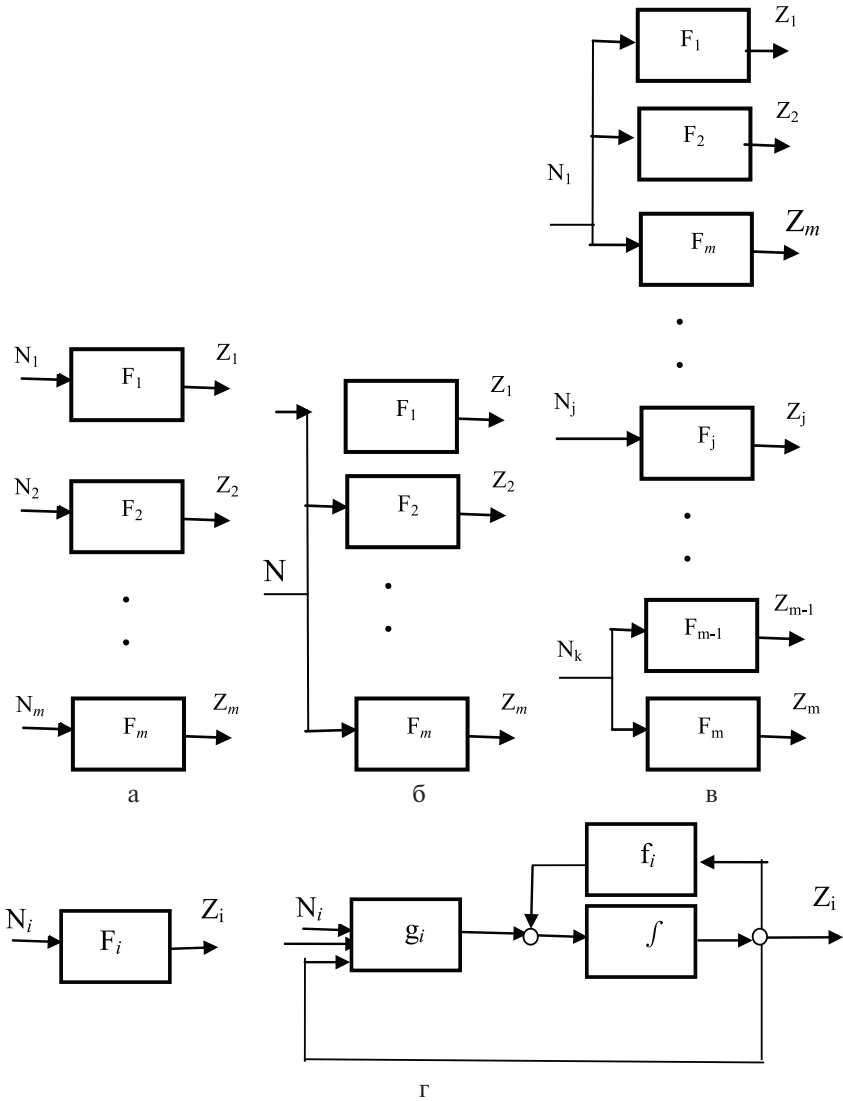


Рис. 2.3. Возможные комбинации воздействия белых шумов на m -мерную систему (k – число белых шумов):

а – $k = m$; б – $k = 1$; в – $1 \leq k \leq m$; г – детализованная схема блока F_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

При этом все компоненты процесса могут быть как дифференцируемыми, так и недифференцируемыми, в зависимости от присутствия или отсутствия белого шума в правой части соответствующего уравнения, но в связи с замечанием, приведенным выше, хотя бы одно из уравнений системы должно содержать белый шум, т.е. данная компонента будет недифференцируемой.

8.4. Важным частным случаем векторного марковского процесса является m -мерный процесс, в котором i -я компонента ($i = 1, 2, \dots, m$) является $(i - 1)$ -й производной $(m - 1)$ раз дифференцируемой первой компоненты. При этом, последняя компонента, являющаяся $(m - 1)$ -й производной первой компоненты, может быть как марковской, так и немарковской, но в любом случае – недифференцируемой.

2.5. Марковские процессы как модели реальных случайных процессов и аппроксимация немарковских процессов марковскими

В задачах исследования случайных процессов возникают естественные вопросы [37]:

- 1) какие из известных случайных процессов целесообразно использовать в качестве моделей исследуемых сигналов и помех;
- 2) насколько адекватна та или иная модель наблюдаемому процессу.

Ответ на второй вопрос можно получить в результате экспериментального определения характеристик реального процесса и сравнения их с характеристиками выбранной модели. В ряде случаев, о соответствии моделей реальным процессам можно судить и по результатам теоретических исследований, изучая физическую природу сигналов и их математические описания.

При выборе моделей случайных процессов необходимо учитывать не только точность аппроксимации выбранной моделью исследуемого процесса, но и простоту модели с точки зрения эффективного решения поставленных задач. Могут быть модели, хорошо аппроксимирующие реальные процессы, но являющиеся мало полезными из-за чрезмерной сложности алгоритмов их обработки. В то же время для марковских процессов ряд задач решается довольно просто.

Марковские процессы являются достаточно широким и в то же время гибким (в смысле возможностей математического исследования) классом случайных процессов. Марковские процессы можно использовать в качестве моделей гауссовских и негауссовских, коррелированных и некоррелированных, непрерывных и дискретных случайных сигналов и помех. В качестве вырожденных случаев сюда

входят также квазидетерминированные модели. Важными обстоятельствами являются сходимость при определенных условиях немарковского процесса к марковскому и возможность аппроксимации реальных процессов марковскими.

Наиболее удобными с точки зрения простоты построения алгоритмов обработки информации представляются одномерные марковские процессы. Использование одномерных марковских моделей позволяет во многих случаях резко сократить объем вычислений (см. главу 4) и сделать решение поставленной задачи тривиальным. Но, к сожалению, одномерные марковские процессы являются недифференцируемыми, поэтому ими нельзя адекватно описать многие реальные физические процессы, так как реальные случайные процессы практически всегда являются дифференцируемыми функциями времени из-за неизбежной инерционности всех систем.

Математические модели более полно отражающие свойства реальных процессов можно создать на основе многосвязных и многомерных марковских процессов.

Если случайный процесс $Z(t)$ удовлетворяет условию (2.3), то его всегда можно заменить m -связным марковским процессом. Образуя векторный процесс, можно заменить исходный процесс компонентой m -мерного простого марковского процесса. При этом указанная замена является точной.

Если условие (2.3) не выполняется, то для точной замены исходного процесса компонентой марковского потребовалось бы ввести бесконечно-связный или бесконечномерный марковские процессы. Однако при решении практических задач условие (2.3) почти всегда выполняется и поэтому реальные сигналы и помехи допускают исчерпывающее описание в рамках m -мерных марковских процессов.

Повышение степени связности (m) марковского процесса усложняет модели сигналов и помех, что влечет за собой усложнение алгоритмов обработки сигналов. Поэтому на практике представляет интерес задача выбора в качестве модели сигнала (помехи) сложных марковских процессов наименьшей связности.

Рассмотрим теперь несколько примеров реальных случайных процессов, которые нельзя адекватно описать одномерными марковскими процессами, но которые могут быть интерпретированы как первая компонента марковского процесса конечной размерности (связности). При этом, такая интерпретация в примерах (2.2)–(2.4) является точной, а в примерах 2.5 и 2.6 – приближенной.

Пример 2.2. В подавляющем большинстве случаев в технике приходится иметь дело со стационарными случайными процессами, закон

распределения ординат которых можно считать нормальным, а спектральная плотность достаточно хорошо аппроксимируется дробно-рациональной функцией. Но если нормальный стационарный процесс имеет дробно-рациональную спектральную плотность, то его можно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса, образованного нормальным стационарным процессом и его производными.

Пусть имеется нормальный стационарный случайный процесс с дробно-рациональной спектральной плотностью [7]:

$$S(\omega) = \frac{|P_l(j\omega)|}{|Q_m(j\omega)|^2}, \quad l < m, \quad (2.36)$$

где $Q_m(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$; $P_l(x) = b_0x^l + b_1x^{l-1} + \dots + b_l$.

Согласно спектральной теории стационарных случайных функций, процесс имеющий спектральную плотность вида (2.36) является стационарным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^m Z(t)}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1} Z(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_m Z(t) = b_0 \frac{d^l N(t)}{dt^l} + \dots + b_l N(t), \quad (2.37)$$

где $N(t)$ – белый шум с $EN(t) = 0$ и $EN(s)N(t) = \delta(s - t)$.

Представим (2.37) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого обозначим $Z(t) = Z_1(t)$ и введем $(m - 1)$ функций, связанных с $Z_1(t)$ и ее производными следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1(t) &= Z_2(t); \\ \dot{Z}_{m-l-1}(t) &= Z_{m-l}(t); \\ &\vdots \\ \dot{Z}_{m-l}(t) &= Z_{m-l+1}(t) + c_{m-l}N(t); \\ \dot{Z}_{m-1}(t) &= Z_m(t) + c_{m-1}N(t), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где произвольные постоянные c_{m-p} , c_{m-l+1} , ..., c_{m-1} выберем таким образом, чтобы после исключения из (2.37) старших производных $Z(t)$ путем замены их функциями $Z_i(t)$ по формулам (2.38) получилось уравнение первого порядка, не содержащее производных от $N(t)$:

$$\frac{dZ_m(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^m a_{m+1-i} Z_i(t) + c_m N(t), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.39)$$

Система из m линейных дифференциальных уравнений, включающая в себя (2.38) и (2.39), где $c_k = b_{k+l-m} - \sum_{i=1}^{k+l-1} a_i c_{k-i}$ ($k = m - 1, m - l + 1, \dots, m$), является частным случаем (2.31), т.е. определяет m -мерный марковский процесс. Таким образом, нормальный случайный процесс, обладающий дробно-рациональной спектральной плотностью, является первой компонентой m -мерного марковского процесса.

Пример 2.3. Покажем, что случайный процесс на выходе динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением m -го порядка при входном сигнале в виде белого шума, представляет собой компоненту m -мерного марковского процесса, образованного исследуемым случайным процессом и его $m - 1$ производной.

Пусть $Z(t)$ – случайный процесс, получающийся на выходе динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением m -го порядка общего вида, на вход которого воздействует белый шум $N(t)$:

$$\frac{d^m Z(t)}{dt^m} = F\left(t, N(t), \frac{dZ(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{m-1}Z(t)}{dt^{m-1}}\right). \quad (2.40)$$

Процесс $Z(t)$ не является марковским. Однако он представляет собой ком-поненту m -мерного марковского процесса $\mathbf{Z}(t) = (Z(t), Z_1(t), \dots, Z_{m-1}(t))^T$, описываемого системой:

$$\begin{aligned} \frac{dZ(t)}{dt} &= Z_1(t); \\ \frac{dZ_1(t)}{dt} &= Z_2(t); \\ \frac{dZ_{m-2}(t)}{dt} &= Z_{m-1}(t); \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\frac{dZ_{m-1}(t)}{dt} = F\{t, N(t), Z_1(t), \dots, Z_{m-1}(t)\}.$$

которая является частным случаем системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений (2.30). Отсюда $Z(t)$ является компонентой m -мерного марковского процесса.

Если уравнение является линейным и $N(t)$ – нормальный белый шум, то $Z(t)$ и все остальные компоненты $\mathbf{Z}(t)$ будут нормальными процессами.

Таким образом, многомерный марковский процесс можно наблюдать на выходе звена m -го порядка, на вход которого подан белый шум.

Если звено линейно и имеет постоянные параметры, то марковский процесс одновременно является стационарным и гауссовым.

Пример 2.4. Если процесс $N(t)$ не является белым шумом, но может быть представлен как решение дифференциального уравнения k -го порядка, в правую часть которого входит белый шум (в частности, если $N(t)$ является нормальным процессом с дробно-рациональной спектральной плотностью), то процесс $Z(t)$ можно представить как компоненту $(m + k)$ – мерного марковского процесса.

Частным случаем уравнения m -го порядка (2.40) является уравнение

$$\frac{d^m Z(t)}{dt^m} - a_1 \frac{d^{m-1} Z(t)}{dt^{m-1}} - \dots - a_m Z(t) = cN(t), \quad (2.42)$$

которое описывает случайный процесс с рациональной спектральной плотностью.

Пример 2.5. Пусть теперь дифференцируемый любое число раз случайный процесс $N(t)$, имеющий конечное время корреляции $\tau_k > 0$, нельзя представить в виде процесса, порожденного белым шумом. Тогда процесс $Z(t)$, определяемый уравнением (2.40), не будет являться компонентой многомерного марковского процесса. Однако марковская аппроксимация все же возможна и в данном случае.

Выберем моменты времени t_i , таким образом, чтобы

$$t_i - t_{i-1} \gg \tau_k, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

При этом случайные величины $N(t_i)$ можно считать приближенно независимыми. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что векторный процесс $\{Z(t_i), i = 1, 2, \dots\}$ с дискретным временем, полученный из процесса $Z(t) = (Z(t), Z_1(t), \dots, Z_{m-1}(t))^T$ с непрерывным временем, является приближенно m -марковским процессом. Чем сильнее удовлетворяются неравенства (2.43), тем точнее процесс $Z(t_i)$ аппроксимируется марковским.

Пример 2.6. В задачах оценивания характеристик ковариационных случайных процессов на основе конечного множества дискретных измерений, ковариационная матрица измерений полностью характеризует вероятностные характеристики процесса. При этом аппроксимация одного случайного процесса другим эквивалентна замене ковариационной матрицы наблюдаемого случайного процесса ковариационной матрицей аппроксимирующего процесса в тех же точках измерений. В главе 5 подробно рассматривается дискретный способ аппроксимации немарковских процессов m -связными марковскими процессами, который заключается в следующем. Ковариационная матрица измерений немарковского процесса K_n заменяется на ковариационную матрицу измерений

m -связного процесса K_n^m таким образом, что ленты шириной $2m + 1$ у обеих матриц совпадают, а остальные элементы матрицы K_n заменяются на элементы сопряженной матрицы K_n^m (т.е. матрицы K_n^m , элементы вне ленты которой рассчитываются с помощью элементов K_n , лежащих в пределах ленты). При этом полуширина ленты m может изменяться от 0 до $n - 1$ и определяет точность такой замены. Значение $m = 0$ можно интерпретировать как аппроксимацию наблюдаемого процесса белым шумом, дисперсия которого совпадает с дисперсией аппроксимируемого процесса. Значение $m = n - 1$ можно интерпретировать как совпадение наблюдаемого и аппроксимирующего процессов.

Таким образом, можно подобрать такое значение m , при котором будет достигаться определенный компромисс между точностью аппроксимации и сложностью обработки, которая, как правило, увеличивается при увеличении m .

Выводы по главе

1. Марковские процессы являются достаточно широким классом случайных процессов, позволяющим использовать их в качестве моделей многих реальных случайных процессов и сигналов, например, стационарных процессов, имеющих дробно-рациональную спектральную плотность, процессов на выходе динамических систем, возбуждаемых белым шумом и т.д. В то же время для марковских процессов ряд задач статистики случайных процессов решаются достаточно просто. Особенно это касается одномерных (простых) марковских процессов.

2. Так как известные определения марковских процессов в узком и широком смыслах не совсем удобны для решения поставленных в диссертации задач, вводится понятие простого, m -связного и векторного ковариационно марковских (КМ) процессов, в которых условие марковости накладывается на вид ковариационной функции процесса. Для нормальных случайных процессов с нулевым средним понятия марковский процесс в узком (обычном) смысле, марковский процесс в широком смысле и КМ-процесс совпадают. Классы КМ-процессов и марковских процессов в широком смысле совпадают для процессов с нулевым средним, независимо от закона распределения процесса.

Введены также определения марковски и полумарковски связанных в широком и ковариационном смыслах процессах.

Введение понятия КМ-процесса дает возможность исследовать с помощью аппарата марковских процессов достаточно широкий класс

немарковских в обычном смысле процессов, у которых свойству марковости удовлетворяет ковариационная функция процесса. Это весьма важно для эффективного решения задач параметрической идентификации математического ожидания КМ-процессов, когда в качестве модели математического ожидания процесса выбирается произвольная регрессионная функция.

3. Проведен анализ компонент векторного марковского процесса задаваемого системой стохастических дифференциальных уравнений. Показано, что в зависимости от характера отдельных компонент процесса (марковские или немарковские), связи между компонентами могут быть марковскими, полумарковскими и немарковскими. Проанализированы три схемы воздействия белых шумов на уравнения системы и влияния их на такие характеристики компонент как марковость и дифференцируемость, а также характер связей между компонентами.

4. Марковские процессы могут быть определены (заданы) различными способами:

- условными функциями или плотностями распределений;
- условными математическими ожиданиями;
- стохастическими дифференциальными уравнениями со случайными начальными условиями;
- условием на вид моментной функции второго порядка;
- условием на вид ковариационной функции процесса.

Первые два условия эквивалентны и задают марковский процесс в узком смысле. Четвертое условие определяет марковский процесс в широком смысле, а последнее (пятое) условие – ковариационно марковский (КМ) процесс.

3. ТИПОВЫЕ МАРКОВСКИЕ И КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассматриваются примеры марковских процессов, широко используемых в практике научных и инженерных исследований в качестве моделей реальных (физических) процессов и сигналов. Они также использованы в иллюстративных примерах и численных экспериментах в последующих главах. Выбрано прямое описание этих процессы с помощью стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Из изложенного видно, что большинство случайных процессов, используемых в приложениях, можно рассматривать как стационарные или нестационарные решения СДУ первого, второго и третьего порядков, т.е. как одномерные, двухмерные и трехмерные марковские процессы или компоненты двумерных и трехмерных марковских процессов.

Так как все рассматриваемые марковские процессы являются нормальными (как порождаемые нормальным белым шумом), то *ковариационные функции таких процессов определяют соответствующие КМ-процессы*. Но если для исходного марковского процесса вид математического ожидания однозначно определяется видом и значениями параметров СДУ, то для КМ-процесса вид математического ожидания не определен и в качестве его модели может быть выбрана произвольная функция, удовлетворяющая целям исследования.

3.1. Одномерные марковские и соответствующие им КМ-процессы

Марковские процессы, рассматриваемые в настоящем разделе, являются решениями уравнения [4]

$$\frac{dZ(t)}{dt} = a_1(t)Z(t) + a_0(t) + b(t)N(t); \quad Z(t_0) = Z_0, \quad (3.1)$$

все переменные которого определены в (2.26).

Ковариационные функции процессов, определяемых уравнением (3.1) при $Z_0 = 0$ $a_0(t) = 0$ могут быть вычислены с помощью формулы:

$$k(s, t) = \begin{cases} q_1(s)q_2(t) & t < s, \\ q_1(t)q_2(s) & t > s, \end{cases} \quad (3.2)$$

где
$$q_1(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau\right\}; \quad q_2(t) = q_1(t) \int_{t_0}^t \frac{b^2(\tau)}{q_1^2(\tau)} d\tau.$$

Замечание 3.1. Отметим, что частным случаем марковского процесса (с нулевой связностью) является сам белый шум $N(t)$, представляющий собой стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$k_N(s, t) = EN(s)N(t) = \sigma_N^2 \delta(s - t),$$

где σ_N^2 – интенсивность белого шума.

Пример 3.1. Нормальный нестационарный случайный процесс $W(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией [4]

$$k_W(s, t) = \sigma_W^2 \min(s, t), \quad (3.3)$$

где σ_W^2 – дисперсия (интенсивность) процесса при $s = t = 1$; $W(0) = 0$, называется стандартным винеровским процессом. Иногда стандартным винеровским процессом называют винеровский процесс с интенсивностью $\sigma_W^2 \equiv 1$.

Винеровский случайный процесс можно рассматривать как:

а) решение при $t_0 = 0$ СДУ 1-го порядка

$$\frac{dW}{dt} = N(t), \quad (3.4)$$

которое является частным случаем (3.1) при $a_1(t) = a_0(t) = 0$ и $b(t) = 1$, $N(t)$ – нормальный белый шум. Уравнение (3.4) можно записать также в виде $dW/dt = \sigma_N N(t)$, где $k_N(s, t) = \delta(s - t)$;

б) результат пропускания белого шума $N(t)$ со спектральной плотностью (интенсивностью) σ_N^2 через идеальный интегратор, т.е.

$$W(t) = \int_0^t N(\tau) d\tau. \quad (3.5)$$

Винеровский процесс является моделью многих процессов в физике, радиотехнике и других областях, например:

а) моделью случайного блуждания (броуновского движения) частицы в газе или жидкости;

б) моделью случайной фазы колебаний автогенератора при учете собственных тепловых и дробовых шумов элементов схемы автогенератора.

Пример 3.2. Нестационарный случайный процесс $W(t)$ с математическим ожиданием

$$m(t) = E\{W(t)\} = (t_0 - t)x/t_0 + y(t/t_0),$$

где x – значение процесса $W(t)$ в момент времени $t = 0$, y – значение процесса $W(t)$ в момент времени $t_0 > 0$ и ковариационной функцией

$$k(s, t) = \sigma_N^2 \min(s, t)(t_0 - \max(s, t))/t_0, \quad t_0 > s, t > 0 \quad (3.6)$$

является решением СДУ

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{t - t_0} W(t) + N(t); \quad Z(t_0) = 0,$$

($N(t)$ – белый шум с интенсивностью σ_N^2) и называется броуновским движением с закрепленными концами (*броуновский мост*) [27].

Таким образом, броуновский мост характеризует движение броуновской частицы, положения которой фиксированы в крайние моменты интервала времени $[0, t_0]$.

Пример 3.3. В общем случае можно рассматривать винеровский процесс более общего характера с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией (см. также определение 1.1 в гл.1) [4]:

$$k(s, t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 (\min(s, t))^{\alpha_i}, \quad (3.7)$$

где σ_i^2 и α_i – положительные числа. При $m = 1$ и $\alpha_i = 1$ мы имеем стандартный винеровский процесс (пример 3.1).

Винеровский процесс с ковариационной функцией (3.7) можно рассматривать как решение при $t_0 = 0$ и $Z_0 = 0$ СДУ

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{i=1}^m \left[\sqrt{\alpha_i t^{(\alpha_i-1)}} N_i(t) \right], \quad (3.8)$$

где $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) – белые шумы с интенсивностями σ_i^2 .

Функцию (3.7) можно получить также из (1.27) при

$$v(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^{m-1}.$$

При этом $\sigma_i^2 = a_{i-1}/i$; $\alpha_i = i$.

Пример 3.4. Стационарный случайный процесс $Z(t)$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$k(s, t) = k(s - t) = \sigma^2 \exp(-\alpha \tau), \quad \tau = |s - t|, \quad (3.9)$$

является стационарным решением (при $t \rightarrow \infty$ и нулевых начальных условиях) СДУ первого порядка

$$\frac{dZ(t)}{dt} + \alpha Z(t) = \gamma N(t), \quad (3.10)$$

которое является частным случаем (3.1) при $a_0(t) = 0$, $a_1(t) = -\alpha$ и $b(t) = \gamma$ и называется *стационарным марковским процессом* [4].

Постоянные коэффициенты σ в (3.9) и γ в (3.10) связаны соотношением $\gamma = \sigma\sqrt{2\alpha}$. При произвольной величине коэффициента γ и интенсивности белого шума, отличной от единицы, дисперсия σ^2 в (3.9) определяется по формуле:

$$\sigma^2 = \sigma_N^2 \gamma^2 / (2\alpha),$$

где σ_N^2 – интенсивность белого шума $N(t)$.

Замечание 3.2. Стационарный нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и экспоненциальной ковариационной функцией (3.9) является марковским процессом и, наоборот, стационарный марковский процесс с ковариационной функцией (3.9) является одновременно нормальным процессом.

Замечание 3.3. Марковский процесс с ковариационной функцией (3.9) является единственным представителем стационарных марковских процессов 1-го порядка [4].

Нормальный стационарный случайный процесс с ковариационной функцией (3.9) используется в качестве модели реальных случайных процессов практически во всех приложениях теории случайных процессов и полей.

В частности, процесс с ковариационной функцией (3.9) имеет место на выходе интегрирующей резистивно-емкостной (RC) цепи с постоянной времени $\alpha = 1/(RC)$, возбуждаемой стационарным нормальным белым шумом $N(t)$ единичной интенсивности (рис. 3.1).

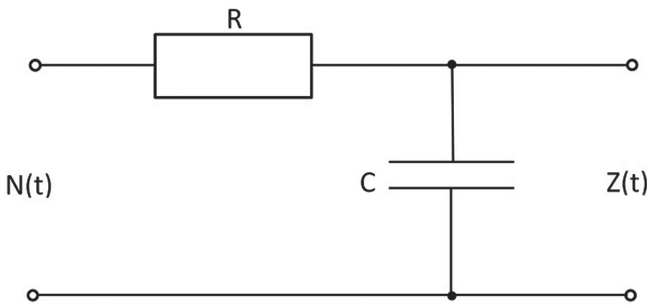


Рис. 3.1. Интегрирующая RC цепь

Процесс на выходе цепи описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$\frac{dZ(t)}{dt} + \frac{1}{RC}Z(t) = \frac{1}{RC}N(t), \quad (3.11)$$

являющимся частным случаем (3.10) при $\alpha = \gamma = 1/(RC)$. При этом в (3.9) дисперсия $\sigma^2 = 1/(2RC)$.

В [4–7, 20, 22, 27, 33–39 и др.] приведены другие многочисленные примеры случайных процессов, которые являются решениями уравнения (3.10) и служат моделями совершенно различных физических процессов. При этом параметры α и γ (или σ) в (3.10) могут иметь различный физический смысл и выражаться различными формулами, зависящими от физической природы и взаимосвязи параметров исследуемого объекта.

Это показывает, что одну и ту же ковариационную функцию, в частности, вида (3.9), могут иметь совершенно разные случайные процессы. Таким образом, КМ-процесс, определяемый ковариационной функцией (3.9) может использоваться в качестве модели весьма широкого класса реальных процессов и сигналов, имеющих различные распределения и математические ожидания.

Пример 3.5. Нестационарный нормальный марковский процесс $Z(t)$ с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha t)(1 - \exp(-2\alpha t')); \quad \tau = |s - t|; \quad t' = \min(s, t), \quad (3.12)$$

является нестационарным решением $Z(t)$ стохастического уравнения (3.10). При этом $\sigma^2 = \sigma_N^2 \gamma^2 / (2\alpha)$, где σ_N^2 – интенсивность белого шума $N(t)$. Математическое ожидание и дисперсия процесса $Z(t)$ определяются выражениями:

$$m(t) = Z_0 \exp(-\alpha t); \quad \sigma^2(t) = \sigma^2(1 - \exp(-2\alpha t)). \quad (3.13)$$

Выражение (3.12) можно записать также несколько в другом виде:

$$k(s, t) = \sigma^2 (\exp(-\alpha|\tau|) - \exp(-\alpha(t_1 + t_2))); \quad \tau = s - t. \quad (3.14)$$

Процесс с ковариационной функцией (3.12) часто используют для описания процесса амплитудных флуктуаций (дробового эффекта) напряжения на выходе электронной схемы, представляющей собой RC -цепь, на вход которой воздействует белый шум эффективности σ_N^2 .

Пример 3.6. Нестационарный случайный процесс $Z(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t) = Z_0 \exp(-\alpha(t - t_0))$ и ковариационной функцией

$$k(s, t) = \sigma^2 \exp(\alpha(t_2 - t_0)) \cdot (\exp(\alpha(t_1 - t_0)) - 1), \quad (3.15)$$

$$t_2 = \max(s, t); \quad t_1 = \min(s, t),$$

является нестационарным решением уравнения (3.1) при $a_0(t) = 0$, $a_1(t) = \alpha$ и $b(t) = \sigma \sqrt{\alpha} \exp(\alpha(t - t_0)/2)$, т.е. уравнения

$$\frac{dZ(t)}{dt} - \alpha Z(t) = \sigma \sqrt{\alpha} \exp(\alpha(t - t_0)/2) N(t); \quad Z_0 = Z(t_0), \quad (3.16)$$

где $N(t)$ – белый шум единичной эффективности; $\sigma_0^2 = 0$.

Дискретный случайный процесс $Z_i = Z(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ с ковариационной функцией

$$k(t_i, t_j) = Z_0 \exp(\alpha(t_2 - t_0))(\exp(\alpha(t_1 - t_0)) - 1); \quad Z_0 = Z(t_0), \quad (3.17)$$

$$t_2 - \max(t_i, t_j); \quad t_1 - \min(t_i, t_j),$$

представляющий собой дискретный аналог (3.15), называется *процессом чистого рождения* [167] и используется в задачах изучения законов размножения популяций. При этом переменные в (3.17) имеют следующий физический смысл: Z_i – размер популяции в момент времени t_i ($t_i > t_0$); Z_0 – размер популяции в момент времени t_0 ; α – константа асимптотического коэффициента рождения.

Пример 3.7. Нестационарный случайный процесс с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \sigma^2 \min^\alpha(s, t) \max^\beta(s, t) = (st)^\beta \min^{\alpha-\beta}(s, t), \quad (3.18)$$

где σ^2 – положительные вещественные числа, α и β – вещественные числа, причем $\alpha > \beta$, является решением СДУ

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{\beta}{t} Z(t) + \sigma \sqrt{\alpha - \beta} t^{(\alpha+\beta-1)/2} N(t), \quad (3.19)$$

которое является частным случаем (3.1) при $a_0(t) = 0$, $a_1(t) = \beta/t$ и $b(t) = \lambda t^\gamma$, где $\lambda = \sigma \sqrt{\alpha - \beta}$ и $\gamma = (\alpha + \beta - 1)/2$; $N(t)$ – белый шум единичной эффективности.

Если заданным является дифференциальное уравнение

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{\beta}{t} Z(t) + \lambda t^\gamma N(t), \quad (3.20)$$

с произвольными вещественными параметрами β , λ , γ и эффективностью белого шума $N(t)$ равной 1, то ковариационная функция процесса $Z(t)$ определяется выражениями:

$$k(s, t) = \sigma^2 \min^\alpha(s, t) \max^\beta(s, t) = (st)^\beta \min^{\alpha-\beta}(s, t) \quad \text{при } \gamma - \beta \neq -1/2$$

и $k(s, t) = \sigma^2 \min^\beta(s, t) \max^\beta(s, t) \ln(\min(s, t)) = \sigma^2 (st)^\beta \min^{\alpha-\beta}(s, t)$ (3.21)
при $\gamma - \beta = -1/2$.

В (3.21): $\alpha = 2\gamma - \beta + 1$; $\sigma^2 = \lambda^2/(2\gamma - 2\beta + 1)$ или $\sigma^2 = \lambda^2(\alpha - \beta)$. Так как α имеет смысл среднеквадратического отклонения, т.е. должно быть положительным, то $\gamma - \beta > -1/2$, или, что тоже самое, $\alpha > \beta$.

Если $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, то ковариационную функцию (3.18) иногда записывают в виде

$$k(s, t) = \sigma^2 \frac{\min^\alpha(s, t)}{\max^\mu(s, t)} = \sigma^2 \frac{\min^{\alpha+\mu}(s, t)}{(st)^\mu}, \quad (3.22)$$

где $\mu = (-\beta) > 0$.

При $\beta < 0$ и $\alpha = -\beta = \mu$, из (3.22) следует, что $k(t, t) = \sigma^2 = \text{const}$, т.е. получается, что решение дифференциального уравнения

$$\frac{dZ(t)}{dt} = -\frac{\mu}{t} Z(t) + \sigma \sqrt{2\mu/t} N(t); \quad \mu > 0, \quad (3.23)$$

является нестационарным процессом с постоянной дисперсией σ^2 .

В частном случае, при $\alpha = 1$; $\beta = -2$ [63] функция (3.22) является ковариационной функцией процесса $Z(t)$, имеющего место на выходе RC фильтра (рис. 3.1) при подаче на его вход белого шума, если сопротивление R линейно изменяется во времени как $R = R(t) = t/2$. При этом

$$\frac{dZ(t)}{dt} + \frac{2}{t} Z(t) = \frac{2}{t} N(t). \quad (3.24)$$

Если $N(t)$ – белый шум с эффективностью $\sigma_N^2 = 3/4$, то

$$k(s, t) = \sigma_N^2 k(s, t) = 3 \frac{\min(s, t)}{\max^2(s, t)} = 3 \frac{\min^3(s, t)}{(st)^2}$$

и совпадает с выражением для $k(s, t)$, приведенным в [63].

Замечание 3.4. Ковариационные функции всех рассмотренных одномерных марковских процессов удовлетворяют условию (см. (2.12)) $k(s, t) = k(s, \tau)k(\tau, t)/k(\tau, \tau)$, $s < \tau < t$, т.е. определяют соответствующие одномерные КМ-процессы.

Но как отмечалось в предисловии к данной главе, если математическое ожидание и распределение исходного марковского процесса однозначно определены видом СДУ и законом распределения порождающего белого шума, то КМ-процесс полностью определяется ковариационной функцией, удовлетворяющей условию (2.12). При этом на закон распределения и вид математического ожидания КМ-процесса никаких ограничений не накладывается. Это позволяет решать задачи параметрической идентификации в рамках корреляционной теории случайных процессов, выбирая произвольную модель математического ожидания процесса, исходя из целей эксперимента. При этом суммарный процесс

с учетом математического ожидания, в общем случае, уже не будет марковским в обычном смысле.

Представим ковариационные функции, приведенные выше в примерах 3.1–3.7, в виде (3.2), т.е. найдем для них функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$:

1) если $k(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$, то $q_1 = 1, q_2 = \sigma^2 t$;

2) если $k(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)(t_0 - \max(s, t))/t_0, t_0 > s, t > 0$, то $q_1(t) = (t_0 - t)/t_0, q_2 = \sigma^2 t$;

3) если $k(s, t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 (\min(s, t))^{\alpha_i}$, то $q_1 = 1, q_2(t) = \sigma^2 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 t^{\alpha_i}$;

4) если $k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |s - t|)$, то $q_1 = \exp(-\alpha t), q_2(t) = \sigma^2 \exp(\alpha t)$;

5) если $k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |s - t|)(1 - \exp(-2\alpha t'))$, $t' = \min(s, t)$, то $q_1 = \exp(-\alpha t), q_2(t) = \sigma^2(\exp(\alpha t) - \exp(-\alpha t))$;

6) если $k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha(t_2 - t_0))(\exp(\alpha(t_1 - t_0)) - 1)$, где $t_2 = \max(s, t); t_1 = \min(s, t)$, то $q_1 = \exp(-\alpha(t - t_0)); q_2(t) = \sigma^2(\exp(\alpha(t - t_0)) - 1)$;

7) если $k(s, t) = \sigma^2 \min^\alpha(s, t) \max^\beta(s, t)$, то $q_1 = t^\beta, q_2(t) = \sigma^2 t^\alpha$.

3.2. Двумерные марковские процессы, их компоненты и соответствующие им КМ-процессы

На практике достаточно часто используются модели на основе двумерных марковских процессов (марковских процессов 2-го порядка) $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$, описываемых системой линейных СДУ с постоянными коэффициентами (см. рис. 3.2а)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= a_{11}Z_1(t) + a_{12}Z_2(t) + b_{11}N_1(t) & Z_1(t_0) &= Z_{10} \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= a_{21}Z_1(t) + a_{22}Z_2(t) + b_{22}N_2(t) & Z_2(t_0) &= Z_{20} \end{aligned} \right\}, \quad (3.25)$$

где $N_1(t)$ и $N_2(t)$ – белые шумы с интенсивностями σ_{1N}^2 и σ_{2N}^2 ; Z_{10} и Z_{20} – случайные начальные условия, не зависящие от $N_1(t)$ и $N_2(t)$ при $t > t_0$.

Отметим, что компоненты двумерного марковского процесса, определяемого системой (3.25), в общем случае, не являются одномерными марковскими процессами, так как «будущее» каждой компоненты определяется не только значением этой компоненты в данный момент времени, но и значением второй компоненты в этот же момент времени. Но если a_{12} или (и) a_{21} равны 0, то соответствующие (или обе) компоненты будут марковскими. Если b_{11} или b_{22} равны 0, то соответствующая

компонента будет дифференцируемой (оба коэффициента b_{11} или b_{22} не могут одновременно равняться 0 (см. ниже)).

Чтобы система (3.25) задавала двумерный марковский процесс, коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} , b_{11} и b_{22} должны удовлетворять определенным ограничениям. Во-первых, коэффициенты b_{11} и b_{22} не должны одновременно равняться 0. Кроме того, если a_{12} и a_{21} равны 0, то оба коэффициента при белых шумах b_{11} и b_{22} должны быть отличны от 0. И, наконец, если $b_{11} = 0$, то a_{12} не должно равняться 0, если $b_{22} = 0$, то a_{21} не должно равняться 0.

Наиболее часто в качестве моделей реальных случайных сигналов используются процессы, представляющие собой первую компоненту двумерного марковского процесса, т.е. решение первого уравнения системы (3.25) при $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$, которое можно записать в виде линейного СДУ 2-го порядка (рис. 3.26)

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dZ(t)}{dt} + a_0 Z(t) = b_1 \frac{dN(t)}{dt} + b_0 N(t), \quad (3.26)$$

где $Z(t) = Z_1(t)$; $a_1 = -(a_{11} + a_{22})$; $a_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

$$b_1 = b_{11}; \quad b_0 = b_{22}a_{12} - b_{11}a_{22}; \quad Z(t_0) = Z_{10}; \quad \dot{Z}(t_0) = a_{11}Z_{10} + a_{12}Z_{20}.$$

Процесс $Z(t)$ не является марковским в обычном смысле (т.е. одномерным марковским процессом), так как будущее процесса зависит не только от значения $Z(t)$ в данный момент времени, но и от значения $\dot{Z}(t)$ в этот же момент времени.

Если нас интересует только первая компонента $Z(t) = Z_1(t)$ двумерного марковского процесса $\mathbf{Z}(t)$, то уравнение (3.26) удобнее интерпретировать как первую компоненту другой более простой системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= a_{11}Z_1(t) + a_{12}Z_2(t) + b_{11}N_1(t) & Z_1(t_0) &= Z_{10} \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= a_{22}Z_2(t) + b_{22}N_2(t) & Z_2(t_0) &= Z_{20} \end{aligned} \right\}, \quad (3.27)$$

являющейся частным случаем (3.25) при $a_{21} = 0$. Коэффициенты (3.26) и (3.27) связаны следующим образом:

$$a_{11} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) / 2; \quad a_{22} = \left(-a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) / 2; \quad b_{11} = b_1;$$

$a_{12}b_{22} - a_{22}b_{11} - b_0$. При этом, чтобы коэффициенты a_{11} , a_{12} , a_{22} , b_{22} были вещественными при вещественных a_0 , a_1 , b_0 , должно выполняться условие $a_1^2 \geq 4a_0$.

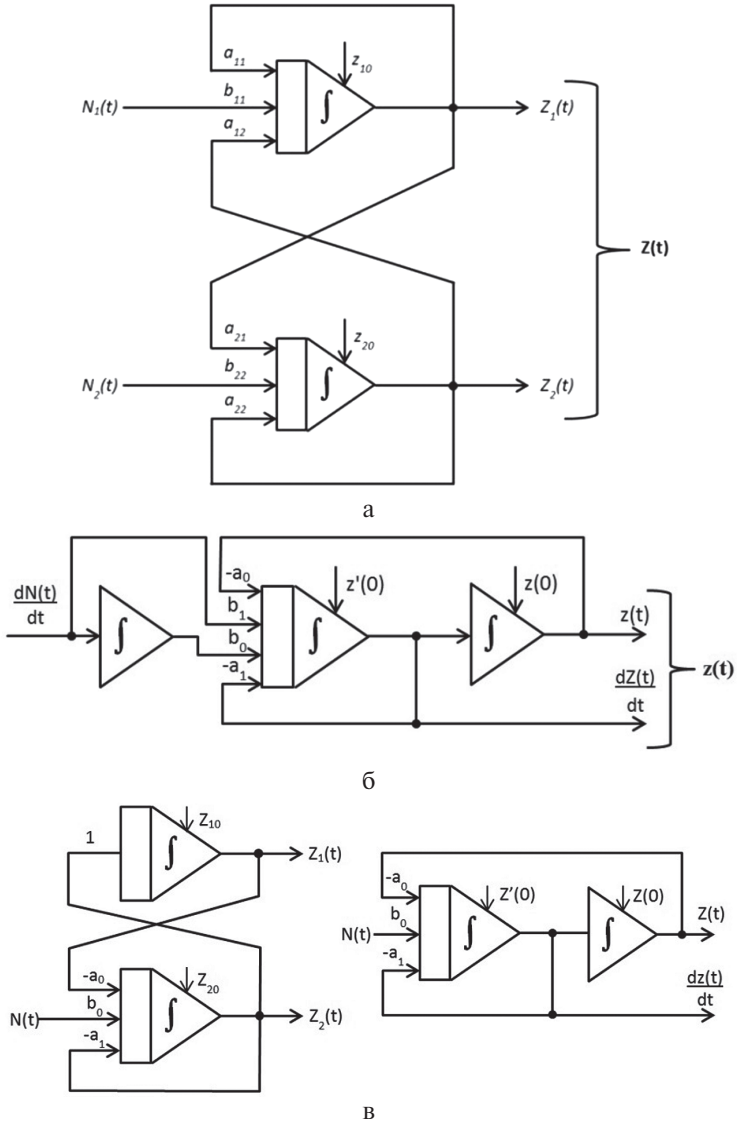


Рис. 3.2. Структурные схемы линейных динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями (3.25) – рис. (а); (3.26) – рис. (б); (3.28) при $b_1 = 0$ – рис. (в)

Представление (3.26) в виде системы (3.27) удобно тем, что для (3.27) вторая компонента $Z_2(t)$ векторного процесса $\mathbf{Z}(t)$ при $a_{22} > 0$ и $b_{22} > 0$ будет представлять собой одномерный нормальный марковский процесс с ковариационной функцией

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 [\exp(-\alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t))]$$

или в стационарном случае

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|),$$

где $\sigma^2 = \sigma_N^2 b_{22}^2 / (2a_{22})$; $\tau = s - t$; σ_N^2 — интенсивность белого шума.

В этом случае, при $b_{11} = 0$ ковариационную функцию первой компоненты и взаимные ковариационные функции компонент можно найти с помощью формул ($t_0 = 0$, $EZ(0) = 0$):

$$k_{11}(s, t) = a_{12}^2 \int_0^s \int_0^t u(t, \tau_1) k_{22}(\tau_1, \tau_2) u(s, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2;$$

$$k_{12}(s, t) = a_{12} \int_0^t u(t, \tau) k_{22}(\tau, s) d\tau; \quad k_{21}(s, t) = a_{12} \int_0^s u(s, \tau) k_{22}(t, s) d\tau,$$

где $u(t, \tau) = \exp(a_{11}(t - \tau))$.

Иногда (3.26) удобнее представлять в виде первой компоненты системы

$$\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t) = Z(t);$$

$$Z_2(t) = \dot{Z}_1(t) - b_1 N(t))^T; \text{ (рис. 3.2в):}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= Z_2(t) + b_1 N(t) & Z_1(t_0) &= Z_{10} \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= -a_1 Z_2(t) - a_0 Z_1(t) + b_{22} N(t) & Z_2(t_0) &= Z_{20} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

где $b_{22} = b_0 - a_1 b_1$.

Представление (3.26) в виде (3.28) удобно тем, что при $b_1 = 0$, первая компонента полученного двумерного процесса является дифференцируемым немарковским процессом, а вторая компонента есть производная от первой компоненты. При этом, если известна ковариационная функция первой компоненты $k_{11}(s, t)$, то ковариационную функцию второй компоненты $k_{22}(s, t)$ и взаимные ковариационные функции $k_{12}(s, t)$ и $k_{21}(s, t)$ легко получить путем вычисления соответствующих производных от $k_{11}(s, t)$. То есть зная $k_{11}(s, t)$ можно найти все элементы матричной ковариационной функции $K(s, t)$ векторного процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Пример 3.8. Стационарный случайный процесс $Z(t)$ с ковариационной функцией

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (\cos \beta \tau + \gamma \sin \beta |\tau|), \tau = s - t, |\gamma| \leq \alpha / \beta, \quad (3.29)$$

можно интерпретировать как стационарное решение СДУ 2-го порядка,

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dZ(t)}{dt} + (\alpha^2 + \beta^2)Z(t) = \sigma \sqrt{2(\alpha - \gamma\beta)} \left(\frac{dN(t)}{dt} + \mu N(t) \right) \quad (3.30)$$

где $\mu = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \gamma\beta) / (\alpha - \gamma\beta)}$; $N(t)$ – стационарный белый шум с ковариационной функцией $\delta(t)$ и спектральной плотностью $1/2\pi$; α, β, γ и δ – положительные величины.

Уравнение (3.30) является частным случаем уравнения (3.26) при $a_1 = 2\alpha$; $a_0 = \alpha^2 + \beta^2$; $b_0 = \sigma \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \gamma\beta)}$; $b_1 = \sigma \sqrt{2(\alpha - \gamma\beta)}$, т.е. $Z(t)$ можно рассматривать как первую компоненту двумерного марковского процесса, в частности, описываемого системами (3.27) или (3.28). В представлении (3.27) при $\beta \neq 0$, коэффициенты $a_{11}, a_{22}, a_{12}, b_{22}$ будут комплексными, так как $a_1^2 - 4a_0 = -4\beta^2 < 0$.

1) При предельном значении параметра $\gamma, \gamma = \alpha/\beta$ случайный процесс $Z(t)$ становится среднеквадратично дифференцируемым и имеет часто используемую в приложениях ковариационную функцию

$$k(s, t) = k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau|), \tau = s - t. \quad (3.31)$$

При этом дифференциальное уравнение (3.30) принимает вид

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dZ(t)}{dt} + (\alpha^2 + \beta^2)Z(t) = 2\sigma \sqrt{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)} N(t). \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) можно представить в виде системы (3.28) с дифференцируемой первой компонентой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ(t)}{dt} &= Z_1(t) \\ \frac{dZ_1(t)}{dt} + 2\alpha Z_1(t) + (\alpha^2 + \beta^2)Z(t) &= \gamma N(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

где $\gamma = 2\sigma(\alpha(\alpha^2 + \beta^2))^{1/2}$. Векторный марковский процесс, описываемый данной системой, представляет собой совокупность двух немарковских и немарковски связанных компонент, первая из которых, имеющая ковариационную функцию (3.31), является дифференцируемой, а вторая – недифференцируемой.

Элементы матричной ковариационной функции для системы (3.33) можно найти путем вычисления первой и второй производной по τ от (3.31) (см. Приложение 2, пункт Б3).

Случайный процесс $Z(t)$, являющийся решением (3.32) используется в качестве модели сигнала на выходе последовательного RLC контура при подаче на его вход белого шума единичной интенсивности (см. рис. 3.3)

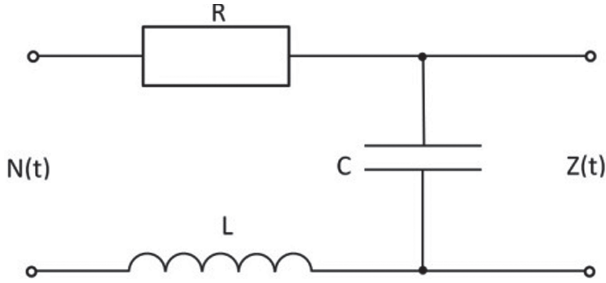


Рис. 3.3. Последовательный RLC контур

Действительно, сигнал $Z(t)$ на выходе RLC контура описывается СДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \frac{2}{L} \frac{dZ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Z(t) = \frac{1}{LC} N(t), \quad (3.34)$$

являющегося частным случаем (3.32) при $\alpha = R/(2L)$,

$$\sigma = 1/\sqrt{2CR} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} / 2\sqrt{\alpha}; \quad \beta = (1/2L)\sqrt{(4L - CR^2)/C}.$$

При этом характер возможных реализаций процесса $Z(t)$ в зависимости от природы белого шума $N(t)$, может быть самым различным.

2) При $R = 0$ дифференциальное уравнение, описывающее сигнал на выходе RLC контура (рис. 3.3) при подаче на его вход белого шума единичной интенсивности принимает вид

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \beta^2 Z(t) = \beta^2 N(t), \quad (3.35)$$

где $\beta = \sqrt{1/LC}$.

Ковариационная функция процесса $Z(t)$, являющегося нестационарным решением уравнения (3.35) при нулевых начальных условиях и интенсивности белого шума, равной σ_N^2 , имеет вид [4]:

$$k(s, t) = \frac{\sigma_N^2 \beta}{2} [\beta \min(s, t) \cos(\beta(s - t)) - \sin(\beta \min(s, t)) \cos(\beta \max(s, t))] \quad (3.36)$$

Уравнение (3.35) можно представить в виде первой компоненты системы вида (3.27). Матричная ковариационная функция такого двумерного процесса приведена в приложении 2, пункт Б9.

3) Ковариационная функция случайного процесса, являющегося нестационарным решением уравнения (3.32), т.е. ковариационная функция нестационарного выходного сигнала RLC контура (рис. 3.3) при входном сигнале $N(t)$ в виде белого шума эффективности σ_N^2 и нулевых начальных условиях имеет вид:

$$k(s, t) = \frac{\mu}{4\alpha} \left\{ \frac{\mu}{\beta^2} [\exp(-\alpha |s - t|) - \exp(-\alpha(s + t))] \cos(\beta(s - t)) + \right. \\ \left. + \exp(-\alpha(s + t)) \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos(\beta(s + t)) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta(s + t)) \right] - \right. \\ \left. - \exp(-\alpha |s - t|) \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos(\beta(s - t)) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta |s - t|) \right] \right\}, \quad (3.37)$$

($\mu = \alpha^2 + \beta^2$). При $t \rightarrow \infty$ функция (3.37) принимает вид (3.31).

Пример 3.9. Стационарный недифференцируемый случайный процесс с другой часто встречающейся ковариационной функцией

$$k(s, t) = k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau, \quad \tau = s - t, \quad (3.38)$$

можно интерпретировать как стационарное решение СДУ

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dZ(t)}{dt} + (\alpha^2 + \beta^2) Z(t) = \sigma \sqrt{2\alpha} \left(\frac{dN(t)}{dt} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} N(t) \right) \quad (3.39)$$

при нулевых начальных условиях.

Можно видеть, что уравнение (3.39) является частным случаем дифференциального уравнения (3.30) при $\gamma = 0$.

Случайный процесс $Z(t)$, являющийся решением СДУ (3.39) часто служит моделью процесса на выходе последовательного контура высокой добротности, возбуждаемого гауссовым белым шумом.

Уравнение (3.37) сводится к системе двух СДУ вида (3.28):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} - Z_2(t) &= \sigma \sqrt{2\alpha} N(t) \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} + (\alpha^2 + \beta^2) Z_1(t) + 2\alpha Z_2(t) &= \sigma \sqrt{2\alpha} \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - 2\alpha \right) N(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Векторный процесс (3.40) представляет собой совокупность двух недифференцируемых немарковских процессов. При этом значения $Z_2(t)$ можно заменить значениями производной $Z_1(t)$ смешанным с белым шумом:

$$Z_2(t) = \frac{dZ_1(t)}{dt} - \sigma \sqrt{2\alpha} N(t).$$

При $\beta > 0$ уравнение (3.39) нельзя привести к виду (3.28) с вещественными коэффициентами, так как $a_1^2 - 4a_0 = -4\beta^2 < 0$.

Пример 3.10. Стационарный дифференцируемый случайный процесс с ковариационной функцией вида

$$k(s, t) = k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|)(1 + \alpha |\tau|), \quad \tau = s - t, \quad (3.41)$$

можно считать стационарным решением при нулевых начальных условиях СДУ второго порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dZ(t)}{dt} + \alpha^2 Z(t) = 2\sigma\alpha \sqrt{\alpha} N(t), \quad (3.42)$$

являющегося частным случаем уравнения (3.32) при $\beta \rightarrow 0$.

Дифференциальное уравнение (3.42) приводится к системе вида (3.27) с вещественными коэффициентами

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} + \alpha Z_1(t) = \alpha \sqrt{2} Z_2(t); \quad \frac{dZ_2(t)}{dt} + \alpha Z_2(t) = \sigma \sqrt{2\alpha} N(t). \quad (3.43)$$

Стационарное решение второго уравнения этой системы соответствует одномерному марковскому процессу с ковариационной функцией $k_1(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |s - t|)$. Матричные ковариационные функции, соответствующие стационарному и нестационарному решению системы (3.43), приведены в приложении 2, пп. Б.4а и Б.14а.

Очевидно, уравнение (3.42) можно привести также к виду (3.28) (см. Приложение 2, п. Б.4 и Б.14).

Пример 3.11. Стационарный нормальный дифференцируемый случайный процесс с приближенно независимыми при $\beta \gg \alpha$ приращениями на неперекрывающихся интервалах с ковариационной функцией:

$$k(s, t) = k(\tau) = \sigma^2 (\alpha \exp(-\beta |\tau|) - \beta \exp(-\alpha |\tau|)), \quad (3.44)$$

можно интерпретировать как стационарное решение при $t \rightarrow \infty$ СДУ 1-го порядка

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} + \alpha Z_1(t) = \alpha Z_2(t), \quad Z_1(0) = Z_{10}. \quad (3.45)$$

Однако здесь $Z_2(t)$ не белый шум, а нормальный марковский стационарный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$k_2(s, t) = k_2(\tau) = \sigma_2^2 \exp(-\beta |\tau|), \quad \tau = s - t. \quad (3.46)$$

При этом $\sigma^2 = \sigma_2^2 / (\alpha(\alpha^2 - \beta^2))$. Такой процесс имеет место на выходе интегрирующей RC цепочки, если на ее вход воздействует стационарный белый шум.

Последняя ковариационная функция соответствует случайному процессу, являющемуся стационарным решением СДУ (3.10). При этом, если в (3.10) ковариационная функция белого шума имеет вид $k_N(s, t) = \sigma_N^2 \delta(s - t)$, то $\sigma_2^2 = \sigma_N^2 \gamma^2 / (2\beta)$, где σ_N^2 – интенсивность белого шума. Таким образом, (3.10) и (3.46), рассматриваемые совместно, определяют двухкомпонентный марковский процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} + \alpha Z_1(t) &= \alpha Z_2(t) & Z_1(0) &= Z_{10} \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} + \beta Z_2(t) &= \gamma N(t) & Z_2(0) &= Z_{20} \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Для системы (3.47) значения процесса $Z_2(t)$ можно найти через значения $Z_1(t)$ с помощью соотношения $Z_2(t) = (1/\alpha) \dot{Z}_1(t) + Z_1(t)$.

Компоненту $Z_1(t)$ можно представить в виде одного СДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dZ(t)}{dt} + \alpha\beta Z(t) = \alpha\gamma N(t), \quad (3.48)$$

где $Z(t) = Z_1(t)$; $Z(0) = Z_{10}$; $\dot{Z}(0) = \alpha(Z_{20} - Z_{10})$.

Уравнение (3.48) можно представить также в виде системы (3.28):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= Z_2(t), \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} + (\alpha + \beta)Z_2(t) + \alpha\beta Z_1(t) &= \alpha\gamma N(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

где $Z_1(t) = Z(t)$.

Таким образом, процесс $Z(t)$ можно представить в виде первой компоненты двух различных двумерных марковских процессов, компонента $Z_1(t) = Z(t)$ которых является дифференцируемым немарковским процессом, а компонента $Z_2(t)$ является марковским (для (3.47)) или недифференцируемым немарковским (для (3.49)) процессом.

Матричные ковариационные функции двумерных марковских процессов, являющихся стационарными решениями систем (3.47) и (3.49) приведены в приложении 2, пп. Б.5а и Б.5, соответственно.

Пример 3.12. Нестационарный нормальный дифференцируемый случайный процесс $Z(t)$ с приближенно независимыми при $\beta \gg \alpha$ приращениями на неперекрывающихся интервалах с ковариационной функцией (3.49):

$$k(s, t) = \frac{\sigma_2^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\begin{array}{l} \exp(-\beta |\tau|) - \frac{\beta}{\alpha} \exp(-\alpha |\tau|) + \\ + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \exp(-\alpha(t+s)) - \exp(-\alpha t - \beta s) - \exp(\alpha s - \beta t) \end{array} \right], \quad (3.50)$$

где $\tau = s - t$, можно рассматривать как нестационарное решение уравнения (3.48). При этом дисперсия и математическое ожидание процесса $Z(t)$ определяются выражениями:

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma_2^2}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \exp(-2\alpha t) - 2 \exp(-(\alpha + \beta)t) \right]; \quad (3.51)$$

$$m(t) = Z_0 \exp(-\alpha t).$$

Матричные ковариационные функции нестационарных двумерных марковских процессов, являющихся решениями систем (3.47) и (3.49) приведены в приложении 2, пп. Б.10а и Б.10, соответственно.

Пример 3.13. Нестационарный случайный процесс $Z(t)$ более общего характера по сравнению со случайными процессами, рассмотренными в примерах 3.11 и 3.12, имеющий ковариационную функцию (3.52):

$$k(s, t) = \sigma_{20}^2 \exp(-\alpha(s+t-2t_0)) + \frac{\sigma_2^2}{\alpha^2 - \beta^2} \times \left[\begin{array}{l} \exp(-\beta |\tau|) - \frac{\beta}{\alpha} \exp(-\alpha |\tau|) + \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \exp(-\alpha(t+s-2t_0)) - \\ - \exp(-\alpha(t-t_0) - \beta(s-t_0)) - \exp(\alpha(s-t_0) - \beta(t-t_0)) \end{array} \right], \quad (3.52)$$

где $\tau = s - t$, можно считать решением дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + (\alpha + \beta) \frac{dZ(t)}{dt} + \alpha\beta Z(t) = \alpha \sqrt{2\sigma_1^2 \beta} N(t) + \alpha\beta(a + bt) + \alpha b, \quad (3.53)$$

при $Z(t_0) = Z_0$ и $EZ_0^2 = \sigma_{20}^2$.

Уравнение (3.53) можно представить в виде первой компоненты системы СДУ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} + \alpha Z_1(t) &= \alpha Z_2^0(t) + \alpha(a + bt) \\ \frac{dZ_2^0(t)}{dt} + \beta Z_2^0(t) &= \sqrt{2\sigma_2^2 \beta} N(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

где $Z_1(t) = Z(t)$; $Z_2^0(t) = Z_2(t) - m_2(t) = Z_2(t) - (a + bt)$ – центрированная составляющая процесса $Z_2(t)$; $N(t)$ – белый шум единичной интенсивности; σ_2^2 – дисперсия процесса $Z_2(t)$ (или $Z_2^0(t)$); α, β, a, b – постоянные коэффициенты; $Z_1(t_0) = Z_{10}$ – случайная величина, независимая от $Z_2(t)$, с дисперсией σ_{20}^2 .

Уравнение (3.53) можно также представить в виде системы (3.28), где

$$b_1 = 0; \quad a_1 = (\alpha + \beta); \quad a_0 = \alpha\beta; \quad c = \alpha\sqrt{2\sigma_2^2 \beta} N(t) + \alpha\beta(a + bt) + \alpha b.$$

Математическое ожидание процесса $Z(t)$ при этом определяется формулой

$$m_z(t) = (m_0 - a - bt_0 + b/\alpha) \exp(-\alpha(t - t_0)) + (a - b/\alpha + bt), \quad (3.55)$$

где m_0 – математическое ожидание $Z(t)$ при $t = t_0$.

В частном случае при $\alpha = \beta$ (см. также приложение 2, п. Б.11):

$$m_z(t) = (m_0 - a - bt_0 + b/a) \exp(-\alpha(t - t_0)) + (a - b/\alpha + bt), \quad (3.56a)$$

$$\begin{aligned} k(s, t) &= \sigma_{20}^2 \exp(-\alpha(s + t - 2t_0)) + \frac{\sigma_2^2}{2} \times \\ &\times [\exp(-\alpha|\tau|)(1 + \alpha|\tau|) - \exp(-\alpha(s + t - 2t_0))(1 - \alpha(s + t - 2t_0))], \end{aligned} \quad (3.56b)$$

Процесс $Z(t)$ может служить моделью сигнала на выходе следящей системы, представляющей собой интегратор с усилителем, обладающим коэффициентом усиления α и с отрицательной обратной связью, при подаче на его вход сигнала $Z_2(t)$, который представляет собой случайную функцию с математическим ожиданием $m_1(t) = (a + bt)$ и ковариационной функцией $k(s, t) = \sigma_2^2 \exp(-\beta|\tau|)$ (рис. 3.4).

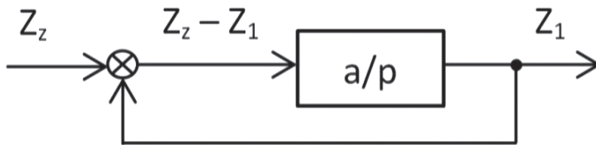


Рис. 3.4. Схема следящей системы

Считается, что начальное значение выходного сигнала представляет собой случайную величину Z_{10} , независимую от $Z_2(t)$.

Пример 3.14. Нестационарный нормальный дифференцируемый случайный процесс $Z(t)$ с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \left[2\alpha \cdot \min(s, t) + 2 \exp(-\alpha s) + 2 \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha |s - t|) - \right. \\ \left. - \exp(-\alpha(s + t)) - 2 \right] \quad (3.57)$$

можно рассматривать как решение СДУ второго порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dZ(t)}{dt} = \sigma \sqrt{2\alpha} N(t), \quad (3.58)$$

являющегося частным случаем (3.26) при $a_0 = b_1 = 0$, $a_1 = \alpha$, $b_0 = \sigma \sqrt{2\alpha}$.

СДУ (3.58) можно представить в виде системы двух СДУ первого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= Z_2(t), \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= -\alpha Z_2(t) + \sigma \sqrt{2\alpha} N(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где $Z(t) = Z_1(t)$.

Известно, что решением второго уравнения системы (3.59) является нормальный марковский процесс $Z_2(t)$ с экспоненциальной ковариационной функцией $k(s, t) = \sigma^2 [\exp(-\alpha |s - t|) - \exp(-\alpha(s + t))]$. Это можно проверить вычислив $\partial^2 k_1(s, t) / (\partial s \partial t)$ или $\partial^2 k_1(s, t) / (\partial t \partial s)$. Таким образом, наблюдаемый случайный процесс $Z(t) = Z_1(t)$ можно интерпретировать как процесс на выходе интегрирующего звена при подаче на его вход одномерного нормального марковского процесса с ковариационной функцией $k_2(s, t)$, т.е.

$$Z(t) = \int_0^t Z_2(\tau) d\tau,$$

где $Z_2(t)$ – нормальный марковский процесс. Матричная ковариационная функция системы (3.59) приведена в приложении 2, п. Б.12.

Если $Z_2(t)$ – стационарный процесс с ковариационной функцией $k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |s - t|)$, то ковариационная функция $Z_1(t)$ будет иметь вид

$$k(s, t) = \frac{2\sigma^2}{\alpha} \min(s, t) + \frac{\sigma^2}{\alpha^2} [\exp(-\alpha s) + \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha |s - t|) - 1]. \quad (3.60)$$

Матричная ковариационная функция такого двумерного процесса приведена в приложении 2, п. Б.13.

У векторного процесса $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$, где $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ определяются из (3.59), компонента $Z_1(t)$ является немарковским дифференцируемым процессом, а компонента $Z_2(t)$ – одномерным марковским процессом. Связи между $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ будут марковскими при $s > t$ и немарковскими при $s < t$ или наоборот.

Пример 3.15. Нестационарный дифференцируемый процесс $Z(t)$ с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \frac{\sigma_N^2}{2} [st \cdot \min(s, t) - (1/3) \min^3(s, t)] \quad (3.61)$$

можно рассматривать как решение при нулевых начальных условиях СДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} = N(t), \quad (3.62)$$

где $N(t)$ – белый шум с интенсивностью σ_N^2 . Такой процесс, согласно [33] называется винеровским процессом второго порядка.

СДУ (3.62) можно представить в виде системы

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = Z_2(t); \quad \frac{dZ_2(t)}{dt} = N(t), \quad (3.63)$$

где $Z(t) = Z_1(t)$.

Таким образом, процесс $Z(t)$ является первой компонентой двумерного марковского процесса $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$.

Ковариационная функция $Z_2(t)$ и взаимные ковариационные функции процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ приведены в приложении 2, п. Б.8.

Первая компонента векторного марковского процесса, описываемого системой (3.63), представляет собой немарковский дифференцируемый процесс (винеровский процесс 2-го порядка), а вторая – марковский (а, следовательно, недифференцируемый) процесс (стандартный винеровский процесс). Связь между процессами $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ является марковской при $s < t$ и немарковской при $s > t$, а связь между $Z_2(t)$ и $Z_1(t)$, наоборот, марковской при $s > t$ и немарковской при $s < t$.

Пример 3.16. Нестационарный случайный процесс $Z(t)$ с ковариационной функцией

$$k(s, t) = 2 \min(t) - (1/\alpha) \exp(-\alpha |s - t|) \quad (3.64)$$

можно рассматривать как решение при $t \rightarrow \infty$ уравнения

$$\frac{dZ_2(t)}{dt} + \alpha Z_2(t) = \sigma \sqrt{2\alpha} N(t), \quad (3.65)$$

или как сумму двух независимых марковских случайных процессов $\overset{\approx}{Z}_1(t)$ и $\overset{=}{Z}_2(t)$:

$$Z(t) = \sqrt{2} \overset{\approx}{Z}_1(t) + \sqrt{(1/\alpha)} \overset{=}{Z}_2(t), \quad (3.66)$$

где $\overset{\approx}{Z}_1(t)$ – нестационарный процесс с ковариационной функцией $k_1(s, t) = \min(s, t)$, т.е. стандартный винеровский процесс, а $\overset{=}{Z}_2(t)$ – стационарный процесс с ковариационной функцией $k_2(s, t) = \exp(-\alpha |\tau|)$ ($\tau = s - t$), т.е. стационарный марковский процесс.

Процесс $Z(t)$ не является марковским, но может быть представлен в виде первой компоненты двумерного марковского процесса $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$, являющегося решением системы СДУ при $t \rightarrow \infty$:

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = Z_2(t); \quad \frac{dZ_2(t)}{dt} + \alpha Z_2(t) = \alpha \sqrt{2} N(t). \quad (3.67)$$

При этом $k_1(s, t) = k(s, t)$, а ковариационная функция второй компоненты и взаимные ковариационные функции компонент имеют вид

$$\begin{aligned} k_2(s, t) &= \exp(-\alpha |\tau|), \quad (\tau = s - t); \\ k_{12}(s, t) &= \begin{cases} \exp(-\alpha \tau) & \text{при } s > t, \\ 2 - \exp(\alpha \tau) & \text{при } s < t, \end{cases} \\ k_{21}(s, t) &= \begin{cases} 2 - \exp(-\alpha \tau) & \text{при } s > t, \\ \exp(\alpha \tau) & \text{при } s < t. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Пример 3.17. Пусть случайная функция $Z(t)$ определяется СДУ

$$\frac{d^2 Z_1(t)}{dt^2} + \alpha Z_1(t) = \gamma Z_2^2(t); \quad Z_{20}(0) = 0, \quad (3.69)$$

где $Z_2(t)$ – нормальная стационарная функция с $EZ_2(t) = 0$ и $k_2(\tau) = \sigma_2^2 \exp(-\alpha |\tau|)$ ($\tau = s - t$).

Так как нормальный процесс с экспоненциальной ковариационной функцией является также и марковским процессом (см. замечание 3.2), то $Z_2(t)$ – марковский процесс, определяемый уравнением

$$\frac{dZ_2(t)}{dt} + \alpha Z_2(t) = \sigma_2^2 \sqrt{2\alpha} N(t), \quad (3.70)$$

где $k_N(\tau) = \delta(\tau)$ ($\sigma_N \equiv 1$).

Таким образом, функции $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ определяются системой двух уравнений первого порядка, в правую часть одного из которых входит белый шум $N(t)$. Следовательно, $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ есть компоненты двумерного марковского процесса.

3.3. Некоторые трехмерные и многомерные (m -мерные) марковские и КМ-процессы

Пример 3.18. Нестационарный дифференцируемый случайный процесс с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \frac{\sigma_N^2}{12} \left[\frac{\min^5(s, t)}{10} + (st)^2 \min(s, t) - \frac{st}{2} \min^3(s, t) \right], \quad (3.71)$$

можно рассматривать как решение СДУ 3-го порядка

$$\frac{d^3 Z(t)}{dt^3} = N(t) \quad (3.72)$$

при нулевых начальных условиях.

Уравнение (3.72) можно представить в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = Z_2(t); \quad \frac{dZ_2(t)}{dt} = Z_3(t); \quad \frac{dZ_3(t)}{dt} = N(t), \quad (3.73)$$

где $N(t)$ – белый шум с интенсивностью σ_N^2 .

Векторный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), Z_3(t))^T$, описываемый системой (3.73), является трехмерным марковским процессом, у которого компонента $Z_1(t)$ представляет собой винеровский процесс 3-го порядка, компонента $Z_2(t)$ – винеровский процесс 2-го порядка (см. выше, пример 3.15) и компонента $Z_3(t)$ – обычный винеровский процесс 1-го порядка (см. пример 3.1).

Элементы матричной ковариационной функции трехмерного марковского процесса (3.73) приведены в приложении 2, п. В.2.

Пример 3.19. Пусть векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t)$ описывается системой СДУ вида

$$\left\{ \frac{dZ_i(t)}{dt} = \sigma_i N_i(t) \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.74)$$

где $N_i(t)$ – белые шумы единичной эффективности, т.е. $\mathbf{Z}(t)$ состоит из совокупности одномерных винеровских процессов $W_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) (см. пример 3.1) и может быть назван m -мерным винеровским процессом.

Матричную ковариационную функцию процесса $\mathbf{Z}(t)$ можно найти следующим образом. Из (3.74) можно записать $Z_i(t) = \sigma_i \int_0^t N_i(\tau) d\tau$ и $Z_j(t) = \sigma_j \int_0^t N_j(\tau) d\tau$. Но тогда взаимная ковариационная функция

$$\begin{aligned} k_{ij}(s, t) &= E\{Z_i(s)Z_j(t)\} = \sigma_i \sigma_j E \int_0^s N_i(\tau_1) d\tau_1 \int_0^t N_j(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \sigma_i \sigma_j \int_0^s \int_0^t E N_i(\tau_1) N_j(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \sigma_i \sigma_j \begin{cases} s, & \text{при } s < t \\ t, & \text{при } s > t \end{cases} = \sigma_i \sigma_j \min(s, t) \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $E\{N_i(t)\} = 0$ и

$$E\{N_i(s)N_j(t)\} = \delta_i(s-t) = \delta_j(s-t) = \delta(s-t).$$

Таким образом, матричная ковариационная функция $K(s, t)$ процесса $\mathbf{Z}(t)$ имеет вид

$$K(s, t) = [\sigma_i \sigma_j \min(s, t)]_{i, j=1}^m \quad (3.75)$$

В зависимости от вида белых шумов $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), здесь возможны различные структуры матрицы $K(s, t)$ (см. раздел 2.4).

1) Если $N_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) – взаимно независимые белые шумы, т.е. $\delta(s-t) = 0$ при $i \neq j$ (см. рис. 2.3а), то отдельные уравнения системы (3.74) никак не связаны друг с другом и процесс $\mathbf{Z}(t)$ представляет собой совокупность независимых друг от друга одномерных винеровских процессов $W_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$). При этом матрица $K(s, t)$ будет диагональной с диагональными элементами $k_{ii}(s, t) = \sigma_i^2 \min(s, t)$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

2) Если $N_1(t) = N_2(t) = \dots = N_m(t) = N(t)$ (см. рис. 2.3б), т.е. в правую часть всех уравнений (3.74) входит один и тот же белый шум $N(t)$, то компоненты $\mathbf{Z}(t)$ будут связаны через общий белый шум. В этом случае, все компоненты $\mathbf{Z}(t)$ являются марковскими и марковски связанными в широком смысле. При этом все элементы матрицы $K(s, t)$ будут ненулевыми и определяются выражением (3.75), но матрица $K(s, t)$ будет особенной (вырожденной).

3) В наиболее общем случае, число независимых белых шумов $N_i(t)$ может лежать в пределах от 1 до m ($1 \leq i \leq m$) (рис. 2.3в). При этом часть компонент (3.74) будут винеровскими процессами и матричная ковариационная функция будет иметь нули в соответствующих позициях.

Пример 3.20. Рассмотрим векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t)$, описываемый системой

$$\left\{ \frac{dZ_i(t)}{dt} = -\alpha_i Z_i(t) + \gamma_i N_i(t) \right\}, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.76)$$

Матричную ковариационную функцию можно найти аналогично тому, как это было сделано в примере 3.19. Из (3.76) можно записать

$$Z_i(t) = -\alpha_i \int_0^t Z_i(\tau) d\tau + \gamma_i \int_0^t N_i(\tau) d\tau, \quad Z_i(t_0) = Z_{i0}. \quad (3.77)$$

Решение уравнения (3.1), частным случаем которого является (3.77), имеет вид [4]:

$$Z_i(t) = u_i(t, t_0) Z_{i0} + \int_{t_0}^t u_i(t, \tau) a_{i0}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t u_i(t, \tau) b_i(\tau) N_i(\tau) d\tau,$$

где $u(t, \tau)$ – решение однородного уравнения $\dot{u} = \alpha u$. В нашем случае $a_{i0}(t) = 0$; $b_i(t) = \gamma_i$; $u_i(t, \tau) = \exp(-\alpha_i(t - \tau))$. Для вычисления ковариационной функции достаточно принять $t_0 = 0$ и $Z_{i0} = 0$, тогда

$$Z_i(t) = \gamma_i \int_0^t \exp(-\alpha_i(t - \tau)) N_i(\tau) d\tau.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} k_{ij}(s, t) &= E\{Z_i(s)Z_j(t)\} = \gamma_i \gamma_j E \int_0^s \exp(-\alpha_i(s - \tau_1)) N_i(\tau_1) d\tau_1 \times \\ &\quad \times \int_0^t \exp(-\alpha_j(t - \tau_2)) N_j(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \gamma_i \gamma_j E \int_0^s \int_0^t \exp(-\alpha_i(s - \tau_1)) \exp(-\alpha_j(t - \tau_2)) E[N_i(\tau_1)N_j(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha_i + \alpha_j} \begin{cases} \exp(-\alpha_i(t - s)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s) & \text{при } s < t. \\ \exp(-\alpha_j(s - t)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s) & \text{при } s > t. \end{cases} \end{aligned}$$

При выводе $k_{ij}(s, t)$ учтено, что $E\{N_i(s)N_j(t)\} = \delta(s - t)$.

Таким образом, элементы $k_{ij}(s, t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) матричной ковариационной функции $K(s, t)$ векторного марковского процесса $\mathbf{Z}(t)$, описываемого системой (3.76) при $i \geq j$, определяются формулой

$$k_{ij}(s, t) = \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha_i + \alpha_j} \begin{cases} \exp(-\alpha_i(t - s)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s) & \text{при } s < t. \\ \exp(-\alpha_j(s - t)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s) & \text{при } s > t. \end{cases} \quad (3.78)$$

Элементы матрицы $K(s, t)$ можно найти из соотношения $k_{ji}(s, t) = k_{ij}(t, s)$. При этом надо учесть, что $s < t$ заменяется на $s > t$ и наоборот.

Здесь, как и в примере 3.19, возможны три различные структуры матрицы $K(s, t)$.

Функции $k_{ij}(s, t)$ удовлетворяют условию (2.12) при всех i и j . Таким образом, все компоненты процесса $\mathbf{Z}(t)$ являются марковскими и марковски связанными процессами (по крайней мере в ковариационном смысле).

Элементы ковариационной матрицы $K(s, t)$, соответствующие стационарному решению системы (3.76) можно получить из (3.78) при $t \rightarrow \infty$:

$$k_{ij}(s, t) = \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha_i + \alpha_j} \begin{cases} \exp(-\alpha_i(t-s)) & \text{при } s < t, \\ \exp(-\alpha_j(s-t)) & \text{при } s > t, \end{cases} \quad i \geq j; \quad (3.79)$$

$$k_{ji}(s, t) = k_{ij}(t, s).$$

В частном случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha$ и $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_m = \gamma$, все ковариационные функции и взаимные ковариационные функции (если они не равны нулю) процесса $\mathbf{Z}(t)$ будут определяться одной и той же формулой:

$$k_{ij}(s, t) = \frac{\gamma^2}{2\alpha} [\exp(-\alpha |s-t|) - \exp(-\alpha(s+t))], \quad (i, j = 1, 2, \dots, m). \quad (3.80)$$

Пример 3.21. Рассмотрим двумерный случайный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$, заданный системой

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= -\sigma_1 N_1(t), \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= -\alpha Z_2(t) + \sigma_2 \sqrt{2\alpha} N_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

в котором при $Z_{10} = Z_{20} = 0$ и $t_0 = 0$ первая компонента

$$Z_1(t) = Z_{10} + \sigma_1 \int_0^t N_1(\tau) d\tau, \quad (3.82)$$

представляет собой стандартный винеровский процесс с ковариационной функцией $k_{11}(s, t) = \sigma_1^2 \min(s, t)$, а компонента

$$Z_2(t) = Z_{20} \exp(-\alpha(t-t_0)) + \sigma_2 \sqrt{2\alpha} \int_0^t \exp(-\alpha(t-\tau)) N_2(\tau) d\tau \quad (3.83)$$

есть марковский процесс с ковариационной функцией

$$k_{22}(s, t) = \sigma_2^2 [\exp(-\alpha |s-t|) - \exp(-\alpha(s+t))]. \quad (3.84)$$

Если $N_1(t) = N_2(t) = N(t)$ (оба процесса $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ порождаются одним и тем же белым шумом $N(t)$), то взаимная ковариационная функция процессов $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ будет иметь вид

$$k_{12}(s, t) = EZ_1(t)Z_2(t) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\alpha} \begin{cases} \exp(-\alpha(t-s)) - \exp(-\alpha t) & \text{при } s < t. \\ 1 - \exp(-\alpha(s-t)) & \text{при } s > t. \end{cases} \quad (3.85)$$

$$k_{21}(s, t) = EZ_2(t)Z_1(t) = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\alpha} \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha(s-t)) & \text{при } s < t. \\ \exp(-\alpha(t-s)) - \exp(\alpha t) & \text{при } s > t. \end{cases} \quad (3.86)$$

Каждая из функций $k_{11}(s, t)$, $k_{12}(s, t)$, $k_{21}(s, t)$, $k_{22}(s, t)$ в отдельности удовлетворяет условию (2.12), а матричная ковариационная функция $K(s, t)$ — условию (2.24), т.е. мы имеем пример двумерного марковского процесса с марковскими компонентами и марковскими связями между компонентами. Процесс $\mathbf{Z}(t)$ является марковским в широком смысле ($m_1(t) = m_2(t) = 0$) и ковариационно марковским процессом.

Выводы по главе

1. Описано свыше 20 примеров одно-, дву-, трех- и многомерных нормальных марковских процессов. Из этих примеров видно, что значительное количество реальных случайных процессов, встречающихся в самых различных областях приложений (в частности, радиотехнике, метеорологии, гидрологии и т.п.) может быть описано с помощью марковских моделей. Математический аппарат теории марковских процессов достаточно хорошо разработан и позволяет успешно и довольно просто решать многие задачи статистики случайных процессов, в частности, задачи фильтрации и идентификации марковских процессов по данным наблюдений.

2. Большинство случайных процессов, широко используемых в качестве моделей физических процессов и сигналов являются решениями линейных стохастических дифференциальных уравнений первого и второго порядков с постоянными коэффициентами (см. примеры 3.1, 3.4, 3.5, 3.8–3.21).

3. Многие скалярные процессы, которые не являются одномерными марковскими процессами, представляют собой компоненты векторных марковских процессов. Это позволяет при их исследовании использовать аппарат марковских процессов. Важным частным случаем таких скалярных процессов являются $(m - 1)$ раз дифференцируемые процессы, которые в совокупности со своими производными представляют собой m -мерный марковский процесс.

4. Достаточно часто скалярные немарковские процессы можно представить в виде первой компоненты нескольких различных векторных марковских процессов. При этом для аппроксимации такого скалярного немарковского процесса может быть выбран любой из векторных процессов. Обычно критерием такого выбора является простота решения задачи. В частности, стационарные нормальные случайные процессы, имеющие ковариационные функции вида

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau;$$

$$k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (\cos \beta \tau + (\alpha / \beta) \sin \beta |\tau|);$$

и
$$k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|),$$

используемые практически во всех приложениях, представляют собой первые компоненты двумерных марковских процессов. Первые две из приведенных функций, в совокупности с ковариационной функцией стационарного марковского процесса $k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|)$, важны еще и потому [4], что с помощью линейной комбинации конечного числа этих функций можно представить с любой заданной точностью ковариационную функцию любого стационарного случайного процесса.

5. Ковариационные функции всех рассмотренных марковских процессов удовлетворяют скалярному (2.12) или векторному (2.13) марковским условиям, т.е. определяют соответствующие скалярные или векторные КМ-процессы. Но в отличие от исходных марковских процессов, КМ-процессы не накладывают никаких ограничений на вид закона распределения и математического ожидания процесса. Поэтому они определяют более широкий класс процессов, не ограниченных условием нормальности, и включающих в себя как марковские, так и немарковские в обычном смысле процессы. Для многих задач статистики случайных процессов, полностью определяемых ковариационной функцией, аппарат КМ-процессов более удобен и прост, чем аппарат обычных марковских процессов.

4. КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОСТЫХ КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (КМ-ПРОЦЕССОВ)

В данной главе рассматриваются марковские процессы для которых матрица, обратная ковариационной матрице измерений процесса является трехдиагональной или разреженной с числом ненулевых элементов не превышающим $3n - 2$.

Показано, что одним из таких классов случайных процессов являются ковариационно марковские процессы, совпадающие для процессов с нулевым средним с марковскими процессами в широком смысле. Матрица, обратная ковариационной матрице измерений ковариационно марковского процесса, имеет в общем случае не более $3n - 2$ ненулевых элементов, а для измерений, упорядоченных в порядке возрастания (убывания) координат точек измерений, принимает трехдиагональный вид. Это позволяет существенно облегчить нахождение оптимальных ОМНК-оценок. Особенно сильно вычисления упрощаются при переходе к рекуррентным процедурам ОМНК и равномерной дискретизации измерений. Приводятся примеры, подтверждающие справедливость полученных результатов.

В процессе решения поставленной задачи получен ряд результатов в области матричного анализа, в частности найден один из классов матриц, обращение которых приводит к трехдиагональным матрицам

4.1. Постановка задачи

В качестве примера возможных приложений получаемых результатов рассматривается задача линейной фильтрации случайного процесса с помощью дискретных оптимальных оценок ОМНК (т.е. оценок ОМНК, совпадающих в рамках поставленной задачи с НЛНО). Но получаемые результаты имеют более широкую область применения. Например, они могут быть использованы в любых дискретных задачах статистики случайных процессов (в том числе нелинейных), в которых вероятностные свойства процесса определяются ковариационной матрицей значений процесса в точках измерений.

Пусть наблюдается случайный процесс, описываемый моделью

$$Z(t) = Y(t) + V(t) = \eta(t) + \xi(t) + V(t), \quad t \in T, \quad (4.1)$$

представляющий собой сумму полезного (фильтруемого) $Y(t)$ и шумового $V(t)$ случайных процессов, удовлетворяющих предположениям:

$$EY(t) = \eta(t) = \eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t); \quad E\xi(t) = 0; \quad EV(t) = 0, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))^T$ – вектор известных линейно-независимых детерминированных функций; $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ – вектор неизвестных параметров; T – область действия (4.1).

Таким образом, наблюдаемый процесс $Z(t)$ в области T представляет собой сумму полезного детерминированного процесса $\eta(t)$, описываемого линейно-параметризованной моделью, известной с точностью до параметров \mathbf{B} , и центрированных процессов $\xi(t)$ и $V(t)$, из которых $\xi(t)$ является полезным, а $V(t)$ – шумовым.

Предположим, что поставлена задача на основе эксперимента, представляющего собой дискретные измерения в интервале $T_u \subset T$ одной реализации $z(t)$ процесса $Z(t)$ найти оптимальные ОМНК-оценки значений процесса $Y(t)$ в заданной области $T_0 \subset T$. Промежуточным этапом этой задачи фильтрации является поиск оптимальных ОМНК-оценок аддитивных составляющих $\eta(t)$ и $\xi(t)$ процесса $Y(t)$ и вектора параметров \mathbf{B} .

При проведении эксперимента могут использоваться различные дискретные схемы измерений, которые мы будем называть n -точечными планами эксперимента:

- 1) общего вида $\varepsilon_n = \{t_1, \dots, t_n \mid t_i \neq t_j; i, j = 1, 2, \dots, n\}$;
- 2) возрастающими $\varepsilon_n^> = \{t_1, \dots, t_n \mid t_1 < \dots < t_n\}$;
- 3) равномерными $\varepsilon_n^p = \{t_1, \dots, t_n \mid t_{i+1} = t_i + i\Delta; i = 1, 2, \dots, n-1\}$,

где Δ – интервал между точками измерений. Для всех планов $t_i \in T_u \subset T$.

При решении поставленной задачи будем считать, что нам известны ковариационные функции $k_z(s, t) = E\{z(s) - Ez(s)\}\{z(t) - Ez(t)\}$ и $k_{zy}(s, t) = E\{z(s) - Ez(s)\}\{y(t) - Ey(t)\}$. Тогда оптимальная ОМНК-оценка процесса $Y(t)$ по измерениям $Z(t)$ в точках плана ε_n , определяется выражениями [145]:

$$\hat{y}_n(t) = \hat{\xi}_n(t) + \hat{\eta}_n(t), \quad (4.3)$$

$$\text{где} \quad \hat{\xi}_n(t) = \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_n, t) \mathbf{K}_n^{-1}(\mathbf{z}_n - \mathbf{F}_n^T \mathbf{B}_n) \quad (4.4)$$

– оптимальная ОМНК-оценка центрированного процесса $\xi(t)$;

$$\hat{\eta}_n(t) = \mathbf{f}^T(t) \hat{\mathbf{B}}_n; \quad (4.5)$$

– оптимальная ОМНК-оценка детерминированного процесса $\eta(t)$;

$$\hat{\mathbf{B}}_n = D_n F_n K_n^{-1} \mathbf{z}_n \quad (4.6)$$

– оптимальная ОМНК-оценка вектора параметров \mathbf{B} .

В (4.3)–(4.6): $\mathbf{z}_n = (z(t_1), \dots, z(t_n))^T$ – вектор измерений $Z(t)$ в точках ε_n ; $F_n = [\mathbf{f}(t_1), \dots, \mathbf{f}(t_n)]$ – матрица значений вектора $\mathbf{f}(t)$ в точках ε_n ; K_n^{-1} – матрица, обратная ковариационной матрице K_n вектора измерений \mathbf{z}_n ; $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_n, t) = (k_{zy}(t_1, t), \dots, k_{zy}(t_n, t))^T$ – вектор ковариаций \mathbf{z}_n со значением $y(\cdot)$ в точке t (здесь $k_{zy}(s, t) = k_{z\xi}(s, t) + k_{v\xi}(s, t)$;

$$D_n = [F_n K_n^{-1} F_n^T]^{-1} \quad (4.7)$$

– ковариационная (дисперсионная) матрица оптимальных ОМНК-оценок $\hat{\mathbf{B}}_n$.

Как уже отмечалось, несмотря на оптимальность оценок (4.3)–(4.6) для рассматриваемой задачи, использование их при большом числе измерений затруднительно. Это связано с тем, что в выражение (4.4)–(4.6) входит матрица K_n^{-1} , вычисление и хранение которой требует больших затрат машинного времени и памяти компьютера.

Таким образом, здесь весьма актуальной является задача выделения класса (классов) наблюдаемых случайных процессов $Z(t)$, для которых удастся избежать этих трудностей путем учета особенностей ковариационной матрицы измерений исследуемого процесса. Структура ковариационной матрицы зависит не только от вида случайного процесса, но и от типа плана эксперимента, в точках которого проводятся измерения. Поэтому поиск класса случайных процессов и поиск типа плана ε_n , для которых можно построить более простые процедуры вычисления оптимальных ОМНК-оценок, необходимо вести одновременно.

Рассмотрим случайный процесс $Z(t)$, для которого матрица K_n^{-1} , обратная ковариационной матрице K_n измерений $Z(t)$ в точках плана ε_n^* , где ε_n^* – один из планов ε_n , $\varepsilon_n^>$ или ε_n^p , является разреженной и имеет не более $3n - 2$ ненулевых элементов. Частным случаем такой матрицы является матрица вида

$$K_n^{-1} = K_z^{-1}(\varepsilon_n) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & & & & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & c_{n-1,n} \\ 0 & & & & c_{n,n-1} & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где $c_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$; $i, j = 1, 2, \dots, n$. Матрицы вида (4.8) называются трехдиагональными [80,82] или ленточными с полушириной ленты, равной 1 [81] (см. также приложение 1).

Для случайных процессов типа $Z(t)$ становится возможным использование оценок (4.3)–(4.6) для обработки результатов экспериментов с большим числом измерений, используя алгебру разреженных матриц [81]. При этом упрощается процедура оценивания и резко снижаются требования к скорости и объему памяти.

4.2. Некоторые предварительные результаты

Пусть A_1 – множество квадратных матриц A_n , для которых обратные матрицы являются трехдиагональными, т.е.

$$A_1 = \{A_n \mid A_n^{-1} \text{ – трехдиагональная матрица; } n > 1\}.$$

Ниже, матрицы размера $n \times n$, принадлежащие множеству A_1 будем обозначать через A_n^1 .

Пусть матрица A_n (размера $n \times n$) имеет вид:

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & \Lambda_{11}a_{11} & \Lambda_{12}a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \Lambda_{1,n-1}a_{11} \\ \Gamma_{11}a_{11} & a_{22} & \Lambda_{22}a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \Lambda_{2,n-1}a_{22} \\ \Gamma_{21}a_{11} & \Gamma_{22}a_{22} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,n-1} & \cdot & \Lambda_{n-1,n-1}a_{n-1,n-1} \\ \Gamma_{n-1,1}a_{11} & \Gamma_{n-1,2}a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{n-1,n-1}a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

где $\Gamma_{ij} = \prod_{l=j}^i \gamma_l$ ($i \geq j$) и $\Lambda_{ij} = \prod_{l=i}^j \lambda_l$ ($j \geq i$) ($i, j = 1, 2, \dots, n-1$), a_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$),

γ_i, λ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) – произвольные вещественные числа. Из (4.8) следует, что недиагональные элементы матрицы A_n^1 определяются выражением

$$a_{ij} = \begin{cases} \Gamma_{j,i-1}a_{jj} = a_{jj} \prod_{l=j}^{i-1} \gamma_l & \text{при } i > j \quad j = 1, 2, \dots, n-1; i = j+1, j+2, \dots, n \\ \Lambda_{i,j-1}a_{ii} = a_{ii} \prod_{l=i}^{j-1} \lambda_l & \text{при } j > i \quad i = 1, 2, \dots, n-1; j = i+1, i+2, \dots, n \end{cases} \quad (4.10)$$

Обозначим последовательность угловых подматриц размера $i \times i$, низанных на главную диагональ A_n сверху вниз, через $\{A_i^+, i = \overline{1, n}\}$, где $A_i^+ = A_n \left[\overline{1, i} \right]$. Здесь $A_n \left\{ \overline{i, j} \right\}$ обозначает квадратную подматрицу A_n из элементов, находящихся на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами от i до j (см. об этом подробнее в приложении 1).

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.1. Пусть матрица A_n имеет вид (4.9) и $\det A_n \neq 0$, тогда

1. Матрица A_n^{-1} , обратная к (4.9) имеет трехдиагональный вид, т.е. $A_n^{-1} \in A_1$.

2. Элементы матрицы A_n^{-1} следующим образом определяются через элементы A_n^1 :

$$A_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mu_1 & -\lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_2 & & & & & \\ -\gamma_1 & \mu_2 & -\lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_2 & \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_3 & & & & \\ 0 & -\gamma_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\mu_{n-1}}{\alpha_{n-1} \alpha_n} & -\frac{\lambda_{n-1}}{\alpha_n} & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_n} & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

где $\alpha_i = a_{ii} - \gamma_{i-1} a_{i-1, i-1} \lambda_{i-1}$, $(i = \overline{2, n})$ $\alpha_1 = a_{11}$;

$$\mu_i = a_{i+1, i+1} - \gamma_{i-1} \gamma_i a_{i-1, i-1} \lambda_{i-1} \lambda_i \quad (i = \overline{2, n-1}), \quad \mu_1 = a_{22}.$$

3. Определитель любой угловой подматрицы A_i^+ , включая и определитель полной матрицы A_n^1 , можно вычислить с помощью выражения

$$\det A_i^{1+} = \prod_{l=1}^i \alpha_l, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.12)$$

Доказательство теоремы приведено в приложении 3.

Матрицу (4.9) можно записать также в виде

$$A_n^1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{n-1} a_{1,n-1} \\ \gamma_1 a_{11} & a_{22} & \lambda_2 a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{n-1} a_{2,n-1} \\ \gamma_2 a_{21} & \gamma_2 a_{22} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1} a_{n-1,n-1} \\ \gamma_{n-1} a_{n-1,1} & \gamma_{n-1} a_{n-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma_{n-1} a_{n-1,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

где $a_{ii} (i = \overline{1, n})$ – произвольные вещественные числа. Выражая $a_{31}(a_{13})$ через $a_{21}(a_{12})$, $a_{41}(a_{14})$ через $a_{31}(a_{13})$ и т.д., матрицу (4.13) можно привести обратно к виду (4.9).

Из (4.13) можно получить условия на вид матрицы A_n , при которых обратная к ней матрица A_n^{-1} будет трехдиагональна:

$$\{(\mathbf{a}_{i+1})^T = \gamma_i (\mathbf{a}_i^+)^T\}; \quad \{\mathbf{a}_{i+1} = \lambda_i \mathbf{a}_i^+\}; \quad (i = \overline{1, n-1}), \quad (4.14)$$

где $(\mathbf{a}_i^+)^T = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,i-1}, a_{ii}) = [\mathbf{a}_i^T \mid a_{ii}]$; $\mathbf{a}_i^+ = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{i-1,i}, a_{ii})^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{i+1} \\ a_{ii} \end{bmatrix}$

(т.е. i – мерные векторы \mathbf{a}_i^+ есть $(i-1)$ – мерные векторы \mathbf{a}_i , дополненные диагональным элементом a_{ii}).

Замечание 4.1. Из формул (4.11) следует, что внедиагональные элементы A_n^1 зависят только от элементов, входящих в три центральных диагонали A_n^1 . Остальные элементы A_n^1 взаимно уничтожаются при обращении.

До сих пор мы рассматривали матрицы типа A_n^1 в строго упорядоченном, соответствующем (4.9) виде, когда элементы каждой последующей строки и столбца определялись через соответствующие элементы предыдущих строки и столбца выражениями (4.14). При этом, матрица A_n^{-1} , обратная к A_n^1 , имела трехдиагональный вид. Здесь вызывает определенный интерес вопрос – как изменится вид матрицы A_n^{-1} , если поменять местами часть строк и столбцов матрицы A_n^1 ?

Перестановка или, в общем случае, переупорядочивание строк матрицы Q , имеющей n -строк (не обязательно квадратной), эквивалентно умножению ее слева на так называемую матрицу перестановки P (см., например, [82], а также приложение 1). Аналогично, умножение матрицы Q с n столбцами на P справа приводит к перестановке столбцов матрицы Q .

Сформулируем некоторые предварительные утверждения, необходимые для получения дальнейших результатов.

Утверждение 4.1. Пусть для матрицы Q_n известна обратная матрица Q_n^{-1} . Тогда, если матрица W_n получена из Q_n путем перестановки ее любых l строк и k столбцов ($l, k \leq n$), то обратная матрица W_n^{-1} может быть получена из Q_n^{-1} путем перестановки k строк Q_n^{-1} в соответствии с порядком перестановки столбцов в Q_n и l столбцов Q_n^{-1} в соответствии с порядком перестановки строк в Q_n .

Утверждение 4.2. Если матрица W_n получена из Q_n путем перестановки (переупорядочивания) строк и столбцов с одинаковыми номерами, то обратная матрица W_n^{-1} может быть получена путем соответствующей перестановки строк и столбцов матрицы Q_n^{-1} с теми же номерами.

Доказательство утверждений 4.1 и 4.2 вынесено в приложение 3.

Из теоремы 4.1 и утверждений 4.1, 4.2 вытекает важное следствие, являющееся решением поставленного выше вопроса.

Следствие 4.1. При любой перестановке строк и столбцов матрицы A_n^1 , обратная к ней матрица A_n^{-1} будет иметь не более $3n - 2$ ненулевых элемента. Положения и значения этих элементов можно найти из (4.11), зная какие строки и столбцы были переставлены в матрице A_n^1 .

На основе теоремы 4.1 и следствия 4.1 разработаны простые процедуры рекуррентного обращения матриц вида A_n^1 и \tilde{A}_n^1 , которые представлены в приложении 4. Там же приведен пример обращения матрицы вида \tilde{A}_n^1 порядка 5. Результаты теоремы и следствия 4.1 проверены также на множестве численных примеров.

4.3. Ковариационная матрица измерений КМ-процесса

Пусть $Z(t)$ есть ковариационно марковский процесс (КМ-процесс). Это означает (см. определение 2.5 и теорему 2.2 главы 2), что ковариационная функция $Z(t)$ удовлетворяет условию

$$k(s, t) = k(s, \tau)k(\tau, t) / k(\tau, \tau) \quad (s < \tau < t). \quad (4.15)$$

Пусть величины γ_i ($i = 1, 2, \dots$) определены следующим образом:

$$\gamma_i = k_{i,i+1} / k_{ii}, \quad (4.16)$$

где $k_{ij} = k_Z(t_i, t_j)$ – значения ковариационной функции процесса $Z(t)$ в точках t_i и t_j , $t_j > t_i$. Таким образом, γ_i есть коэффициенты ковариаций процесса в соседних точках измерений, приведенные к величинам дисперсий в точках с меньшим значением координаты. Для стационарных случайных процессов $\gamma_i = \rho_{i,i+1}$, т.е. представляют собой коэффициенты корреляции между соседними измерениями (значениями процесса).

С учетом (4.15) и (4.16) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.2.

1. Ковариационная матрица K_n измерений КМ-процесса в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ представляет собой частный случай матрицы (4.9) и может быть представлена в виде

$$K_n^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & \Gamma_{11}k_{11} & \Gamma_{12}k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{1,n-1}k_{11} \\ \Gamma_{11}k_{11} & k_{22} & \Gamma_{22}k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{2,n-1}k_{22} \\ \Gamma_{21}k_{11} & \Gamma_{22}k_{22} & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{n-1,n-1} & \Gamma_{n-1,n-1}k_{n-1,n-1} & \cdot \\ \Gamma_{n-1,1}k_{11} & \Gamma_{n-1,2}k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{n-1,n-1}k_{n-1,n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

где $\Gamma_{ij} = \prod_{l=j}^i \gamma_l (i \geq j)$, $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ij} (i \geq j)$, $(i, j = \overline{1, n-1})$, а γ_i — определены ранее в (4.16).

2. Ковариационная матрица K_n^{-1} положительно определена, исключая вырожденный случай $K_n^{-1} = [0]$.

Теорема 4.3 (обратная). Любая положительно определенная матрица вида A_n^{-1} является ковариационной матрицей измерений КМ-процесса в точках плана $\varepsilon_n^>$.

Доказательства теорем 4.2 и 4.3 приведены в приложении 3.

Следствие 4.2. Матрица K_n^{-1} полностью определяется элементами двух ее диагоналей (главной и параллельной ей диагонали сверху или главной и параллельной ей диагонали снизу). Другими словами, матрица K_n^{-1} зависит только от n значений дисперсий процесса в точках измерений и $(n - 1)$ коэффициентов ковариаций между точками измерений.

Следствие 4.3. Если K_n^{-1} есть ковариационная матрица измерений КМ-процесса $\xi_M(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$, то:

- 1) обратная ей матрица K_n^{-1} является трехдиагональной;
- 2) элементы K_n^{-1} определяются выражениями (4.11) с учетом того, что $\lambda_i = \gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ и $a_{ii} = k_{ii} (i = \overline{1, n})$. При этом

$$\alpha_i = k_{ii} - \gamma_{i-1}^2 k_{i-1,i-1} \quad (i = \overline{2, n}), \quad \alpha_1 = k_{11}; \quad (4.18)$$

$$\mu_i = k_{i+1,i+1} - \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2 k_{i-1,i-1} \quad (i = \overline{2, n-1}); \quad \mu_1 = k_{22}.$$

Следствие 4.4. Если матрица K_n^{-1} , обратная ковариационной матрице K_n^1 измерений в точках $\varepsilon_n^>$ процесса $\xi(t)$, является трехдиагональной, то процесс $\xi(t)$ является КМ-процессом.

Все предыдущие результаты были получены в предположении, что измерения КМ-процесса проводятся в точках возрастающего плана $\varepsilon_n^>$. При этом ковариационная матрица измерений имеет строго упорядоченную, соответствующую (4.1), структуру и, соответственно, обратная ей матрица K_n^{-1} является трехдиагональной. Посмотрим, как изменится матрица K_n^{-1} , если измерения проводятся в точках плана общего вида ε_n , в котором точки измерений могут следовать в любой последовательности.

Здесь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4.4.

1. Ковариационная матрица измерений \tilde{K}_n^1 КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n совпадает с матрицей K_n^1 для плана $\varepsilon_n^>$, в которой строки и столбцы переставлены с порядком следования точек плана $\varepsilon_n^>$ в плане ε_n .

2. Матрица, обратная ковариационной матрице измерений \tilde{K}_n^1 имеет более $3n - 2$ ненулевых элемента, расположение и величину которых можно найти из (4.11) и (4.18), зная порядок следования точек плана ε_n в плане $\varepsilon_n^>$.

3. Любая положительно определенная матрица вида \tilde{K}_n^1 есть ковариационная матрица измерений КМ-процесса в точках плана ε_n .

Доказательство теоремы см. в приложении 3.

Результаты теоремы 4.4 являются решением второй из сформулированных в разделе 4.1 задач. Таким образом, решениями и первой и второй из поставленных задач является КМ-процесс, но если в первом случае измерения КМ-процесса обязательно должны быть выполнены в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ (или ε_n^p), то для второй задачи – безразлично, в точках какого из планов ε_n , $\varepsilon_n^>$ или ε_n^p проводятся измерения.

Обобщая изложенное можно отметить, что ковариационная матрица измерений КМ-процесса имеет весьма удобную с точки зрения различных приложений структуру. При этом, если измерения были выполнены в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$, то обратная к ней матрица K_n^{-1} является трехдиагональной, а в случае измерений КМ-процесса в точках плана общего вида (неупорядоченного плана), обратная матрица K_n^{-1} становится разреженной с числом ненулевых элементов не превышающим $3n - 2$, где n – порядок матрицы.

Ковариационная матрица измерений КМ-процесса полностью определяется небольшим $(2n - 1)$ числом ее элементов. Поэтому для эффективного решения задач статистики случайных процессов достаточно

априорного знания только этих элементов ковариационной матрицы. Другими словами, задаваясь классом исследуемых случайных процессов, т.е. априорной информацией качественного характера, мы уменьшаем количество необходимой количественной информации для эффективного решения задачи.

4.4. Рекуррентные процедуры оценивания

Одним из подходов, позволяющим избежать прямого обращения матриц большой размерности и упростить нахождение оценок (4.3)–(4.6), является построение рекуррентных процедур ОМНК.

Предположим, что нам известны оценки $\hat{\xi}_i(t)$, $\hat{\eta}_i(t)$, $\hat{\mathbf{B}}_i$, а также матрицы F_i , K_i^{-1} , D_i и векторы \mathbf{z}_i , $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_i, t)$ для плана ε_i (см. формулы (4.6)–(4.7) и пояснения к ним). Пусть в точке t_{i+1} выполнено новое измерение процесса $Z(t)$, т.е. получено $z_{i+1} = z(t_{i+1})$. Вычислим векторы $\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1})$, $\mathbf{k}_{i+1} = (k_{1,i+1}, \dots, k_{i,i+1})^T$, где $k_{ij} = k_z(t_i, t_j)$ и величины $k_{zy}(t_{i+1}, t)$, $k_{i+1,i+1}$ для новой точки плана t_{i+1} . Тогда можно получить следующие рекуррентные формулы для вычисления ОМНК-оценок $\hat{\xi}_{i+1}(t)$, $\hat{\eta}_{i+1}(t)$, $\hat{y}_{i+1}(t)$ и $\hat{\mathbf{B}}_{i+1}$ для плана $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + t_{i+1}$:

а) из (4.4) следует, что

$$\hat{\xi}_{i+1}(t) = \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) K_{i+1}^{-1} \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) K_{i+1}^{-1} F_{i+1}^T \hat{\mathbf{B}}_{i+1}$$

и

$$\hat{\xi}_i(t) = \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) K_i^{-1} \mathbf{z}_i - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) K_i^{-1} F_i^T \hat{\mathbf{B}}_i$$

Вычитая из первого уравнения второе получаем

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{i+1}(t) - \hat{\xi}_i(t) &= \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) K_{i+1}^{-1} \mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) K_{i+1}^{-1} F_{i+1}^T \hat{\mathbf{B}}_{i+1} - \\ &- \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) K_i^{-1} \mathbf{z}_i + \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) K_i^{-1} F_i^T \hat{\mathbf{B}}_i. \end{aligned}$$

Принимая во внимание рекуррентные соотношения

$$\mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_{i+1}, t) = \left[\mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) \mid k_{zy}(t_{i+1}, t) \right]; \quad \mathbf{z}_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ z_{i+1} \end{bmatrix}; \quad (4.19)$$

$$F_{i+1} = [F_i \mid \mathbf{f}_{i+1}]; \quad K_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} K_i^{-1} + \frac{\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}^T}{\alpha_{i+1}} & -\frac{\mathbf{u}_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \\ -\frac{\mathbf{u}_{i+1}^T}{\alpha_{i+1}} & \frac{1}{\alpha_{i+1}} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

где

$$\alpha_{i+1} = k_{i+1,i+1} - \mathbf{k}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1}; \quad \mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1}, \quad (4.21)$$

получаем рекуррентную формулу вычисления $\hat{\xi}_{i+1}(t)$ через $\hat{\xi}_i(t)$:

$$\hat{\xi}_{i+1}(t) = \hat{\xi}_i(t) + k_{zy}^*(t_{i+1}, t) \left[z_{i+1}^* - \hat{\mathbf{B}}_{i+1}^T \mathbf{f}_{i+1}^* \right] + \mathbf{q}_i^T(t) \left[\hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}}_{i+1} \right], \quad (4.22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= \left(k_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) \mathbf{u}_{i+1} \right) \alpha_{i+1}^{-1/2} \\ z_{i+1}^* &= \left(z_{i+1} - \mathbf{z}_i^T \mathbf{u}_{i+1} \right) \alpha_{i+1}^{-1/2} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= \left(\mathbf{f}_{i+1} - F_i \mathbf{u}_{i+1} \right) \alpha_{i+1}^{-1/2} \\ \mathbf{q}_i(t) &= F_i K_i^{-1} \mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_i, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

б) Рекуррентная формула вычисления оценки среднего значения $\hat{\eta}_{i+1}(t)$ в точках ε_{i+1} по известной оценке $\hat{\eta}_i(t)$ в точках ε_i и значениям z_{i+1} , \mathbf{f}_{i+1} , $k_{zy}(t_{i+1}, t)$, $k_{i+1, i+1}$ для точки t_{i+1} получается следующим образом.

Запишем выражения для оценок $\eta(t)$ по измерениям в точках планов ε_{i+1} и ε_i : $\hat{\eta}_{i+1}(t) = \mathbf{f}^T(t) \hat{\mathbf{B}}_{i+1}$ и $\hat{\eta}_i(t) = \mathbf{f}^T(t) \hat{\mathbf{B}}_i$. Отсюда

$$\hat{\eta}_{i+1}(t) = \hat{\eta}_i(t) - \mathbf{f}^T(t) \left[\hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}}_{i+1} \right]. \quad (4.24)$$

в) С учетом (а) и (б) рекуррентная формула для вычисления \hat{y}_{i+1} через \hat{y}_i принимает вид:

$$\begin{aligned} \hat{y}_{i+1}(t) &= \hat{\xi}_{i+1}(t) + \hat{\eta}_{i+1}(t) = \hat{y}_i(t) + k_{zy}^*(t_{i+1}, t) \left[z_{i+1}^* - \hat{\mathbf{B}}_{i+1}^T \mathbf{f}_{i+1}^* \right] + \\ &+ \left[\mathbf{q}_i^T(t) - \mathbf{f}_{i+1}^T \right] \left[\hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}}_{i+1} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

где $\hat{y}_i(t) = \hat{\xi}_i(t) + \hat{\eta}_i(t)$.

Рекуррентная формула вычисления вектора оценок параметров $\hat{\mathbf{B}}_{i+1}$ через $\hat{\mathbf{B}}_i$ широко известна (см., например, [145])

$$\hat{\mathbf{B}}_{i+1} = \hat{\mathbf{B}}_i + D_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^* \left[z_{i+1}^* - \hat{\mathbf{B}}_{i+1}^T \mathbf{f}_{i+1}^* \right], \quad (4.26)$$

где \mathbf{f}_{i+1}^* и z_{i+1}^* определены в (4.23).

Также хорошо известна формула вычисления D_{i+1} через D_i :

$$D_{i+1} = D_i - \frac{D_i \mathbf{f}_{i+1}^* (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_i}{1 + (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_i \mathbf{f}_{i+1}^*} = D_i - \frac{\mathbf{v}_{i+1}^* (\mathbf{v}_{i+1}^*)^T}{1 + d_{i+1}^*}, \quad (4.27)$$

где $\mathbf{v}_{i+1}^* = D_i \mathbf{f}_{i+1}^*$; $d_{i+1}^* = (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_i \mathbf{f}_{i+1}^*$.

Можно найти также рекуррентную формулу вычисления m -мерного вектора $\mathbf{q}_i(t)$:

$$\mathbf{q}_{i+1}(t) = F_{i+1} K_{i+1}^{-1} \mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_{i+1}, t) = \mathbf{q}_i(t) + \mathbf{f}_{i+1}^* k_{zy}^*(t_{i+1}, t).$$

Замечание 4.3. Величина α_{i+1} в рассматриваемой задаче имеет очевидную физическую интерпретацию, а именно, α_{i+1} есть наименьшая среднеквадратическая ошибка линейной интерполяции (экстраполяции) центрированного процесса $z(t) - \eta(t)$ в точку t_{i+1} по измерениям, полученным в точках t_1, t_2, \dots, t_i .

Использование рекуррентных формул (4.22)–(4.27) для вычисления оценок $\hat{\xi}_{i+1}(t)$, $\hat{\eta}_{i+1}(t)$, $\hat{y}_{i+1}(t)$ особенно удобно в тех случаях, когда имеются начальные значения этих величин и целью эксперимента является их уточнение с помощью дополнительных измерений. Сказанное не отменяет возможность применения формул (4.22)–(4.27) для обработки результатов уже проведенного эксперимента.

Хотя использование рекуррентных формул дает возможность несколько упростить обработку результатов эксперимента, тем не менее процедуры в общем случае остаются достаточно громоздкими и, самое главное, не устраняется необходимость хранения в памяти ЭВМ матриц F_n , K_n^{-1} и вектора измерений \mathbf{z}_n . Вычисление оценок по формулам (4.22)–(4.27) превращается в тривиальную задачу, если $z(t)$ есть КМ-процесс и измерения проводятся в точках планов $\varepsilon_n^>$ или ε_n^p .

Из выражений (4.21) и (4.23) видно, что для вычисления величин α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и вектора \mathbf{f}_{i+1}^* необходимо предварительно вычислить вектор $\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1}$, что при больших размерностях матрицы K_i^{-1} и вектора \mathbf{k}_{i+1} требует значительного времени и объема памяти ЭВМ. Для измерений КМ-процесса в точках плана $\varepsilon_n^>$ матрица K_i^{-1} имеет трехдиагональную структуру и вектор \mathbf{u}_{i+1} принимает вид (см. ПЗ в приложении 3):

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & i-1 & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_i \end{pmatrix}^T, \quad (4.28)$$

где $\gamma_i = k_{i,i+1} / k_{ii}$; $k_{i,i+1} = k_z(t_i, t_{i+1})$; $k_{ii} = k_z(t_i, t_i)$.

Из (4.28) следует, что вектор \mathbf{u}_{i+1} имеет единственный ненулевой элемент γ_i в позиции i . С учетом этого факта, выражения для вычисления α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* сильно упрощаются и принимают тривиальный вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= k_{i+1,i+1} - \gamma_i^2 k_{ii} = k_{i+1,i+1} - k_{i+1,i}^2 / k_{ii} \\ k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= (k_{zy}(t_{i+1}, t) - \gamma_i k_{zy}(t_i, t)) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ z_{i+1}^* &= (z_{i+1} - \gamma_i z_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= (\mathbf{f}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{f}_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Соответственно, упрощается вычисление векторов и матриц $\mathbf{q}(t)$, $\hat{\mathbf{B}}_t$, D_t . При этом величина α_{i+1} зависит только от значений дисперсии процесса

$Z(t)$ в точках t_i и t_{i+1} и величины коэффициента ковариации $k_{i,i+1}$ между измерениями $Z(t)$ в этих точках.

В случае измерений в точках равномерного плана ε_n^p коэффициенты $\gamma_i = \gamma = \text{const}$ и формулы вычисления величин α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* будут аналогичны (4.29) с заменой γ_i на γ .

Таким образом, рекуррентная обработка результатов измерений КМ-процессов в точках планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p дает возможность избавиться от необходимости хранения в памяти ЭВМ, возрастающих в процессе итераций, матриц F_i , K_i^{-1} и векторов \mathbf{z}_i , $\mathbf{k}_i(\varepsilon_i, t)$ ($i = \overline{n_0, n}$). Исключение составляет матрица D_i . Но матрица D_i , во-первых, имеет постоянные и небольшие размеры ($m \times m$) и, во-вторых, элементы этой матрицы представляют собой дисперсии и ковариации оценок $\hat{\mathbf{V}}_i$ параметров \mathbf{V} , т.е. несут важную информацию о статистической точности получаемой модели. В рекуррентных формулах остаются только векторы \mathbf{f}_i^* , \mathbf{f}_i , $\hat{\mathbf{V}}_i$ и рабочий вектор $\mathbf{q}_i(t)$. Все остальные векторы вырождаются в скалярные величины.

В случае измерений КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n , формулы вычисления вектора \mathbf{f}_{i+1}^* и величин α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* будут несколько сложнее, чем формулы (4.29), соответствующие измерениям КМ-процесса в точках планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p . Эти результаты приводятся в главе 7.

4.5. Примеры ковариационных матриц КМ-процессов и их обращение

Ниже приведены примеры применения полученных результатов к четырем КМ-процессам, часто используемым для аппроксимации реальных физических процессов. При нулевом среднем они являются также марковскими в широком смысле, а при нормальном законе распределения значений процесса также и марковскими с обычным смыслом. Для всех примеров ковариационные матрицы K_i соответствуют (4.17), что подтверждает справедливость теоремы 4.2. Выражения для вычисления величин α_i , μ_i ($i = \overline{1, n}$) и γ_i ($i = \overline{1, n-1}$), необходимых для нахождения элементов обратной матрицы K_n^{-1} и построения рекуррентных процедур, получаются очень простыми.

Пример 4.1. Рассмотрим винеровский процесс $W(t)$ с ковариационной функцией $k(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$ ($s, t > 0$), где σ^2 – интенсивность винеровского процесса (см., например, [4, 22, 34]).

Ковариационная матрица измерений винеровского процесса в точках плана $\varepsilon_n^>$ имеет вид

$$K_n = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{11} & k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11} \\ k_{11} & k_{22} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{22} \\ k_{11} & k_{22} & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{n-1,n-1} & k_{n-1,n-1} \\ k_{11} & k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{n-1,n-1} & k_m \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

где $k_{ii} = \sigma^2 t_i$.

Матрица (4.30) представляет собой частный случай матрицы (4.17) при $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{n-1} = 1$. Следовательно, матрицу K_n^{-1} можно найти с помощью выражений (4.11) и (4.18):

$$K_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{t_2}{\alpha_1 \alpha_2} & -\frac{1}{\alpha_2} & & & & & \\ -\frac{1}{\alpha_2} & \frac{t_3 - t_1}{\alpha_2 \alpha_3} & -\frac{1}{\alpha_3} & \cdot & & & 0 \\ & -\frac{1}{\alpha_3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & & \frac{t_n - t_{n-1}}{\alpha_{n-1} \alpha_n} & -\frac{1}{\alpha_n} \\ & & & & & -\frac{1}{\alpha_n} & \frac{1}{\alpha_n} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

где $\alpha_i = t_i - t_{i-1}$ при $(i = \overline{2, n})$ и $\alpha_1 = t_1$ ($t_0 = 0$).

В случае равномерного плана ε_n^p с $t_1 = \Delta, \dots, t_n = n\Delta$ матрица K_n принимает вид

$$K_n = \sigma_z^2 \Delta \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdot & & & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & n-1 & n-1 & \\ 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & n-1 & n \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

где $\Delta = (t_{i+1} - t_i)$ — интервал между соседними точками измерений. При этом выражение для обратной матрицы еще более упрощается и принимает вид

$$K_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2 \Delta} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \mathbf{0} \\ & -1 & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & & \cdot & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

При этом в (4.29) $\gamma_i = 1$ при всех $i = \overline{1, n-1}$ и $\alpha_{i+1} = \sigma^2(t_{i+1} - t_i)$. В случае плана ε_n^p величина $\alpha_{i+1} = \alpha = \sigma^2 \Delta = \text{const}$.

Пример 4.2. Рассмотрим стационарный случайный процесс с ковариационной функцией

$$k(s, t) = k(s - t) = \sigma^2 \exp(-b |s - t|),$$

где σ^2 — дисперсия процесса; b — параметр, определяющий степень затухания экспоненты.

Из (4.16) получаем $\gamma_i = \exp(-b(t_{i+1} - t_i))$ ($t_{i+1} > t_i$). Тогда для плана $\varepsilon_n^>$ ковариационная матрица измерений будет иметь вид

$$K_n = \sigma_z^2 \begin{bmatrix} 1 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{1,n-1} \\ \Gamma_{11} & 1 & \Gamma_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{2,n-1} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & 1 & \Gamma_{n-1,n-1} \\ \Gamma_{1,n-1} & \Gamma_{2,n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_{n-1,n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

где $\Gamma_{ij} = \prod_{l=i}^j \gamma_l$ ($j \geq i$); $\Gamma_{ji} = \Gamma_{ij}$; $i, j = \overline{1, n-1}$.

Из (4.34) видно, что ковариационная матрица измерений рассматриваемого процесса является частным случаем (4.17) при $k_{11} = k_{22} = \dots = k_{nn} = \sigma^2$. При этом матрица K_n^{-1} полностью определяется выражениями (4.11) и (4.18) при $\alpha_i = \sigma^2(1 - \gamma_{i-1}^2)$ ($i = \overline{2, n}$) и $\mu_i = \sigma^2(1 - \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2)$, $\alpha_1 = \mu_1 = \sigma^2$.

Особенно простые выражения для K_n и K_n^{-1} получаются при измерениях в точках равномерного плана ε_n^p . При этом

$$\gamma_i = \exp(-b(t_{i+1} - t_i)) = \exp(-b\Delta) = \text{const} = \gamma.$$

Матрица K_n принимает вид:

$$K_n = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma^{n-1} \\ \gamma & 1 & \gamma & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma^{n-2} \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & 1 & \gamma \\ \gamma^{n-1} & \gamma^{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

Для матрицы (4.35): $\alpha_i = \alpha = \sigma^2(1 - \gamma^2)$ ($i = \overline{2, n}$); $\mu_i = \mu = \sigma^2(1 - \gamma^4)$ ($i = \overline{2, n-1}$); $\mu_1 = \alpha_1 = \sigma^2$.

Отсюда

$$K_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1-\gamma^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & & & & \\ -\gamma & 1+\gamma^2 & -\gamma & & & \\ & -\gamma & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & \cdot & 1+\gamma^2 & -\gamma \\ & & & & -\gamma & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Отметим, что элементы матрицы (4.36) зависят от единственного параметра γ .

Пример 4.3. Рассмотрим нестационарный процесс с ковариационной функцией

$$k(s, t) = \sigma^2 \exp(-b | \tau |) (1 - \exp(-2bt')),$$

где $\tau = s - t$; $t' = \min(s, t)$; σ^2 – дисперсия процесса в установившемся режиме (при $t \rightarrow \infty$).

Из (4.16) имеем $\gamma_i = \exp(-b(t_{i+1} - t_i))$, которое совпадает со значением γ_i для примера 2. Матрица K_n для рассматриваемого процесса имеет общий вид (4.17), где $\gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ определены выше и

$$k_{ii} = \sigma^2 (1 - \exp(1 - bt_i)) (i = \overline{1, n}).$$

Соответственно, K_n^{-1} имеет общий вид (4.11), где

$$\alpha_i = \sigma^2 (1 - \gamma_{i-1}^2) (i = \overline{2, n});$$

$$\mu_i = \sigma^2 (1 - \gamma_{i-1}^2 \gamma_i^2) (i = \overline{2, n-1});$$

$$\alpha_1 = \sigma^2 (1 - \exp(-2\alpha t_1)) \quad \mu_1 = \sigma^2 (1 - \exp(-2\alpha t_2)).$$

Здесь можно отметить, что матрицу (4.17) можно представить в виде адамарова произведения матриц (4.30) и (4.34). т.е. ij -й элемент матрицы (4.17) равен

$$[k_{ij}] = [k_{ij}]_{(4.30)} \times [k_{ij}]_{(4.34)}, \quad (i, j = \overline{1, n}).$$

В данном случае, как и для примера 2, простые выражения могут быть получены для равномерных планов ε_n^p с $t_1 = \Delta, \dots, t_n = n\Delta$. При этом $\gamma_i = \exp(-b\Delta) = \text{const} = \gamma$ при всех $i = \overline{1, n}$ и матрица K_n принимает вид

$$K_n = \begin{bmatrix} k_{11} & \gamma k_{11} & \gamma^2 k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma^{n-1} k_{11} \\ \gamma k_{11} & k_{22} & \gamma k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma^{n-2} k_{22} \\ \gamma^2 k_{11} & \gamma k_{22} & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{n-1, n-1} & \gamma k_{n-1, n-1} & \cdot \\ \gamma^{n-1} k_{11} & \gamma^{n-2} k_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \gamma k_{n-1, n-1} & k_{nn} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

где k_{ii} ($i = \overline{1, n}$) определены ранее. Для (4.37) $\alpha_i = \alpha = \sigma^2(1 - \gamma^2)$ и $\mu_i = \mu = \sigma^2(1 - \gamma^4)$ при всех $i = \overline{1, n}$.

Обратная к (4.37) матрица K_n^{-1} имеет вид

$$K_n^{-1} = \frac{1}{\sigma^2(1 - \gamma^2)} \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & -\gamma & & & & & \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & -\gamma & & & & \mathbf{0} \\ & -\gamma & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{0} & & & & \cdot & \cdot & \\ & & & & & 1 + \gamma^2 & -\gamma \\ & & & & & -\gamma & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Несмотря на то, что рассматриваемый процесс – нестационарный, матрица, обратная ковариационной матрице измерений процесса в точках равномерного плана ε_n^p , как и для примера 4.2, зависит только от одного параметра γ .

Пример 4.4. В качестве последнего примера рассмотрим дискретный нестационарный случайный процесс с ковариационной функцией

$$k(t_i, t_j) = k_0 \exp(b(t'_i - t_0))(\exp(b(t'_j - t_0)) - 1); \quad t'' = \max(t_i, t_j); \quad t''' = \min(t_i, t_j),$$

которым часто описывают процесс чистого рождения при исследовании законов размножения популяций, рассмотренный в [167]. Здесь k_0 – размер популяции в момент времени t_0 ; b – константа асимптотического коэффициента рождения.

Интересным здесь является то, что в случае измерений КМ-процесса в точках равномерного плана ε_n^p матрица K_n^{-1} зависит только от параметра $\gamma_i = \gamma = (k_{i+1,i+1} / k_{ii})^{1/2} \rho_{i,i+1}$, представляющего коэффициент корреляции между измерениями в соседних точках, приведенный к величинам дисперсий в этих точках. При этом для вычисления оценок (4.3)–(4.6) достаточно знания величины γ (т.е. знания всех элементов ковариационной матрицы K_n не требуется).

Связь с известными результатами и выводы по главе

В настоящее время известно значительное количество работ, в которых рассматриваются вопросы оптимального оценивания, в частности задачи фильтрации и параметрической идентификации марковских процессов по данным наблюдений его реализации(й) (см., например, [4–6, 19–20, 33–40, 70, 72–5, 160–162, 165, 170, 174, 184–186]).

Анализ этих работ показывает, что в них оцениваемый процесс рассматривается: 1) как процесс, порожденный белым шумом, прошедшим известные преобразования (например, процесс на выходе фильтра Калмана), или

2) как марковский процесс, заданный классическим способом (см. раздел 2.1), или

3) как процесс, удовлетворяющий условию Колмогорова-Смолуховского-Чепмена. Так же надо отметить, что основные результаты получены в рекуррентной форме для измерений, упорядоченных в порядке возрастания координат точек измерений.

Отличие результатов, полученных в настоящей и последующих главах, от других результатов в этой области заключается в следующем:

а) В работе рассматриваются не марковские процессы в обычном понимании, а особый класс марковских процессов – КМ-процессы, в которых условие марковости накладывается на вид ковариационной функции процесса (см. раздел 2.2). Это дает возможность исследовать процессы с произвольным средним, основываясь только на свойствах ковариационной функции процесса.

б) Наблюдаемый КМ-процесс задается в виде модели сигнал плюс шум, в которой ковариационная функция наблюдаемого процесса и взаимная ковариационная функция наблюдаемого процесса и сигнала считаются известными. Модель полезного сигнала в свою очередь представляется в виде суммы среднего, заданного моделью с неизвестными параметрами и процесса с нулевым средним. Таким образом, полученные результаты удобно использовать в задачах фильтрации с одновременной параметрической идентификацией среднего. При этом источник

происхождения наблюдаемого процесса (его связь с порождающим белым шумом) может быть нам неизвестен.

в) Найденный в работе общий вид ковариационной матрицы измерений КМ-процесса и формулы ее обращения позволяют построить эффективные алгоритмы оценивания в случае одновременной (нерекуррентной) обработки вектора наблюдений.

г) Полученные результаты позволяют строить алгоритмы обработки наблюдений, неупорядоченных в порядке возрастания (убывания) координат точек измерений. Такие измерения могут иметь место, когда независимой переменной случайного процесса является не время, а например, пространственная координата. Кроме этого, это весьма важно для задач планирования эксперимента [88, 94, 95, 97–103, 111–116, 138–142, 145, 147–149, 167, 180, 182, 187, 220 и др.].

Сформулируем теперь основные выводы по главе.

1. Найдено одно из представлений квадратных матриц, обращение которых приводит к трехдиагональным матрицам. Такие матрицы полностью определяются элементами трех центральных диагоналей (главной и параллельной ей диагоналей сверху и снизу). Получены простые формулы рекуррентного обращения и вычисления определителя таких матриц. Показано, что если переставить (переупорядочить) часть строк и (или) столбцов матрицы, принадлежащей данному классу, то обратная к ней матрица будет разреженной с числом ненулевых элементов, не превышающим $3n - 2$, где n – порядок матрицы.

2. Найден общий вид ковариационной матрицы измерений КМ-процесса для измерений, упорядоченных в порядке возрастания их координат. Показано, что ковариационная матрица упорядоченных измерений КМ-процесса представляет собой подмножество положительно определенных матриц вышеупомянутого класса квадратных матриц (см. п. 1). Это означает, что матрица, обратная ковариационной матрице упорядоченных измерений КМ-процесса является симметричной трехдиагональной матрицей. Соответственно, в общем случае (т.е. для неупорядоченных измерений), матрица, обратная ковариационной матрице измерений КМ-процесса будет иметь не более $3n - 2$ ненулевых элемента.

3. Полученные результаты позволяют упростить решение многих задач статистики КМ-процессов. В частности, резко упрощается решение задач оценивания КМ-процессов с помощью оценок ОМНК, в которых в качестве весовой используется матрица, обратная ковариационной матрице измерений. В главе это показано на примере задачи линейной оптимальной фильтрации случайного процесса с одновременной параметрической идентификацией его математического

ожидания. Но полученные результаты применимы и при идентификации нелинейных моделей.

4. Особенно простыми и эффективными для КМ-процессов получаются рекуррентные алгоритмы ОМНК для упорядоченных измерений. Это позволяет использовать их в системах, работающих в режиме реального времени, так как на выходе этих систем измерения упорядочены естественным образом.

5. Ковариационная матрица измерений КМ-процесса полностью определяется небольшим $(2n - 1)$ числом ее элементов или, точнее, зависит только от n дисперсий процесса в точках измерений и $(n - 1)$ коэффициентов ковариаций между соседними измерениями (соседними в упорядоченной последовательности !!!). Поэтому для эффективного решения задач статистики КМ-процессов достаточно априорного знания только этих элементов ковариационной матрицы.

Таким образом, задаваясь классом исследуемых процессов, т.е. априорной информацией качественного характера, можно уменьшить количество необходимой количественной информации для эффективного решения задачи.

6. Справедливость полученных результатов показана на примерах широко известных стационарных и нестационарных КМ-процессов. Получены аналитические выражения с помощью которых можно легко найти элементы обратных ковариационных матриц измерений таких процессов в точках упорядоченных и неупорядоченных планов.

Интересным здесь является тот факт, что в случае измерений КМ-процесса в точках равномерного плана элементы матрицы, обратной ковариационной, зависят от единственного параметра – коэффициента корреляции между измерениями в соседних точках, приведенного к величинам дисперсий в этих точках. При этом для нахождения оптимальных ОМНК-оценок достаточно знания значения этого параметра.

5. КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ МНОГОСВЯЗНЫХ КОВАРИАЦИОННО МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ (КМ-ПРОЦЕССОВ)

В предыдущей главе был найден класс процессов, для которых матрица, обратная ковариационной матрице измерений процесса имела трехдиагональный или разреженный вид с числом ненулевых элементов не превышающим $3n - 2$, где n – число измерений. Было показано, что таким классом процессов являются простые (односвязные) КМ-процессы. Для КМ-процессов достаточно просто решаются многие задачи статистики случайных процессов, рассматриваемые в рамках корреляционной теории.

В этой главе рассматривается более общая задача поиска класса(ов) процессов, для которых матрица C_n , обратная ковариационной, является ленточной с полушириной ленты t или разреженной с числом ненулевых элементов не превышающим $\omega = (2t + 1)n - t(t + 1)$ (см. приложение 1). Величина t может изменяться в пределах от 0 до $n - 1$. При $t = 0$ матрица C_n принимает диагональный вид, а при $t = n - 1$ становится матрицей общего вида, т.е. полностью заполненной. Очевидно, что для таких процессов при $t \ll n$, используя свойства ленточных или разреженных матриц, можно построить эффективные (экономичные с вычислительной точки зрения) алгоритмы решения многих задач статистики случайных процессов. (Здесь имеются ввиду такие задачи, в которых вероятностные свойства процесса полностью определяются заданием ковариационной функции процесса, а для дискретных задач – ковариационной матрицы значений процесса в точках измерений.)

Показывается, что таким классом процессов являются t -связные КМ-процессы (см. главу 2). Для t -связных КМ-процессов, матрица C_n является ленточной с полушириной ленты t для измерений, упорядоченных в порядке возрастания координат точек измерений или разреженной с числом ненулевых элементов ω для неупорядоченных наблюдений.

Рассматриваются вопросы дискретной аппроксимации немарковских процессов t -связными КМ-процессами. При этом под дискретной КМ-аппроксимацией понимается определенным образом выполненная замена ковариационной матрицы измерений наблюдаемого процесса ковариационной матрицей измерений t -связного КМ-процесса с заданной величиной связности t . Показывается, что во многих практические

важных случаях, такая замена уже при малых величинах связности m аппроксимирующего КМ-процесса мало влияет на точность получаемых результатов. В то же время при $m \ll n$ она позволяет существенно упростить алгоритмы обработки наблюдений.

Возможность применения полученных результатов для решения практических задач показывается на примере задачи линейной оптимальной фильтрации случайного процесса с одновременной параметрической идентификацией его математического ожидания (см. главу 4). Для такой задачи наилучшие линейные несмещенные оценки (НЛНО) фильтруемого процесса совпадают с ОМНК-оценками, в которых в качестве весовой матрицы W_n используется матрица C_n , обратная ковариационной матрице измерений наблюдаемого процесса. Выводятся формулы рекуррентного ОМНК для решения такой задачи. Показывается, что при этом, операции с матрицей $W_n = C_n$ размера $n \times n$ заменяются на операции с подматрицей $m \times m$ этой матрицы.

Выводятся условия, которым должна удовлетворять положительно определенная функция двух аргументов, чтобы она могла быть ковариационной функцией КМ-процесса связностей 2 или 3.

Доказательства теорем приведены в приложении 3. Часть результатов в области матричного анализа, полученных в ходе решения основной задачи и имеющих самостоятельное значение, вынесена в приложение 5.

5.1. Некоторые предварительные результаты

Результаты теоремы 4.1 можно обобщить на ленточные матрицы с $1 \leq m \leq n - 1$, где n – размерность обращаемой матрицы; m – полуширина ленты обратной ленточной матрицы.

Обозначим через A_m класс квадратных матриц A_n , для которых обратная матрица имеет ленточный вид с полушириной ленты равной m , т.е.

$$A_m = \left\{ A_n \left| \left(A_n \right)^{-1} \text{ – ленточная матрица с } 1 \leq m \leq n - 1; \quad n > m \right. \right\}.$$

Далее матрицы A_n , принадлежащие классу A_m , будем обозначать через A_n^m , а обратные к ним ленточные матрицы с полушириной ленты m – через A_n^{-m} или C_n^m .

Для формулировки основной теоремы данного раздела необходимы будут еще ряд новых обозначений. Разобьем квадратную матрицу A_i (i – порядок матрицы) на подматрицы следующим образом:

$$A_i = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i-m \end{array} \right\} i-m \\ \left. \begin{array}{c} i-m+1 \\ \vdots \\ i \end{array} \right\} m \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{1 \ 2 \ \dots \ i-m}^{i-m} \\ \vdots \\ \underbrace{i-m+1 \ \dots \ i}_m \end{array} \begin{array}{c} A_{i-m} \\ \vdots \\ A_{mi} \end{array} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ A_m[i] \end{array} \quad (5.1)$$

где

$$A_{im} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} a_{1,i-m+1} & \dots & a_{1i} \\ a_{2,i-m+1} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,i-m+1} & \dots & a_{ii} \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \mathbf{a}_{1,[i]}^T \\ \mathbf{a}_{2,[i]}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i,[i]}^T \end{array} \right| \end{array} \quad (5.2)$$

– подматрица размером $i \times m$, представляющая собой правые m – столбцов матрицы A_i ; $\mathbf{a}_{l,[i]}^T = (a_{l,i-m+1}, \dots, a_{li})$ – m -мерные вектор-строки, составляющие подматрицу A_{im} ($l = \overline{1, i}$);

$$A_{mi} = \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} a_{i-m+1,1} & a_{i-m+1,2} & \dots & a_{i-m+1,i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_{[i],1} & \mathbf{a}_{[i],2} & \dots & \mathbf{a}_{[i],i} \end{array} \right| \end{array} \quad (5.3)$$

– подматрица размером $m \times i$, представляющая собой нижние m -строк матрицы A_i ; $\mathbf{a}_{[i],l} = (a_{i-m+1,l}, \dots, a_{il})^T$ – m -мерные вектор-столбцы, составляющие подматрицу A_{mi} ($l = \overline{1, i}$); A_{i-m} – левая верхняя подматрица (размером $(i - m) \times (i - m)$) матрицы A_i ; $A_m[i]$ – правая нижняя подматрица (размером $(m \times m)$) матрицы A_i .

Примечания.

1. Обозначение $[i]$ указывает на то, что индекс i изменяется от $i - m + 1$ до i . Если $i < m$, то индекс i изменяется от 1 до i .

2. При $i \leq m$ подматрица $A_{i-m} = [0]$, а подматрицы A_{im} , A_{mi} и $A_m[i]$ совпадают друг с другом и определяются следующим образом:

$$A_{1m} = A_{m1} = A_m[1] = [a_{11}]; \quad A_{2m} = A_{m2} = A_m[2] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdots;$$

$$A_{mm} = A_m[m] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение трапециевидные вещественные матрицы $\mathfrak{Z}_{n-1,m}$ и $\mathfrak{R}_{m,n-1}$ (см. ниже формулы (5.4) и (5.5)).

Из (5.4) и (5.5) видно, что вектор-строки Γ_{im}^T и вектор-столбцы Λ_{mi} при $m \leq i \leq n - 1$ имеют постоянную длину, равную m , и определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{im}^T &= (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \dots, \gamma_{im}) \\ \Lambda_{mi} &= (\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \dots, \lambda_{mi})^T \end{aligned} \right\} \quad (5.6a)$$

При $i < m$ векторы Γ_{im}^T и Λ_{mi} имеют переменную длину, равную i ($m \leq i \leq n - 1$) и могут быть представлены в виде формул:

$$\Gamma_{1m}^T = (\gamma_{1m}); \quad \Gamma_{2m}^T = (\gamma_{2,m-1}, \gamma_{2m}); \quad \dots; \quad \Gamma_{m-1,m}^T = (\gamma_{m-1,2}, \dots, \gamma_{m-1,m}),$$

$$\Lambda_{m1} = (\lambda_{1m}); \quad \Lambda_{m2} = (\lambda_{m-1,2}, \lambda_{m2}); \quad \dots; \quad \Lambda_{m,m-1} = (\lambda_{2,m-1}, \dots, \lambda_{m,m-1}) \quad (5.6b)$$

$$\mathfrak{Z}_{n-1,m} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & & \gamma_{1m} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & \gamma_{2,m-1} & \gamma_{2m} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & \gamma_{m-1,2} & \dots & \gamma_{m-1,m-1} & \gamma_{m-1,m} \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{m,m-1} & \gamma_{mm} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \dots & \gamma_{n-1,m-1} & \gamma_{n-1,m} & \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & m-1 & m & \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \Gamma_{1m}^T \\ \Gamma_{2m}^T \\ \vdots \\ \Gamma_{m-1,m}^T \\ \Gamma_{mm}^T \\ \vdots \\ \Gamma_{n-1,m}^T \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m-1 \\ m \\ \vdots \\ n-1 \end{array} \end{array} \quad (5.4)$$

и

$$\mathfrak{R}_{m,n-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & & & \lambda_{1,m} & \lambda_{1,n-1} \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & \lambda_{2,m-1} & \lambda_{2,m} & \lambda_{2,n-1} \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & \lambda_{m-1,2} & \dots & \lambda_{m-1,m-1} & \lambda_{m-1,m} & \dots & \lambda_{m-1,n-1} \\ \lambda_{m1} & \lambda_{m2} & \dots & \lambda_{m,m-1} & \lambda_{mm} & \dots & \lambda_{m,n-1} & \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & m-1 & m & \dots & n-1 \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \Lambda_{m1} & \Lambda_{m2} & \dots & \Lambda_{m,m-1} & \Lambda_{mm} & \dots & \Lambda_{m,n-1} \end{array} \end{array} \quad (5.5)$$

Примечание. Матрицы $\mathfrak{Z}_{n-1,m}$ и $\mathfrak{R}_{m,n-1}$ имеют по $m(n - (m + 1)/2)$ элемента и могут быть представлены также в виде одномерных векторов

$$\Gamma_w^* = (\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_w^*) \quad \text{и} \quad \Lambda_w^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_w^*)$$

длиною $w = m(n - (m + 1)/2)$. Это удобно при программной реализации получаемых методов.

С учетом введенных обозначений можно сформулировать теорему.

Теорема 5.1. Пусть квадратная матрица A_n порядка n сформирована следующим образом:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & a_{11} & A_{1m}\Lambda_{m1} & A_{2m}\Lambda_{m2} & \dots & A_{n-1,m}\Lambda_{m,n-1} \\ 2 & \Gamma_{1m}^T A_{m1} & a_{22} & A_{3m}\Lambda_{m3} & \dots & \\ 3 & \Gamma_{2m}^T A_{m2} & & a_{33} & & \\ 4 & & \Gamma_{3m}^T A_{m3} & & & a_{44} \\ \vdots & & & & \ddots & \\ n & & & & & \Gamma_{n-1,m}^T A_{m,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

где $a_{ii} (i = \overline{1, n})$ – произвольные вещественные числа; $\Gamma_{im}^T, \Lambda_{mi} (i = \overline{1, n-1})$ – вещественные векторы, определенные в (5.6).

Тогда, если $\det A_n \neq 0$, то верны следующие утверждения:

1. Матрица A_n^{-1} , обратная к A_n , имеет ленточный вид с полушириной ленты m $1 \leq m \leq n-1$:

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & m+1 & \dots & n-m & \dots & n \\ 1 & c_{11} & \dots & c_{1,m+1} & & & \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & & 0 \\ m+1 & c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,m+1} & \cdot & & \\ \vdots & & \cdot & & \cdot & & \\ n-m & & & \cdot & c_{n-m,n-m} & \dots & c_{n-m,n} \\ \vdots & & 0 & & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots \\ n & & & & c_{n,n-m} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

т.е. $A_n^{-1} = A_n^{-m}$. При этом $A_n = A_n^m \in A_m$. (В (5.8) через $c_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ обозначены элементы матрицы $A_n^{-1} = A_n^{-m}$). Из (5.8) видно, что элементы A_n^{-m} удовлетворяют условию: $c_{ij} = 0$ при $|i - j| > m$.

2. Ненулевые элементы A_n^{-m} , лежащие внутри ленты с полушириной m можно найти следующим образом:

а) вычисление вспомогательных величин $\{\alpha_i, (i = \overline{1, n})\}$:

$$\alpha_i = a_{ii} - \Gamma_{i-1, m}^T A_m [i-1] \Lambda_{m, i-1}, \quad (i = \overline{1, n}), \quad (5.9)$$

где $\Gamma_{0m}^T = \Lambda_{m0} = A_m [0] = 0$.

б) вычисление диагональных элементов $\{c_{ii}, i = \overline{1, n}\}$:

$$c_{ii} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{k=0}^w \frac{\lambda_{m-k, i+k} \gamma_{i+k, m-k}}{\alpha_{i+k+1}}, \quad (5.10a)$$

где $w = m - 1$ при $i \leq n - m$ и $w = n - i - 1$ при $i > n - m$.

в) вычисление внедиагональных элементов верхней $\{c_{i, i+k}, k = \overline{1, m}\}$ и нижней $\{c_{i+k, i}, k = \overline{1, m}\}$ полулент ($i = \overline{1, n-1}$):

$$c_{i+k, i} = -\frac{\gamma_{i+k-1, m-k+1}}{\alpha_{i+k}} + \sum_{j=k}^w \frac{\lambda_{m+k-j, i+j} \gamma_{i+j, m-j}}{\alpha_{i+j+1}}, \quad (5.10б)$$

$$c_{i, i+k} = -\frac{\lambda_{m-k+1, i+k-1}}{\alpha_{i+k}} + \sum_{j=k}^w \frac{\lambda_{m-j, i+j} \gamma_{i+j, m+k-j}}{\alpha_{i+j+1}}, \quad (5.10в)$$

где w определяется точно также, как и w в (5.10a).

Во всех приведенных формулах, если вычисленное значение верхнего предела становится меньше нижнего, то суммирование не должно производиться, т.е. при $j, k > w$ и $j, k > m$ второй член в правой части формул (5.10) тождественно равен 0.

3. Определитель любой угловой подматрицы A_i^+ ($i = \overline{1, n}$), включая и определитель полной матрицы A_n^m , можно вычислить с помощью выражения:

$$\det A_i^+ = \prod_{l=1}^i \alpha_l, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.11)$$

Доказательство теоремы 5.1 приведено в приложении 3.

Замечание 5.1. Используя обозначения (5.2)–(5.6) матрицу A_n^m можно записать в более удобной форме.

$$A_n^m = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \left\| \begin{array}{cccccc} a_{11} & \mathbf{a}_{1,[1]}^T \Lambda_1 & \mathbf{a}_{1,[2]}^T \Lambda_2 & \cdots & \mathbf{a}_{1,[n-1]}^T \Lambda_{n-1} \\ \Gamma_1^T \mathbf{a}_{[1],1} & a_{22} & \mathbf{a}_{2,[2]}^T \Lambda_2 & \cdots & \mathbf{a}_{2,[n-1]}^T \Lambda_{n-1} \\ \Gamma_2^T \mathbf{a}_{[2],1} & \Gamma_2^T \mathbf{a}_{[2],2} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \Gamma_{n-1}^T \mathbf{a}_{[n-1],1} & \Gamma_{n-1}^T \mathbf{a}_{[n-1],2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & \mathbf{a}_{n-1,[n-1]}^T \Lambda_{n-1} \\ \Gamma_{n-1}^T \mathbf{a}_{[n-1],1} & & & \Gamma_{n-1}^T \mathbf{a}_{[n-1],n-1} & a_{nn} \end{array} \right\| \end{matrix} \quad (5.12)$$

Можно видеть, что матрица (5.12) подобна матрице (4.13) с заменой скалярных величин a_{ij} ($i, j = \overline{1, n-1}$) и γ_i, λ_i ($i = \overline{1, n-1}$) в (4.13) на векторы $\mathbf{a}_{[i],j}$ ($i = \overline{1, n-1}; j = 1, i$), $\mathbf{a}_{i,[j]}^T$ ($i = \overline{1, n-1}; j = n-1$) и Γ_i^T, Λ_i ($i = \overline{1, n-1}$) в (5.12), соответственно.

Замечание 5.2. Представляя квадратичную форму (5.9) в виде сумм, получаем

$$\alpha_i = a_{ii} - \sum_{w=1}^m \sum_{k=w}^m \gamma_{i-1,k} a_{i-m+k-1, i-m+j-1} \lambda_{j,j-1}, \quad (5.13)$$

где $w = 1$ при $i > m$ и $w = m - i + 2$ при $i \leq m$.

Примечание. В (5.12) при записи векторов $\Gamma_{m_i}^T$ и Λ_{m_i} опущен индекс m .

Замечание 5.3. Формулы (5.9) и (5.10) показывают, что для обращения матриц вида A_n^m достаточно знания ее элементов, лежащих внутри ленты с шириной $2m + 1$. Остальные элементы A_n^m взаимно уничтожаются при обращении. Другими словами, матрица A_n^m полностью определяется ее элементами, лежащими внутри ленты шириной $2m + 1$.

При этом, внедиагональные элементы матрицы A_n^m можно вычислить с помощью выражений

$$a_{ij} = \begin{cases} \Gamma_{i-1}^T \mathbf{a}_{[i-1],j} & \text{при } j > i \\ \mathbf{a}_{i,[j-1]}^T \lambda_{j-1} & \text{при } i > j \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n}). \quad (5.14)$$

Замечание 5.4. Формулы (5.9) и (5.10), связывающие элементы прямой A_n^m и обратной A_n^{-m} матриц, как и в случае $m = 1$ (см. главу 4), дают возможность найти процедуры обращения ленточных матриц C_n^m с полушириной ленты $i \leq m \leq n - 1$, требующие минимального числа операций и требуемой памяти ЭВМ. При этом, элементы матрицы C_n^m должны

быть таковы, что величины $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ (см. (5.9) или (5.13)) будут отличны от нуля.

Замечание 5.5. Как видно из (5.7) и (5.12), матрица A_n^m зависит от $w^* = (2m + 1)n - m(m + 1)$ произвольно выбираемых величин $\{a_{ii}, i = \overline{1, n}\}$, $\{\gamma_i^*, \lambda_i^*, i = \overline{1, w}\}$, или, другими словами, имеет w^* независимых элементов. Остальные элементы A_n^m линейно связаны с ними.

Если $m = n - 1$, то число независимых величин, от которых зависят элементы матрицы A_n^m становится равным n^2 , т.е. мы приходим к матрице общего вида ($A_n^m = A_n^{n-1} = A_n$). При этом, естественно, обратная матрица будет полностью заполненной, т.е. может иметь n^2 ненулевых элементов. Сказанное верно и при $m \geq n - 1$, т.е. $A_n^{n-1+i} = A_n (i = 1, 2, \dots)$.

Если $m = 1$, то величина $w^* = 3n - 2$. При этом $A_n^m = A_n^1$ и обратная матрица $A_n^{-m} = A_n^{-1}$ будет трехдиагональной. При $m = 0$ матрица $A_n^m = A_n^0$ и обратная к ней матрица $(A_n^0)^{-1}$ будет диагональной.

Замечание 5.6. Матрицы вида A_n^m можно хранить в памяти ЭВМ в компактной форме. При этом достаточно ввести в память ЭВМ векторы $\mathbf{a}_{ii} = \{a_{ii}, (i = \overline{1, n})\}$, Γ_w^* и Λ_w^* (матрицы $\mathfrak{Z}_{n-1, m}$, $\mathfrak{R}_{m, n-1}$), занимающие $w^* \leq n^2$ ячеек памяти. С помощью векторов \mathbf{a}_{ii} , Γ_w^* и Λ_w^* при необходимости можно легко вычислить любой элемент матрицы A_n^m . При этом, если $m \ll n$, то выигрыш в объеме требуемой памяти ЭВМ может быть значительным.

На матрицы вида A_n^m можно также обобщить результаты следствия 4.1, которое при этом будет выглядеть следующим образом.

Следствие 5.1. При любой перестановке строк и столбцов матрицы A_n^m , обратная к ней матрица \tilde{A}_n^{-m} будет иметь не более w^* ненулевых элементов. Положения этих элементов можно определить, зная какие строки и столбцы были переставлены в исходной матрице A_n^m , а их значения найти из формул (5.9) и (5.10) при соответствующих значениях индексов.

Способ формирования матрицы A_n^m и следствие 5.1 позволяют высказать более сильное, чем в замечании 5.3, утверждение, а именно: элементы матриц A_n^m (независимо от того с упорядоченной A_n^m или неупорядоченной \tilde{A}_n^m матрицами мы имеем дело) зависят только от n диагональных и произвольных $2mn - m(m + 1)$ внедиагональных элементов.

5.2. Приведение квадратной матрицы общего вида к матрице вида A_n^m . Алгоритм обращения матриц вида A_n^m

На практике часто может иметь место случай, когда матрица A_n , приводимая к виду A_n^m или \tilde{A}_n^m , задана в общем виде. Это означает, что величины γ_{ij} и λ_{ij} (векторы $\Gamma_{im} (i = \overline{1, n-1})$ и $\Lambda_{im} (i = \overline{1, n-1})$, определяющие внедиагональные элементы A_n^m или \tilde{A}_n^m , в явном виде неизвестны.

В этом случае, чтобы иметь возможность использовать результаты теоремы 5.1 и замечаний к ней для решения практических задач, необходимо найти соотношения, с помощью которых можно выразить векторы $\Gamma_{im} (i = \overline{1, n-1})$ или $\Lambda_{im} (i = \overline{1, n-1})$ через элементы $a_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ (или, что то же самое, через векторы $\mathbf{a}_{[j,i]}, \mathbf{a}_{i,[j]}^T (i = \overline{1, n})$ матрицы A_n). Рассмотрим для простоты случай приведения квадратной матрицы A_n , зависящей только от n диагональных и $2mn - m(m+1)$ внедиагональных элементов, к виду A_n^m .

На рис. 5.1 изображены фрагменты матриц A_n^m и A_n , которые показывают как связаны между собой вектора $\Gamma_{im}, \Lambda_{im}, \mathbf{a}_{[j,i]}, \mathbf{a}_{i,[j]}^T$ и диагональная подматрица $A_m[i-1]$.

Сравнивая рис. 5.1б и 5.1в, получаем, что

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{i-1} &= A_m^{-1}[i-1]\mathbf{a}_{[i-1,i]} \\ \Gamma_{i-1}^T &= \mathbf{a}_{i,[i-1]}^T A_m^{-1}[i-1] \end{aligned} \right\} (i = \overline{2, n}). \quad (5.15)$$

При этом формула (5.9) принимает вид:

$$\alpha_i = a_{ii} - \mathbf{a}_{i,[i-1]}^T A_m^{-1}[i-1]\mathbf{a}_{[i-1,i]}, \quad (i = \overline{2, n}), \quad (5.16)$$

где $\alpha_1 = a_{11}$.

Вычислив Γ_{im} или $\Lambda_{im} (i = \overline{1, n-1})$ и $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ по формулам (5.15) и (5.16) можно определить все остальные ненулевые элементы матрицы A_n^{-1} по формулам (5.10а)–(5.10в).

Из рис. 5.1 видно, что для приведения матрицы A_n к виду A_n^m достаточно задать элементы A_n , лежащие в пределах ленты с полушириной m . Остальные элементы A_n определяются элементами, лежащими в пределах ленты. Это означает также, что не любую квадратную матрицу A_n можно привести к виду A_n^m , а только такую, строки и столбцы которой удовлетворяют соотношению (ПЗ.4).

В общем случае, векторы Γ_{im} и Λ_{im} можно определить через любые векторы $\mathbf{a}_{[j,i]} (i > j)$ и $\mathbf{a}_{i,[j]}^T (j > i)$.

$i-m-1$	$i-m$	\dots	$i-1$	i
$i-m$	$A_m[i-1]$			$\mathbf{a}_{i-m,[i-1]}^T \Lambda_{i-1}$
\vdots				\vdots
$i-1$				$\mathbf{a}_{i-1,[i-1]}^T \Lambda_{i-1}$
i	$\Gamma_{i-1}^T \mathbf{a}_{[i-1],i-m}$	\dots	$\Gamma_{i-1}^T \mathbf{a}_{[i-1],i-m}$	a_{ii}
а				
$i-m-1$	$i-m$	\dots	$i-1$	i
$i-m$	$A_m[i-1]$			$A_m[i-1] \Lambda_{i-1}$
\vdots				
$i-1$				
i	$\Gamma_{i-1}^T A_m[i-1]$			a_{ii}
б				
$i-m-1$	$i-m$	\dots	$i-1$	i
$i-m$	$A_m[i-1]$			$\mathbf{a}_{[i-1],i}$
\vdots				
$i-1$				
i	$\mathbf{a}_{i,[i-1]}^T$			a_{ii}
в				

Рис. 5.1. Фрагменты матриц A_n^m (рис. (а) и (б)) и A_n (рис. (в))

Примечание. На рисунке (в):

$$\mathbf{a}_{[i-1],i} = (a_{i-m,i}, \dots, a_{i-1,i})^T; \mathbf{a}_{i,[i-1]}^T = (a_{i,i-m}, \dots, a_{i,i-1}).$$

На основе процедуры рекуррентного обращения матриц методом окаймления [80] и с учетом соотношений (5.15) и (5.16) можно получить простой рекуррентный алгоритм обращения матриц, приводимых к виду A_n^m .

Пусть $c_{ij} (ij = \overline{1, n})$ – элементы обратной матрицы $C_n^m = A_n^{-m}$. Введем следующие обозначения фрагментов матрицы C_n^m (см. рис. 5.2).

$i-m-1$	$i-m$...	$i-1$	i	
$i-m$	$C_m[i-1]$			$\mathbf{c}_{[i-1],i}$	
\vdots					
$i-1$	$\mathbf{c}_{i,[i-1]}^T$			c_{ii}	
i					
					$c_{i+1,i+1}$

Рис. 5.2. Фрагментирование матрицы C_n^m

С учетом введенных здесь и ранее обозначений, алгоритм рекуррентного обращения матрицы A_n , приводимой к виду A_n^m , будет выглядеть следующим образом.

1-й шаг процедуры

- 0) Вычисление $c_{11} = a_{11}^{-1}$.

i -й шаг процедуры ($i = \overline{2, n}$)

- 1) Вычисление векторов Λ_{i-1} и Γ_{i-1}^T :

$$\Lambda_{i-1} = A_m^{-1}[i-1] \mathbf{a}_{[i-1],i}; \quad \Gamma_{i-1}^T = \mathbf{a}_{i-1}^T A_m^{-1}[i-1].$$

- 2) Вычисление вспомогательной величины α_i :

$$\alpha_i = a_{ii} - \Gamma_{i-1}^T \mathbf{a}_{[i-1],i} = a_{ii} - \mathbf{a}_{i,[i-1]}^T \Lambda_{i-1}.$$

- 3) Коррекция элементов подматрицы $C_m[i-1]$:

$$C_m[i-1] = C_m[i-1] + \frac{\Lambda_{i-1} \Gamma_{i-1}^T}{\alpha_i}.$$

- 4) Вычисление векторов $\mathbf{c}_{[i-1],i}$, $\mathbf{c}_{i,[i-1]}^T$ и элемента c_{ii} :

$$\mathbf{c}_{[i-1],i} = -\frac{\Lambda_{i-1}}{\alpha_i}; \quad \mathbf{c}_{i,[i-1]}^T = -\frac{\Gamma_{i-1}^T}{\alpha_i}; \quad c_{ii} = \frac{1}{\alpha_i}.$$

Замечание 5.7. При программной реализации этого алгоритма с записью элементов обратной матрицы на место соответствующих элементов исходной матрицы нужны три рабочих массива: массив длиной

m^2 для хранения подматрицы $A_m[i]$ и два массива длиной m для хранения векторов Γ_m^T и Λ_m . При $m \ll n$ это не сильно увеличивает требуемый объем памяти. Например, при $n = 100$ и $m = 10$ длина рабочих массивов будет равна 120. При использовании стандартной подпрограммы MINV [85] длина рабочих массивов будет равна 200.

Замечание 5.8. Если обращается матрица уже представленная в виде A_n^m , то п. 1 исключается из процедуры. При этом рабочих массивов для обращения матрицы не требуется.

Замечание 5.9. В памяти компьютера достаточно хранить только ленту шириной $2m + 1$, параллельную главной диагонали матрицы A_n или векторы $\mathbf{a}_n = \{a_{ii}\} (i = \overline{1, n})$, Γ_i^T и $\Lambda_i (i = \overline{i, n-1})$, если матрица A_n задана в виде A_n^m .

5.3. Ковариационная функция и ковариационная матрица измерений m -связного КМ-процесса

Пусть $Z(t)$ есть m -связный КМ-процесс. Это означает, что ковариационная функция $k(s, t)$ процесса $Z(t)$ удовлетворяет условию

$$k(t_i, t_j) = \mathbf{k}_{i, [j-1]}^T K_m^{-1} [j-1] \mathbf{k}_{[j-1], j}, \quad (5.17)$$

где $t_i < t_{j-m} < t_{j-m+1} < \dots < t_{j-1} < t_j$.

В (5.17) использованы следующие обозначения:

$\mathbf{k}_{[i], l} = (k_{i-m+1, l}, \dots, k_{il})^T$ — m -мерный вектор значений $k(s, t)$ в точках t_{i-m+1}, \dots, t_i и точке t_l ;

$K_m[i]$ — $(m \times m)$ ковариационная матрица вектора значений $Z(t)$ в точках t_{i-m+1}, \dots, t_i , т.е. $K_m[i] = [k(t_j, t_l)] (j, l = \overline{i-m+1, i})$

При $m = 2$ (двусвязный КМ-процесс) условие (5.17) можно переписать в более наглядной форме. Обозначим t_i через s , t_{j-2} через τ , t_{j-1} через φ и t_j через t . Тогда условие (5.17) для двусвязного КМ-процесса примет вид

$$k(s, t) = (k(s, \tau)k(\tau, t)k(\varphi, \varphi) + k(s, \varphi)k(\varphi, t)k(\tau, \tau) - k(s, \tau)k(\tau, \varphi)k(\varphi, t) - k(s, \varphi)k(\varphi, \tau)k(\tau, t)) / (k(\varphi, \varphi)k(\tau, \tau) - k(\varphi, \tau)k(\tau, \varphi)), \quad (5.18)$$

где $s < \tau < \varphi < t$.

Из теоремы 2.3 следует, что условие (5.18) является не только необходимым, но и достаточным, т.е. положительно определенная функция $k(s, t)$ является ковариационной функцией двумерного КМ-процесса тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (5.18).

Замечание 5.10. Пусть функция $k_1(s, t)$ есть ковариационная функция простого (односвязного) КМ-процесса, т.е.

$$k_1(s, t) = k_1(s, \tau)k_1(\tau, t) / k_1(\tau, \tau). \quad (5.19)$$

Можно показать, что функция $k_1(s, t)$ удовлетворяет также условию (5.18) и, вообще, всем условиям на ковариационные функции КМ-процессов связностей $m \geq 1$. Другими словами, можно считать, что КМ-процесс связности 1 является одновременно КМ-процессом связностей 2, 3 и т.д., а КМ-процесс связности 2 является также КМ-процессом связностей 3, 4, Эту аналогию можно продолжать для КМ-процессов более высоких связностей.

Замечание 5.11. Для ковариационной функции стационарного двумерного КМ-процесса подставляя вместо $k_{ij} = \rho_{ij}k_{ii}k_{jj}$, получаем

$$\rho_{ij} = (\rho_{im}\rho_{mj} + \rho_{il}\rho_{lj} - \rho_{il}\rho_{im}\rho_{mj} - \rho_{im}\rho_{ml}\rho_{lj}) / (1 - \rho_{im}\rho_{ml}), \quad (5.20)$$

где $\rho_{ij} = \rho(t_i, t_j)$; $t_j > t_i > t_m > t_r$.

Замечание 5.12. При $m > 2$ представление (5.17) в виде более наглядных (скалярных) условий (5.18) или (5.19) становится весьма проблематичным. Например, расписывая (5.17) для $m = 3$ получаем, что ковариационная функция КМ-процесса связности 3 должна удовлетворять условию

$$k_{st} = (k_{rs}c_1 + k_{qr}c_2 + k_{\tau\tau}c_3) / d, \quad (5.21)$$

где $k_{st} = k(s, t)$ и $s < \tau < q < r < t$. В (5.21) использованы обозначения

$$d = (k_{\tau\tau}k_{qq}k_{rr} + k_{\tau q}k_{qr}k_{r\tau} + k_{\tau r}k_{rq}k_{q\tau} - k_{\tau r}k_{r\tau}k_{qq} - k_{\tau q}k_{q\tau}k_{rr} - k_{qr}k_{rq}k_{\tau\tau});$$

$$c_1 = (k_{st}(k_{\tau m}k_{qr} - k_{\tau r}k_{qq}) + k_{sq}(k_{q\tau}k_{tr} - k_{qr}k_{\tau\tau}) + k_{sr}(k_{\tau\tau}k_{qq} - k_{sq}k_{q\tau}));$$

$$c_2 = (k_{st}(k_{\tau r}k_{rq} - k_{\tau q}k_{rr}) + k_{sq}(k_{\tau\tau}k_{rr} - k_{\tau r}k_{r\tau}) + k_{sr}(k_{r\tau}k_{sq} - k_{rq}k_{\tau\tau}));$$

$$c_3 = (k_{st}(k_{qq}k_{rr} - k_{qr}k_{rq}) + k_{sq}(k_{qr}k_{r\tau} - k_{q\tau}k_{rr}) + k_{sr}(k_{rq}k_{q\tau} - k_{r\tau}k_{qq})).$$

Из (5.21) видно, что раскрытие векторно-матричного условия (5.17) для КМ-процессов связностей $m > 2$ приводит к довольно громоздким скалярным выражениям.

Пусть в точках n -точечного упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ выполнены измерения m -связного КМ-процесса $Z(t)$. Пусть K_n есть ковариационная матрица этих измерений. Для матрицы K_n вектор $\mathbf{k}_{|i|,j}$ ($i \geq j$) в (5.17) можно интерпретировать как совокупность элементов j -го столбца от $i - m + 1$

до i при $i \geq m$ или 1 от i при $i < m$. Таким образом, размерность вектора $\mathbf{k}_{[i,j]}$ будет равна m при $i \geq m$ и будет равна i при $i < m$. Матрицу $K_m[i]$, при этом, можно интерпретировать как диагональную подматрицу матрицы K_n , находящуюся на пересечении одноименных строк и столбцов с номерами от $i - m + 1$ до i при $i \geq m$ или 1 от i при $i < m$. Таким образом, размеры подматрицы $K_m[i]$ будут равны $m \times m$ при $i \geq m$ и $i \times i$ при $i < m$.

Пусть векторы $\Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ определены следующим образом:

$$\Gamma_i = K_m^{-1}[i] \mathbf{k}_{[i,i+1]}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (5.22)$$

Очевидно, что размерность вектора Γ_i будет равна m при $i \geq m$ и i при $i < m$.

В (5.22): $K_m[i] - (m \times m)$ – диагональная подматрица матрицы K_n из элементов, находящихся на пересечении одноименных строк и столбцов с номерами от $i - m + 1$ до i .

С учетом введенных обозначений можно сформулировать следующие важные теоремы.

Теорема 5.2.

1. Ковариационная матрица K_n измерений в точках плана $\varepsilon_n^>$ m -связного КМ-процесса может быть представлена в виде матрицы:

$$K_n^m = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccccc} k_{11} & \mathbf{k}_{1,[1]}^T \Gamma_1 & \mathbf{k}_{1,[2]}^T \Gamma_2 & \dots & \mathbf{k}_{1,[n-1]}^T \Gamma_{n-1} \\ \Gamma_1^T \mathbf{k}_{[1],1} & k_{22} & \mathbf{k}_{2,[2]}^T \Gamma_2 & \dots & \mathbf{k}_{2,[n-1]}^T \Gamma_{n-1} \\ \Gamma_2^T \mathbf{k}_{[2],1} & \Gamma_2^T \mathbf{k}_{[2],2} & k_{33} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & k_{n-1,n-1} & \mathbf{k}_{n-1,[n-1]}^T \Gamma_{n-1} \\ \Gamma_{n-1}^T \mathbf{k}_{[n-1],1} & \Gamma_{n-1}^T \mathbf{k}_{[n-1],2} & \dots & \Gamma_{n-1}^T \mathbf{k}_{[n-1],n-1} & k_{nn} \end{array} \right\| \end{matrix}, \quad (5.23)$$

представляющей собой частный случай матрицы A_n^m при $a_{ii} = k_{ii} (i = \overline{1, n})$; $\mathbf{a}_{[i],j} = \mathbf{a}_{j,[i]}^T = \mathbf{k}_{j,[i]}^T = \mathbf{k}_{j,[i]}^T (i = \overline{1, n-1}; j = \overline{1, i})$; $\Gamma_{im}^T = \Lambda_{mi} = \Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$.

2. Ковариационная матрица K_n^m положительно определена, исключая вырожденный случай $K_n^m = [0]$.

Теорема 5.3 (обратная). Любая положительно определенная матрица вида K_n^m является ковариационной матрицей измерений в точках $\varepsilon_n^>$ m -связного КМ-процесса.

Доказательства теорем 5.2 и 5.3 приведены в приложении 3.

Из теорем 5.1 и 5.2 вытекают важные следствия. Пусть K_n^m есть ковариационная матрица измерений m -связного КМ-процесса $Z_M^m(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$.

Следствие 5.2.

1. Матрица K_n^{-m} , обратная к K_n^m , является ленточной с полушириной ленты равной m .

2. Элементы K_n^{-m} определяются выражениями

$$\alpha_i = k_{ii} - \mathbf{k}_{i,[i-1]}^T K_m^{-1} [i-1] \mathbf{k}_{[i-1],i} = k_{ii} - \mathbf{k}_{i,[i-1]}^T \Gamma_{i-1}, \quad (i = \overline{1, n}); \quad (5.24a)$$

$$c_{ii} = \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{k=0}^w \frac{\gamma_{m-k,i+k}^2}{\alpha_{i+k+1}}, \quad (i = \overline{1, n}); \quad (5.24б)$$

$$c_{i,i+k} = -\frac{\gamma_{i+k-1,m-k+1}}{\alpha_{i+k}} + \sum_{j=k}^w \frac{\gamma_{i+j,m-j} \gamma_{i+j,m+k-j}}{\alpha_{i+j+1}};$$

$$c_{i+k,i} = c_{i,i+k}, \quad (i = \overline{1, n-1}; k = \overline{1, m}), \quad (5.24в)$$

где $w = m - 1$ при $i \leq n - m$ и $w = n - i - 1$ при $i > n - m$.

Примечание. Если в (5.24б) и (5.24в) вычисленное значение верхнего предела становится меньше нижнего, то суммирование не выполняется, т.е. при $j, k > w$ и $j, k > m$ второй член в правой части указанных формул тождественно равен 0.

Следствие 5.3. Если матрица K_n^{-1} , обратная ковариационной матрице K_n измерений процесса $Z(t)$ в точках $\varepsilon_n^>$ является ленточной с полушириной ленты равной m , то процесс $Z(t)$ является m -связным КМ-процессом.

Замечание 5.13. Все предыдущие результаты этой главы были получены в предположении, что измерения m -связного КМ-процесса проводятся в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$. Было показано, что ковариационная матрица K_n^m таких измерений имеет регулярную (упорядоченную) структуру, соответствующую (5.23), а обратная к ней матрица K_n^{-m} является ленточной с полушириной ленты равной m . Используя результаты следствия 5.1, можно найти вид ковариационной матрицы измерений m -связного КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n .

Теорема 5.4.

1. Ковариационная матрица \tilde{K}_n^m измерений m -связного КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n может быть получена из матрицы K_n^m путем перестановки одноименных строк и столбцов K_n^m в соответствии с порядком следования точек плана $\varepsilon_n^>$ в плане ε_n .

2. Матрица $(\tilde{K}_n^m)^{-1}$ имеет не более $(2m + 1)n - m(m + 1)$ ненулевых элементов, положение которых можно определить, зная порядок следования точек плана $\varepsilon_n^>$ в плане ε_n , а значения найти с помощью формул (5.24) при соответствующей модификации индексов.

3. Любая положительно определенная матрица вида \tilde{K}_n^m может представлять собой ковариационную матрицу измерений m -связного КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n .

Примечание. Ненулевые элементы $(\tilde{K}_n^m)^{-1}$ будут расположены в позициях, находящихся на пересечении строк и столбцов с номерами, соответствующими точкам плана ε_n , индексы которых в упорядоченной последовательности $\varepsilon_n^>$ отличаются не более чем на m .

Доказательство этой теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 4.4.

5.4. Рекуррентное оценивание m -связных КМ-процессов по измерениям в точках упорядоченных планов

Рассмотрим возможности применения полученных результатов для повышения эффективности решения задач статистики случайных процессов. В качестве примера рассмотрим, как и в главе 4, задачу оптимальной линейной фильтрации с помощью ОМНК-оценок аддитивной составляющей наблюдаемого процесса с одновременной параметрической идентификацией его математического ожидания. Постановка и решение этой задачи подробно рассмотрены в первой главе, поэтому мы здесь не будем на этом останавливаться. В главе 4 показано, как упрощается решение задачи фильтрации для простых (односвязных) КМ-процессов. Там же рассмотрены рекуррентные процедуры нахождения оптимальных ОМНК-оценок для рассматриваемой задачи и показано, что для простых КМ-процессов рекуррентное вычисление таких оценок превращается в тривиальнейшую задачу. Поэтому здесь мы рассмотрим только следующий вопрос – как изменяются формулы рекуррентного оценивания (4.22)–(4.27), если исследуемый процесс является m -связным КМ-процессом и измерения проводятся в точках упорядоченных планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p .

Можно заметить, что при вычислении оптимальных ОМНК-оценок $\hat{\eta}_n(t)$, $\hat{\xi}_n(t)$, $\hat{y}_n(t)$, матрицы D_n и промежуточного вектора $\mathbf{q}_i(t)$ (см. главу 4), от структуры ковариационной матрицы измерений процесса зависят только вспомогательные величины α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и вектор \mathbf{f}_{i+1}^* .

Для вычисления α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* необходимо предварительно вычислить вектор $\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1}$ (см. ПЗ). Для ковариационной матрицы измерений m -связного КМ-процесса в точках плана $\varepsilon_n^>$ вектор \mathbf{u}_{i+1} при $m \leq i \leq n - 1$ принимает вид

$$\mathbf{u}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-m & i-m+1 & i-m+2 & \cdots & i \\ 0, & \cdots, & 0, & \gamma_{1i}, & \gamma_{2i}, & \cdots, & \gamma_{mi} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-m & [i] \\ 0, & \cdots, & 0, & \Gamma_i \end{pmatrix}^T, \quad (5.25a)$$

где элементы вектора Γ_i определяются выражением (5.22), а обозначение $[i]$ по всей этой главе означает, что индекс i изменяется от $i - m + 1$ до i .

При $i < m$ вектор \mathbf{u}_{i+1} имеет переменную длину, равную i и может быть представлен в виде:

$$\mathbf{u}_1 = (\gamma_{m1}); \mathbf{u}_2 = (\gamma_{m-1,2}, \gamma_{m2})^T; \dots; \mathbf{u}_{m-1} = (\gamma_{2,m-1}, \dots, \gamma_{m,m-1})^T, \quad (5.26b)$$

т.е. совпадает с вектором $\Gamma_{im}^T = \Gamma_i (i = \overline{1, m-1})$.

Из (5.25) следует, что для m -связных КМ-процессов вектор \mathbf{u}_{i+1} имеет в общем случае не более m ненулевых элементов.

Введем также следующие обозначения:

$$\mathbf{z}_{[i]} = (z_{i-m+1}, z_{i-m+2}, \dots, z_i)^T \quad (5.26)$$

– m -мерный вектор, представляющий собой последние m элементов вектора \mathbf{z}_i ;

$$\mathbf{k}_{zy}(t_{[i]}, t) = (k_{zy}(t_{i-m+1}, t), k_{zy}(t_{i-m+2}, t), \dots, k_{zy}(t_i, t))^T \quad (5.27)$$

– m -мерный вектор, представляющий собой последние m элементов вектора $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_p, t)$;

$$F_{[i]} = \begin{matrix} & & 1 & 2 & \cdots & m & & & 1 \cdots m \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} f_{1,i-m+1} & f_{1,i-m+2} & \cdots & f_{1i} \\ f_{2,i-m+1} & f_{2,i-m+2} & \cdots & f_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{p,i-m+1} & f_{p,i-m+2} & \cdots & f_{pi} \end{matrix} \right\| & = & \left\| \begin{matrix} \mathbf{f}_{1,[i]}^T \\ \mathbf{f}_{2,[i]}^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{p,[i]}^T \end{matrix} \right\| \end{matrix} \quad (5.28)$$

– подматрица размером $p \times m$, представляющая собой последние m столбцов матрицы F_p ; $\mathbf{f}_{j,[i]} = (f_{j,i-m+1}, f_{j,i-m+2}, \dots, f_{ji})^T$.

При $i < m$ векторы $\mathbf{z}_{[i]}$ и $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_{[i]}, t)$ имеют переменную длину, равную i , т.е.

$$\mathbf{z}_{[1]} = (z_1)^T; \mathbf{z}_{[2]} = (z_1, z_2)^T; \mathbf{z}_{[m-1]} = (z_1, \dots, z_{m-1})^T;$$

$$\mathbf{k}_{zy}(t_{[1]}, t) = (k_{zy}(t_1, t))^T;$$

$$\mathbf{k}_{zy}(t_{[2]}, t) = (k_{zy}(t_1, t), k_{zy}(t_2, t))^T; \dots; \mathbf{k}_{zy}(t_{[m-1]}, t) = (k_{zy}(t_1, t), k_{zy}(t_2, t), \dots, k_{zy}(t_{m-1}, t))^T.$$

Соответственно, матрица $F_{[i]}$ при $i < m$ будет также иметь переменное число столбцов, равное i , с номерами столбцов от 1 до i .

С учетом (5.25)–(5.28) выражения (4.21) и (4.23) для вычисления α_{i+1} , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* можно представить в виде:

$$\alpha_{i+1} = k_{i+1,i+1} - \Gamma_i^T K[i-1] \Gamma_i = k_{i+1,i+1} - \Gamma_i^T \mathbf{k}_{[i],i+1}; \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= (k_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \\ &= \left(k_{zy}(t_{i+1}, t) - \sum_{l=1}^m k_{zy}(t_{i-m+l}, t) \gamma_{li} \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = ; \end{aligned} \quad (5.30a)$$

$$= (k_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{k}_{zy}^T(t_{[i]}, t) \Gamma_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}};$$

$$z_{i+1}^* = (z_{i+1} - \mathbf{z}_i^T \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \left(z_{i+1} - \sum_{l=1}^m z_{i-m+l} \gamma_{li} \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \quad (5.30б)$$

$$= (z_{i+1} - \mathbf{z}_i^T \Gamma_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}};$$

$$\mathbf{f}_{i+1}^* = (\mathbf{f}_{i+1} - F_i \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = (\mathbf{f}_{i+1} - F_{[i]} \Gamma_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}}. \quad (5.30в)$$

В (5.30в) p -мерный вектор $F_{[i]} \Gamma_i$ имеет вид:

$$F_{[i]} \Gamma_i = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ p \end{matrix} \left\| \begin{matrix} \sum_{l=1}^m f_{1,i-m+l} \gamma_{li} \\ \sum_{l=1}^m f_{2,i-m+l} \gamma_{li} \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^m f_{p,i-m+l} \gamma_{li} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} f_{1,[i]} \Gamma_i \\ f_{2,[i]} \Gamma_i \\ \vdots \\ f_{p,[i]} \Gamma_i \end{matrix} \right\|. \quad (5.31)$$

В случае измерений в точках равномерного плана ε_n^p коэффициенты γ_{ji} ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$) не будут зависеть от индекса i , т.е.

$$\Gamma_i = (\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \dots, \gamma_{mi}) = \Gamma = \text{const.}$$

Формулы вычисления α_{i+1}^* , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* при этом ничем не будут отличаться от (5.29) и (5.30) с заменой в них вектора Γ_i на Γ .

Ранее было показано, что при обработке измерений немарковских процессов с помощью рекуррентных процедур ОМНК независимо от вида плана в точках которого проводятся измерения, в памяти ЭВМ необходимо постоянно хранить возрастающие в процессе итераций матрицы и векторы K_i^{-1} , F_i , $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_i, t)$, \mathbf{z}_i , \mathbf{k}_{i+1} ($i = \overline{1, n-1}$).

В случае измерений m -связных КМ-процессов в точках планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p , использование формул (5.29), (5.30) позволяет заменить возрастающие в размерах матрицы K_i^{-1} , F_i , на их подматрицы $K_m[i]$, $F_m[i]$ ($i = \overline{1, n-1}$), имеющие постоянные в процессе итераций размеры $m \times m$ и $p \times m$, соответственно, а векторы $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_i, t)$, \mathbf{z}_i , \mathbf{k}_{i+1} заменить на их подвекторы $\mathbf{k}_{zy}(t_{[i]}, t)$, $\mathbf{z}_{[i]}$, $\mathbf{k}_{[i], i+1}$, имеющие, независимо от номера итерации, постоянную длину, равную m .

Таким образом, при $m \ll n$ выигрыш в числе арифметических операций и требуемом объеме памяти при оценивании с помощью ОМНК с учетом марковости процесса может быть значительным. При $m = 1$ формулы (5.29), (5.30) полностью совпадают с формулами (4.29) для односвязных КМ-процессов, а при $m = n - 1$ ничем не отличаются от формул общего случая.

Формулы (5.29), (5.30) позволяют упростить вычисление векторов $\mathbf{q}_i(t)$, $\hat{\mathbf{V}}_i$ и матрицы D_i , входящих в (4.22)–(4.27). При этом величина α_{i+1} будет зависеть только от значения дисперсии процесса $Z(t)$ в точке t_{i+1} и дисперсий в точках, отстоящих от t_{i+1} не более чем на m позиций назад, а также коэффициентов ковариаций процесса между этими точками.

5.5. Дискретная аппроксимация случайных процессов m -связными КМ-процессами (КМ-аппроксимация)

Результаты главы 4 и предыдущих разделов 5 главы справедливы для случаев, когда наблюдаемый является простым или m -связным КМ-процессом. Но во многих случаях мы имеем дело с наблюдениями немарковских процессов. Ковариационные матрицы измерений таких процессов K_n не относятся к классу матриц K_n^m и поэтому для них матрица K_n^{-1} , обратная к K_n , является матрицей общего вида, т.е. все ее элементы могут быть ненулевыми. Это не позволяет при обработке наблюдений таких процессов использовать эффективные формулы вычисления оценок, полученные с учетом разреженности матрицы K_n^{-m} .

Здесь можно предложить два подхода, позволяющие использовать результаты настоящей работы для обработки наблюдений немарковских процессов.

1) Аппроксимация ковариационной функции исследуемого процесса ковариационной функцией простого или m -связного КМ-процесса, исходя из какого-либо критерия близости этих функций. При этом возникают вопросы выбора критерия близости функций двух аргументов. Наилучшим здесь был бы критерий, учитывающий конечную цель аппроксимации, т.е. точность получаемых оценок (например, близость выбранного функционала от дисперсионной матрицы оценок к значению этого функционала для оценок оптимального ОМНК).

2) Аппроксимация ковариационной матрицы измерений наблюдаемого процесса ковариационной матрицей m -связного КМ-процесса.

Первый подход достаточно подробно рассмотрен в литературе, поэтому мы здесь остановимся только на втором подходе.

При решении задач статистики ковариационных процессов на основе конечного числа дискретных измерений, вероятностные свойства процесса полностью определяются заданием дисперсий в точках измерений и коэффициентов ковариаций между этими точками. Другими словами, ковариационная матрица измерений полностью характеризует вероятностные свойства ковариационного процесса для дискретных задач. (Здесь и ниже, ковариационными называются случайные процессы, вероятностные свойства которых полностью определяются заданием ковариационной функции процесса.)

Определение 5.1. Дискретной аппроксимацией одного ковариационного процесса другим называется замена ковариационной матрицы измерений первого (аппроксимируемого) процесса ковариационной матрицей измерений второго (аппроксимирующего) процесса исходя из каких-то критериев такой замены.

Одним из возможных критериев дискретной аппроксимации может быть выбор такой аппроксимирующей матрицы, с помощью которой более просто, чем для исходной, решаются поставленные задачи.

Рассмотрим задачи оценивания случайных процессов с помощью дискретных оценок ОМНК. Как уже отмечалось, свойства оценок ОМНК в сильной мере зависят от вида весовой матрицы, выбранной для построения оценок. При выборе весовой матрицы обычно исходят из критерия статистической точности получаемых оценок. Например, если оцениваемая модель линейна относительно оцениваемых параметров и в качестве весовой матрицы ОМНК используется матрица K_n^{-1} , обратная ковариационной матрице измерений, то оценки ОМНК совпадают

с наилучшими линейными несмещенными оценками (НЛНО) (в классе соответствующих оценок). Трудности вычисления ОМНК-оценок с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$ были проанализированы выше.

Другим критерием выбора весовой матрицы W_n может быть простота вычисления ОМНК-оценок. С этой точки зрения, очень удобными для использования в качестве весовой представляются ленточные весовые матрицы. Раньше было показано, что ленточный вид с шириной ленты $2m + 1$ имеют матрицы, обратные ковариационным матрицам измерений m -связных КМ-процессов. Таким образом, если заменить ковариационную матрицу измерений наблюдаемого процесса K_n на ковариационную матрицу измерений m -связного КМ-процесса K_n^m , то весовая матрица оценок ОМНК с $W_n = K_n^{-1}$ будет ленточной. Это дает возможность при $m \ll n$ существенно упростить вычисление ОМНК-оценок. Здесь, естественно, сразу возникает вопрос о способе (критерии) выбора аппроксимирующей матрицы K_n^m и об оптимальности такой аппроксимации с точки зрения точности получаемых оценок.

Ниже будем называть замену матрицы K_n наблюдаемого случайного процесса на матрицу K_n^m – КМ – *аппроксимацией связности m или просто КМ-аппроксимацией случайного процесса*. При этом наблюдаемый (аппроксимируемый) случайный процесс может быть как немарковским, так и КМ-процессом более высокой связности, чем аппроксимирующий КМ-процесс.

Очевидно, можно предложить массу различных способов дискретной КМ-аппроксимации случайных процессов. Ниже предлагается один из возможных способов такой аппроксимации, который гарантирует (для задач, связанных с ОМНК-оцениванием), что получаемые оценки будут, по крайней мере, не хуже оценок взвешенного МНК, при связности аппроксимирующего КМ-процесса равного нулю, и будут совпадать с НЛНО, при связности аппроксимирующего КМ-процесса равного или большего $n - 1$, где n – число измерений.

Алгоритм дискретной аппроксимации состоит из двух шагов. Ниже он изложен с учетом симметричности K_n .

1) Из исходной матрицы K_n «вырезается» полулента шириной m , т.е. выделяются главная диагональ и m параллельных ей диагоналей сверху или снизу ($0 \leq m \leq n - 1$). С помощью элементов выделенной полуленты по формуле (5.22) вычисляются векторы Γ_i ($i = \overline{1, n-1}$). Таким образом, мы находим $m(n - m + 1) / 2$ коэффициентов γ_{ij} , где индекс i изменяется от 1 до $n - 1$, а индекс j изменяется от 1 до m при $i \geq m$ и от 1 до i при $i < m$.

2) Элементы матрицы K_n вне ленты шириной $2m + 1$ заменяются на новые элементы, рассчитанные с помощью соотношений (5.14) при $\Lambda_i = \Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ и $\mathbf{a}_{i|j} = \mathbf{k}_{i|j} (i > j)$.

Таким образом, мы получаем матрицу K_n^m , у которой элементы в пределах ленты шириной $2m + 1$ совпадают с соответствующими элементами исходной матрицы K_n , а элементы вне ленты вычислены по формулам (5.22) и (5.14) с помощью элементов, расположенных внутри ленты.

Примечание. Во многих случаях достаточно выполнить первый шаг, т.к. для решения многих задач нет необходимости в знании внедиагональных элементов K_n^m . Например, для обращения матрицы K_n^m достаточно знания векторов $\Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$, найденных на первом шаге и диагональных элементов $k_{ii} (i = \overline{1, n})$. Внедиагональные элементы могут быть всегда вычислены при необходимости, если известны Γ_i и k_{ii} .

При $m = 0$, матрица $K_n^m = K_n^0$ будет диагональной с диагональными элементами, совпадающими с диагональными элементами матрицы K_n . Так как диагональные элементы K_n есть дисперсии процесса в точках измерений, то оценки ОМНК с $W_n = K_n^{-1} = K_n^{-0}$ будут совпадать с оценками взвешенного МНК. При $m = 1$, у матриц K_n и $K_n^m = K_n^1$ будут совпадать элементы трех диагоналей (главной и двух параллельных ей соседних диагоналей), при $m = 2$ — одинаковыми будут элементы пяти диагоналей и т.д., при $m = n - 1$ — матрица $K_n^m = K_n$, т.е. при $m = n - 1$ матрицы K_n^m и K_n полностью совпадают. Таким образом, изменяя m от 0 до $n - 1$ можно варьировать точность аппроксимации матрицы K_n матрицей K_n^m .

Матрицу K_n^m , полученную таким образом, будем называть *матрицей вида K_n^m , сопряженной с матрицей K_n* . Напомним, что при $m = 0$ у K_n и сопряженной с ней матрицы K_n^m совпадают только диагональные элементы, а при $m = n - 1$ — сопряженные матрицы K_n^m и K_n полностью совпадают.

Согласно теореме 5.3, любая положительно определенная матрица вида K_n^m является ковариационной матрицей измерений какого-то m -связного КМ-процесса. Поэтому КМ-процесс(ы), соответствующий(е) сопряженной матрице K_n^m будем называть КМ-процессом(ами), сопряженным(и) с аппроксимируемым процессом. При этом аппроксимацию заданного процесса сопряженным КМ-процессом со связностью $m = 0$ можно интерпретировать как дискретную замену процесса в точках измерений белым шумом с дисперсией, совпадающей с дисперсией исходного процесса. Значение $m = 1$ означает аппроксимацию процесса в точках измерений простым (односвязным) КМ-процессом и т.д.,

значение $m = n - 1$ означает аппроксимацию исходного процесса $(n - 1)$ – связным КМ-процессом, совпадающим в точках измерений с исходным процессом. В последнем случае, ковариационные матрицы K_n и K_n^m , соответственно, исходного и аппроксимирующего $(n - 1)$ – связного КМ-процесса полностью совпадают.

Как уже отмечалось, предлагаемый способ КМ-аппроксимации гарантирует, что получаемые оценки не будут хуже оценок взвешенного МНК (при $m = 0$). Аналитических результатов, позволяющих оценить степень близости ОМНК-оценок с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$ к НЛНО (имеющим весовую матрицу $W_n = K_n^{-1}$) для произвольных регрессионных и ковариационных функций и произвольной величине $m < n - 1$ в настоящее время не существует.

Для исследования вопросов точности ОМНК-оценок, получаемых с помощью КМ-аппроксимации, была проведена большая серия численных экспериментов с ковариационными функциями немарковских процессов, широко используемых в практике исследований. Результаты этих экспериментов излагаются в следующем разделе.

5.6. Численное исследование точности КМ-аппроксимации в задаче параметрической идентификации математического ожидания процесса

Для оценки точности КМ-аппроксимации была рассмотрена задача параметрической идентификации с помощью ОМНК-оценок математического ожидания случайного процесса $Y(t)$, описываемого моделью

$$Y(t) = \eta(t) + \xi(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t) + \xi(t), \quad t \in T, \quad (5.32)$$

где $\eta(t)$ – математическое ожидание; $\xi(t)$ – центрированный шумовой процесс с известной ковариационной функцией $k(s, t)$ (совпадающей с ковариационной функцией процесса $Y(t)$); \mathbf{B} и $\mathbf{f}(t)$ – p -мерные векторы, соответственно, оцениваемых параметров и известных линейно-независимых детерминированных функций; T – интервал, в котором справедлива модель (5.32).

Предполагалось, что в точках упорядоченного n -точечного плана $\varepsilon_n^>$ выполняются измерения процесса $Y(t)$ и целью эксперимента является вычисление оценок параметров \mathbf{B} по данным этих измерений. В качестве оценок параметров \mathbf{B} использовались ОМНК-оценки $\hat{\mathbf{B}}_n$, полученные с помощью весовой матрицы $W_n = A_n^{-1}$, где A_n – положительно определенная матрица. В качестве A_n в численных экспериментах выбирались матрицы следующего вида:

1) K_n^{-1} , где K_n – ковариационная матрица измерений процесса $Y(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$;

2) K_n^m , где K_n^m – матрица, сопряженная с K_n (при этом величина m сопряженной матрицы изменялась от 1 до 5);

3) I_n , где I_n – единичная матрица порядка n .

В первом случае, оценки ОМНК совпадают с НЛНО, а в последнем случае – с оценками обычного МНК. Дисперсионные матрицы ОМНК-оценок параметров \mathbf{B} для рассмотренных весовых матриц имеют вид (см. главу 1):

$$1) \quad D_n^{(1)} = (F_n K_n^{-1} F_n^T)^{-1}; \quad (5.33)$$

$$2) \quad D_n^{(2)} = (F_n K_n^{-m} F_n^T)^{-1} F_n K_n^{-m} K_n K_n^{-m} F_n^T (F_n K_n^{-m} F_n^T)^{-1}; \quad (5.34)$$

$$3) \quad D_n^{(3)} = (F_n F_n^T)^{-1} F_n K_n F_n^T (F_n F_n^T)^{-1}. \quad (5.35)$$

Сравнивая матрицы $D_n^{(1)}$, $D_n^{(2)}$ и $D_n^{(3)}$ (или, при $p > 1$, заданные функционалы Ψ от этих матриц) для различных комбинаций функций $k(s, t)$ и $f(t)$ при различных планах $\varepsilon_n^>$ можно получить эмпирические оценки точности КМ-аппроксимации.

В качестве функционала Ψ были выбраны определитель матрицы и след матрицы. В качестве ковариационной функции процесса $Y(t)$ рассматривались стационарные функции вида:

$$1) k(\tau) = \exp(-\alpha_1 |\tau|) \cos \alpha_2 \tau;$$

$$2) k(\tau) = \exp(-\alpha_1 \tau^2);$$

$$3) k(\tau) = \exp(-\alpha_1 \tau^2) \cos \alpha_2 \tau;$$

$$4) k(\tau) = \alpha_1 \exp(-\alpha_2 |\tau|) \cos \alpha_3 \tau + \alpha_4 \exp(-\alpha_5 |\tau|) \cos \alpha_6 \tau.$$

Вид функций 1–3 для различных значений коэффициентов α_i приведен на рис. 5.3–5.5. Отметим, что функции 1 и 4 представляют собой ковариационные функции первых компонент двумерных марковских процессов (двумерный марковский процесс с ковариационной функцией первой компоненты, совпадающей с функцией 1, рассмотрен в примере 3.9), функции 2 и 3 являются ковариационными функциями немарковских процессов, т.к. имеют бесконечное число производных.

В качестве функций $\mathbf{f}(t)$, на основе которых вычислялись матрицы F_n в (5.33)–(5.35), были выбраны полиномы 0, 1, 2 и 3 степеней, т.е. модели математического ожидания $Y(t)$ имели вид:

$$1) \eta(t) = \beta_1;$$

$$2) \eta(t) = \beta_1 + \beta_2 t;$$

$$3) \eta(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2;$$

$$4) \eta(t) = \beta_1 + \beta_2 t + \beta_3 t^2 + \beta_4 t^3.$$

Были также рассмотрены регрессионные функции в виде гауссовских пиков, когда $\eta(t) = \beta_1 \exp(-\theta(t - t_0)^2)$.

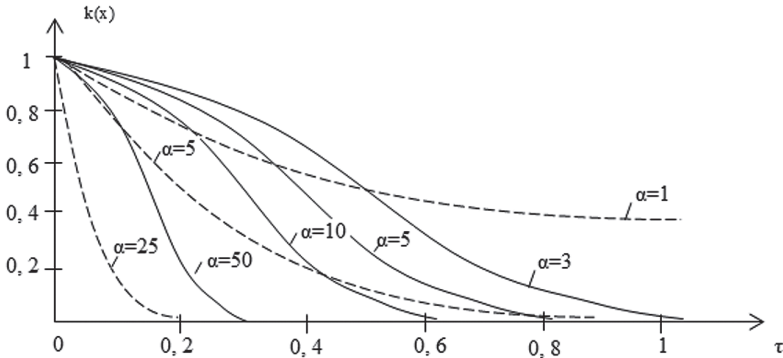


Рис. 5.3. Вид ковариационных функций $k(\tau) = \exp(-\alpha\tau^2)$ (непрерывные линии) и $k(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ (штриховые линии) при различных значениях α

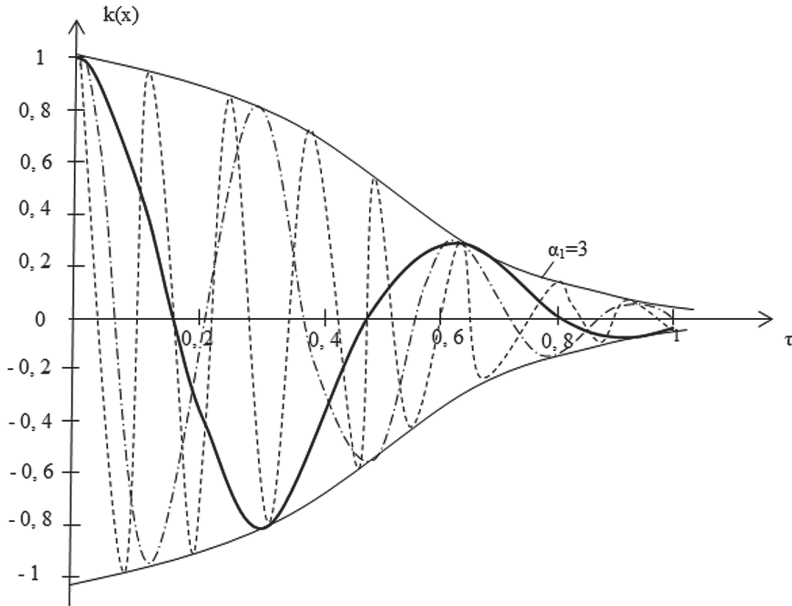


Рис. 5.4. Функция $k(\tau) = \exp(-3\tau^2) \cos\alpha_2\tau$ при различных значениях α_2 ($\alpha_2 = 10$ – сплошная линия; $\alpha_2 = 20$ – штрихпунктирная и $\alpha_2 = 50$ – пунктирная линия)

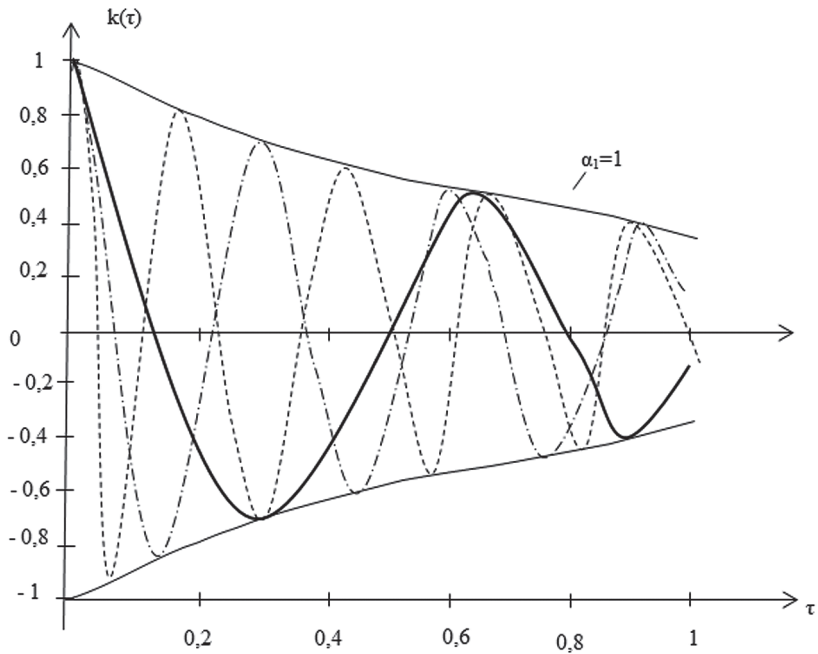


Рис. 5.5. Функция $k(\tau) = \exp(-|\tau|) \cos \alpha_2 \tau$ при различных значениях α_2 ($\alpha_2 = 10$ — сплошная линия; $\alpha_2 = 20$ — штрихпунктирная и $\alpha_2 = 40$ — пунктирная линия)

Также рассматривались регрессионные функции в виде гауссовой кривой, когда $\eta(t) = \beta_1 \exp(-\theta(t - t_0)^2)$.

В экспериментах значения параметров $\alpha_1 \dots \alpha_3$ и параметр θ изменялись в широких пределах, позволяющих охватить большой диапазон реальных экспериментальных ситуаций.

В качестве плана $\varepsilon_n^>$ использовались 10- и 18-точечные планы с равноотстоящими и неравноотстоящими точками.

Результаты численных экспериментов вынесены в приложение 8. На рис. 5.6–5.9 приведены наиболее характерные зависимости $\Psi[D_n^i](i = \overline{1,3})$ от величины m аппроксимирующей матрицы K_n^m .

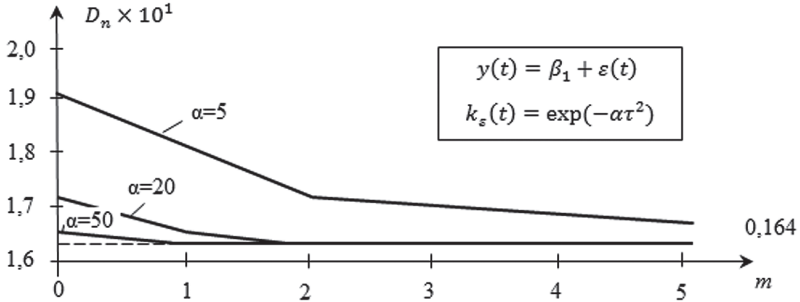


Рис. 5.6. Зависимость дисперсии D_n параметра β_1 от ширины полувенты m , аппроксимирующей матрицы K_n^m

Примечания.

1. Значение D_n при $m = n - 1$ соответствует D_n^{BLUE} – дисперсии НЛНО параметра β_1 , а при $m = 0$ соответствует D_n^{LSME} – дисперсии МНК-оценки.
2. Для наглядности кривая, соответствующая $\alpha = 20$, умножена на коэффициент 1,71, а кривая, соответствующая $\alpha = 50$, на коэффициент 2,43.

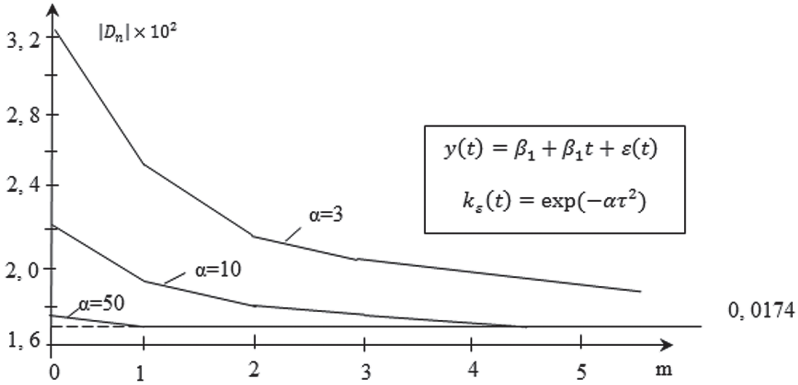


Рис. 5.7. Зависимость $\Psi[D_n] = |D_n|$ от ширины полувенты m , аппроксимирующей матрицы K_n^m

Примечания к рис. 5.7.

1. Значения $|D_n|$ при $m = 0$ соответствуют $|D_n^{LSME}|$.
2. Горизонтальная линия соответствует $|D_n^{BLUE}|$.
3. Кривая, соответствующая $\alpha = 10$, умножена на коэффициент 1,881, а кривая, соответствующая $\alpha = 50$, на коэффициент 5,073.

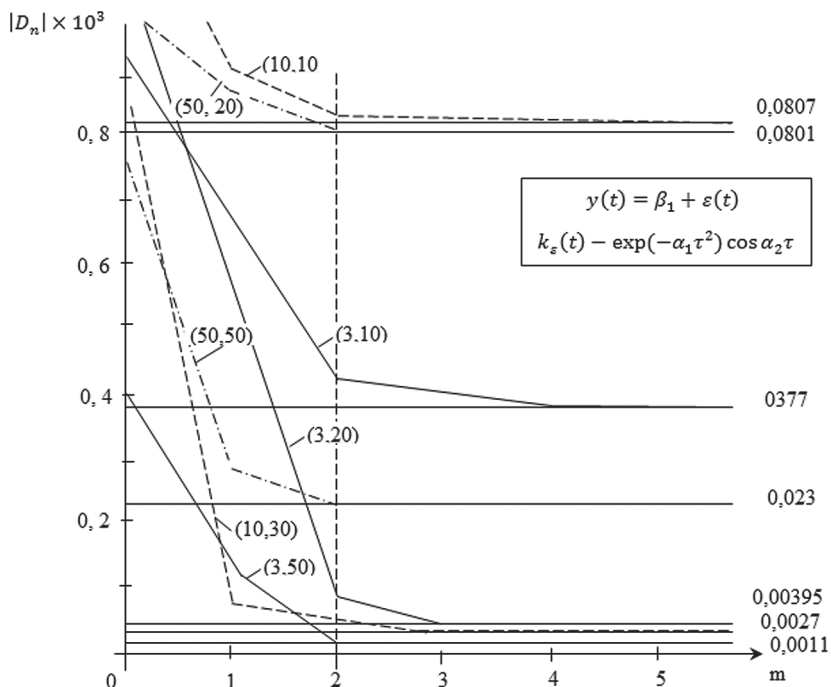


Рис. 5.8. Зависимость $\Psi[D_n] = |D_n|$ от ширины полуленты m , аппроксимирующей матрицы K_n^m

Примечания.

1. См. примечания 1 и 2 к рис. 5.7.
2. В круглых скобках первое число соответствует α_1 , второе — α_2

Результаты численных экспериментов позволяют сделать следующие выводы, относительно возможности использования КМ-аппроксимации в задачах ОМНК-оценивания случайных процессов.

1) Если измерения слабо коррелированы в области наблюдения процесса, другими словами, интервал корреляции мал по отношению к интервалу съема данных, то использование оптимальных ОМНК-оценок (НЛНО) дает незначительный выигрыш по сравнению с обычными МНК-оценками. В этом случае, целесообразно отказаться от оптимальных ОМНК-оценок в пользу более простых в вычислительном отношении МНК оценок, даже при известных корреляционных свойствах процесса.

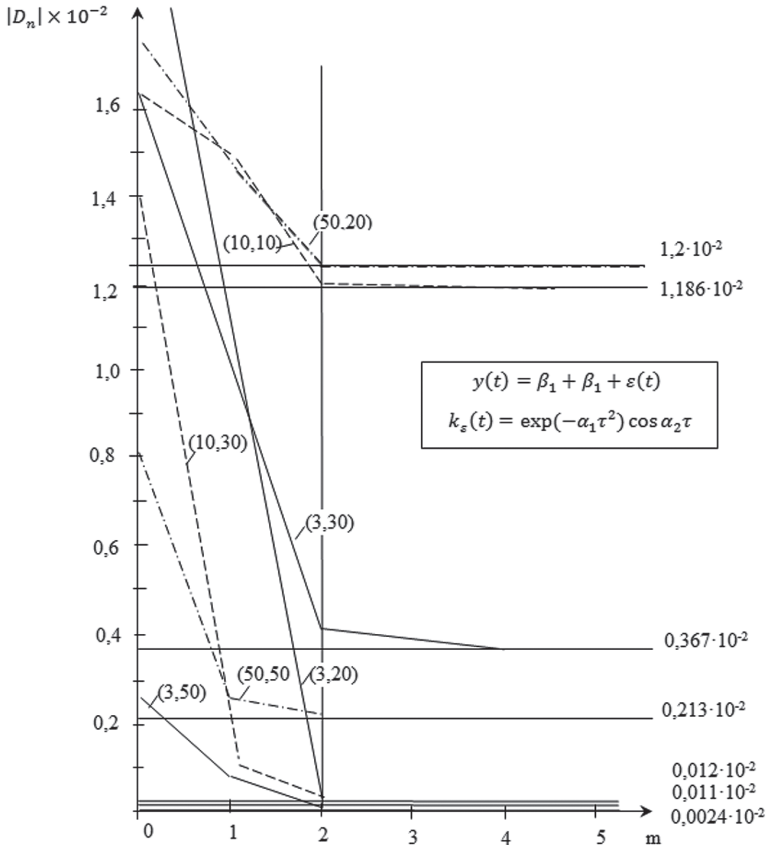


Рис. 5.9. Зависимость $\Psi[D_n] = |D_n|$ от ширины полупленты m , аппроксимирующей матрицы K_n^m

2) При сильнокоррелированных наблюдениях, особенно в случаях, когда ковариационная функция содержит периодическую составляющую, использование ОМНК-оценок дает существенный выигрыш в точности получаемых оценок. Например, в некоторых модельных ситуациях, величина определителя дисперсионной матрицы НЛНО была в десятки и сотни раз меньше величины определителя дисперсионной матрицы МНК-оценок (см. приложение 8). Очевидно, в таких ситуациях использование ОМНК-оценок с весовой матрицей $W_n = K_n^{-1}$ оправдано, несмотря на большую сложность их вычисления.

3) Результаты численных экспериментов показывают, что во всех модельных ситуациях аппроксимация ковариационной матрицы измерений процесса матрицей K_n^m , уже при малых величинах связности m аппроксимирующего процесса, позволяет получать ОМНК-оценки, дисперсионная матрица которых практически не отличается от дисперсионной матрицы НЛНО. В экспериментах такая величина связности не превышала 4. Особенно интересен тот факт, что для ковариационных функций 1 и 3, содержащих периодическую компоненту, величина связности m , при которой дисперсионная матрица ОМНК-оценок становилась мало отличимой от дисперсионной матрицы НЛНО, равнялась 2, независимо от вида модели математического ожидания процесса и плана эксперимента. Очевидно, это связано с тем, что эти функции определяются двумя параметрами и при связности аппроксимирующего КМ-процесса равного 2, вся информация о ковариационных свойствах измерений может быть получена по элементам ковариационной матрицы измерений, входящих в полуленту шириной m .

4) Суммируя вышесказанное, можно сказать, что в случае сильнокоррелированных измерений использование оптимального ОМНК дает большой выигрыш в точности получаемых оценок. При этом, для упрощения вычисления таких оценок можно рекомендовать дискретную аппроксимацию наблюдаемого процесса КМ-процессом небольшой связности. Как показывают результаты численных экспериментов, по крайней мере для полиномиальных регрессионных функций и ковариационных функций вида 1-4, КМ-аппроксимация позволяет достичь хорошего компромисса между точностью получаемых оценок и сложностью их вычисления.

Выводы по главе

1. Найден класс квадратных матриц A_n^m , обращение которых приводит к ленточным матрицам с шириной ленты, равной $2m + 1$ ($m = 0, (n-1)/2$). Матрицы вида A_n^m полностью определяются диагональными и $2mn - m(m + 1)$ внедиагональными элементами. Получены формулы вычисления элементов обратной ленточной матрицы через элементы A_n^m , входящие в ленту шириной $2m + 1$. Найдена также простая формула вычисления определителя таких матриц.

Показано, что при перестановке (переупорядочивании) строк и (или) столбцов A_n^m , обратная к ней матрица A_n^{-m} теряет регулярную (ленточную) структуру и становится разреженной матрицей с числом ненулевых элементов не превышающим $w = 2m(n + 1) - m(m + 1)$.

2. Предложен способ приведения квадратной матрицы A_n^m , определяемой w элементами, расположенными в пределах ленты шириной $2m + 1$, к матрице вида A_n^m . Предложен новый алгоритм обращения матриц,

приводимых к виду A_n^m , более эффективный по сравнению с известными алгоритмами обращения несимметричных матриц.

3. Получены условия, которым должна удовлетворять положительно определенная функция двух аргументов, чтобы она могла быть ковариационной функцией двусвязного или трехсвязного КМ-процессов.

4. Найден общий вид ковариационной матрицы измерений m -связного КМ-процесса в точках упорядоченных планов K_n^m и планов общего вида \tilde{K}_n^m . Показано, что они представляют собой подмножества положительно определенных матриц вида A_n^m или \tilde{A}_n^m . При этом матрица, обратная ковариационной матрице K_n^m , является ленточной симметричной матрицей с шириной полуленты m , а матрица, обратная \tilde{K}_n^m , разреженной — с числом ненулевых элементов не большим w .

Показано, что любая положительно определенная матрица вида K_n^m (или \tilde{K}_n^m) является ковариационной матрицей измерений m -связного КМ-процесса в точках соответствующего плана (упорядоченного или неупорядоченного).

5. Выведены формулы рекуррентного вычисления оптимальных ОМНК-оценок по измерениям m -связного КМ-процесса в точках упорядоченного плана. При этом, операции с возрастающими в процессе итераций $n \times n$ (или $p \times n$ ($p \leq n$)) матрицами заменяются на операции с $m \times m$ (или $p \times m$) подматрицами этих матриц, размеры которых не изменяются в процессе итераций. При $m \ll n$ это позволяет существенно упростить процедуры рекуррентного ОМНК.

6. Предложен способ дискретной аппроксимации наблюдаемого случайного процесса m -связным КМ-процессом, названный КМ-аппроксимацией случайного процесса. Суть КМ-аппроксимации заключается в определенном образом выполненной замене ковариационной матрицы измерений наблюдаемого процесса K_n ковариационной матрицей измерений m -связного КМ-процесса K_n^m .

7. Приведены результаты численного исследования точности КМ-аппроксимации в линейных задачах параметрической ОМНК-идентификации математического ожидания процесса. Результаты численных экспериментов показывают, что уже при малой величине связности m аппроксимирующего КМ-процесса, дисперсионная матрица ОМНК-оценок с весовой матрицей $W_n = K_n^{-m}$, мало отличается от дисперсионной матрицы НЛНО, т.е. ОМНК-оценок с весовой матрицей $W_n = K_n^{-m}$. На основе этого рекомендуется, для упрощения обработки сильнокоррелированных измерений использовать КМ-аппроксимацию. Это позволяет достичь хорошего компромисса между точностью получаемых оценок и сложностью их вычисления.

6. КОВАРИАЦИОННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ И КОМПОНЕНТ ВЕКТОРНЫХ КМ-ПРОЦЕССОВ

В главах 4 и 5 рассматривались ковариационные матрицы измерений в задачах исследования скалярных КМ-процессов и немарковских процессов, аппроксимируемых скалярными КМ-процессами. При этом было показано, что матрица, обратная ковариационной матрице измерений скалярного КМ-процесса имеет разреженный вид (в частном случае – ленточный). Это дает возможность существенно упростить вычислительные алгоритмы оценивания. В данной главе рассматриваются особенности ковариационных матриц измерений в задачах исследования векторных КМ-процессов и скалярных немарковских процессов, которые можно считать одной из компонент векторного КМ-процесса. (В главе 3 было показано, что многие немарковские процессы, можно представить в виде первой компоненты векторного марковского процесса соответствующей размерности.)

Основная задача будет состоять в поиске общего вида ковариационной матрицы измерений векторного КМ-процесса для разных способов ее формирования, а также синтезе рекуррентных алгоритмов оценивания для векторных КМ-процессов, более простых с вычислительной точки зрения, относительно процедур общего вида.

Для простоты, поставленные вопросы рассматриваются на примере задачи оценивания неизвестных параметров линейно-параметризованной модели математического ожидания процесса, т.е. задачи параметрической идентификации математического ожидания процесса с известной ковариационной функцией. Показано как полученные результаты можно обобщить на задачи фильтрации, интерполяции и экстраполяции случайного процесса (полезного сигнала) по наблюдениям процесса, представляющего собой сумму полезного сигнала и случайного шума. При этом предполагается, что математическое ожидание полезного сигнала можно описать линейно-параметризованной моделью с известными регрессионными функциями, а ковариационная функция наблюдаемого процесса и взаимная ковариационная функция наблюдаемого процесса и сигнала известны.

6.1. Оптимальные оценки в задачах фильтрации векторных случайных процессов (схема обработки 1)

Многие результаты, полученные для скалярных случайных процессов, например, формулы нахождения оптимальных ОМНК-оценок (1.56)-(1.59), можно легко перенести на случай векторных случайных

процессов, если в вычислительных процедурах ОМНК для векторных процессов использовать блочное представление векторов и матриц. При этом, очевидно, разбиение векторов и матриц на блоки можно выполнить различным образом, исходя из различных критериев, например, критериев простоты обработки, наглядности представления результатов и т.д. Мы рассмотрим две схемы разбиения ковариационной матрицы и вектора измерений, а также других векторов и матриц, на блоки, соответствующие двум наиболее распространенным схемам вычисления ОМНК-оценок для задачи фильтрации векторных случайных процессов. Будем называть их схемами обработки 1 и 2. В данном разделе рассматривается схема обработки 1.

Первоначально рассмотрим постановку и решение задачи поиска оптимальных ОМНК-оценок параметров модели математического ожидания векторного случайного процесса. Пусть наблюдается векторный случайный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_m(t))^T$, описываемый моделью

$$\mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{\Xi}(t), \quad t \in T, \quad (6.1)$$

где $\boldsymbol{\eta}(t) = E\{\mathbf{Z}(t)\} = (\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_m(t))^T$ – вектор математических ожиданий (детерминированных составляющих) компонент процесса $\mathbf{Z}(t)$;

$\boldsymbol{\Xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))^T$ – векторный центрированный случайный процесс с матричной ковариационной функцией $K(s, t)$, элементы которой определяются следующим образом:

$$k_{ij}(s, t) = E\{\xi_i(s)\xi_j(t)\}, \quad s, t \in T, \quad i, j = \overline{1, m} \quad (6.2)$$

(здесь $k_{ij}(s, t)$ при $i = j$ есть автоковариационные функции компонент $\xi_i(t)$, а при $i \neq j$ – взаимные ковариационные функции компонент $\xi_i(t)$ и $\xi_j(t)$ процесса $\boldsymbol{\Xi}(t)$); T – область (интервал) в которой справедлива модель (6.1); E – оператор математического ожидания.

Предположим, что поставлена задача линейной оптимальной идентификации математического ожидания процесса $\mathbf{Z}(t)$ на основе конечно-го числа измерений одной его реализации $\mathbf{Z}(t)$. (Здесь и ниже, случайные процессы обозначены прописными (большими) буквами, а их реализации – строчными (малыми) буквами. Там, где это может вызвать разночтения, используются термины «процесс» или «реализация процесса».)

Будем рассматривать задачу в параметрической постановке, когда математические ожидания компонент $\mathbf{Z}(t)$ описываются параметрическими моделями

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{B}) = E\{\mathbf{z}(t)\} = (\eta_1(t, \mathbf{B}_1), \eta_2(t, \mathbf{B}_2), \dots, \eta_m(t, \mathbf{B}_m))^T, \quad (6.3)$$

известными с точностью до матрицы параметров $B = [B_1, B_2, \dots, B_m]$. При этом задача линейной оптимальной идентификации сводится к поиску ОМНК-оценок \hat{B} матрицы параметров B по данным измерений одной реализации $\mathbf{z}(t)$ процесса $\mathbf{Z}(t)$. Далее мы подробно остановимся на случае линейно параметризованных моделей, когда

$$\eta_i(t, \mathbf{B}_i) = \mathbf{f}_i^T(t) \mathbf{B}_i, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.4)$$

где $\mathbf{f}_i(t) = (f_{i1}(t), f_{i2}(t), \dots, f_{i, l_i}(t))^T$ и $\mathbf{B}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i, l_i})^T$ — l_i — мерные векторы, соответственно, линейно независимых детерминированных (регрессионных) функций и параметров, задающих модель детерминированной составляющей i -й компоненты процесса $\mathbf{Z}(t)$. При этом

$$\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{B}) = (\mathbf{f}_1^T(t) \mathbf{B}_1, \mathbf{f}_2^T(t) \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{f}_m^T(t) \mathbf{B}_m)^T = \text{diag} F^T(t) B, \quad (6.5)$$

где матрица $F(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)]$; $\text{diag} A$ — диагональные элементы матрицы A .

В общем случае, размерности l_i ($i = \overline{1, m}$) векторов $\mathbf{f}_i(t)$ и \mathbf{B}_i для различных компонент $\mathbf{Z}(t)$ могут быть различными. В этом случае, матрицы \mathbf{B} и $F(t)$ будут иметь неровные нижние границы. При программной реализации удобнее, когда $l_1 = l_2 = \dots = l_m = l$. Это можно сделать найдя $l = \max_i l_i$ и дополнив векторы $\mathbf{f}_i(t)$ и \mathbf{B}_i , длина которых меньше l , необходимым числом нулевых элементов.

Кроме того, будем предполагать, что матричная ковариационная функция $K(s, t)$ известна с точностью до постоянного множителя.

Будем рассматривать эту задачу в довольно общем аспекте, когда число оцениваемых параметров для каждой компоненты (размерности векторов $\mathbf{f}_i(t)$ и \mathbf{B}_i), а также число и точки измерений отдельных компонент $\mathbf{Z}(t)$ различны.

Чтобы работать только с прямоугольными двумерными матрицами введем следующие обозначения. Запишем матрицу параметров \mathbf{B} в виде составного (блочного) одномерного вектора длиной L :

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\overbrace{b_1, \dots, b_{l_1}}^{\mathbf{B}_1^T}, \overbrace{b_{l_1+1}, \dots, b_{l_1+l_2}}^{\mathbf{B}_2^T}, \dots, \overbrace{b_{L-l_m+1}, \dots, b_L}^{\mathbf{B}_m^T} \right)^T. \quad (6.6)$$

Индекс p элемента b_p вектора $\boldsymbol{\beta}$, соответствующего элементу β_{ij} матрицы B можно найти с помощью формулы

$p = \sum_{k=1}^{j-1} l_k + j$, ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, l_i}$). При этом p изменяется от 1 до L , где $L = \sum_{i=1}^m l_i$ – общее число параметров β_{ij} и функций f_{ij} ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, l_i}$), входящих в модели всех компонент математического ожидания процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Запишем матричную функцию $F(t)$ в виде блочно-диагональной матрицы размера $L \times m$:

$$F_L^m(t) = \begin{matrix} & & 1 & 2 & \dots & m \\ & 1 & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & l_1 & & & & \\ l_1+1 & & \mathbf{f}_1(t) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & \vdots & & & & \\ & l_2 & \mathbf{0} & \mathbf{f}_2(t) & \dots & \mathbf{0} \\ & \vdots & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L-l_m+1 & & & & & \\ & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}_m(t) \\ & L & & & & \end{matrix} . \quad (6.7)$$

При этом формула (6.5) принимает вид

$$\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{B}) = [F_L^m(t)]^T \boldsymbol{\beta}. \quad (6.8)$$

Пусть измерения i -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$ проводятся в точках n_i – точечного плана $\varepsilon_i = (t_1, t_2, \dots, t_{n_i} \mid t_j \in T; j = \overline{1, n_i})$ ($i = \overline{1, m}$). Обозначим через ε_N N – точечный план, формируемый следующим образом:

$$\varepsilon_N = \left(\overbrace{t_1, t_2, \dots, t_{n_1}}^{\varepsilon_{n_1}}, \overbrace{t_{n_1+1}, \dots, t_{n_1+n_2}}^{\varepsilon_{n_2}}, \dots, \overbrace{t_{N-n_m+1}, \dots, t_N}^{\varepsilon_{n_m}} \right), \quad (6.9)$$

где индекс p элемента t_p плана ε_N , соответствующего точке t_j плана ε_i можно найти с помощью формулы $p = \sum_{k=1}^{i-1} n_k + j$, ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n_i}$). При этом p изменяется от 1 до N , где $N = \sum_{i=1}^m n_i$ – общее число точек плана ε_N , совпадающее с числом измерений всех компонент процесса $\mathbf{Z}(t)$. Точки внутри каждого плана должны быть различными, часть или все точки плана ε_i могут совпадать с точками плана ε_j ($i, j = \overline{1, m}$), но независимо от этого они должны быть включены в оба плана, если в них проводятся измерения соответствующих компонент $\mathbf{Z}(t)$.

Обозначим через \mathbf{z}_N вектор измерений $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана ε_N , т.е.

$$\mathbf{z}_N = (z^1, z^2, \dots, z^m)^T, \quad (6.10)$$

где $z^i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{i, n_i})^T$ – вектор измерений i -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$ точек плана ε_i ($z_{ij} = z_i(t_j), t_j \in \varepsilon_i$). При этом в векторе \mathbf{z}_N измерение z_{ij} будет иметь индекс p , который можно вычислить с помощью формулы

$$p = \sum_{k=1}^{i-1} n_k + j, \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n_i}).$$

Таким образом, индекс p будет изменяться от 1 до N .

Предположим, что ковариационная матрица K_N измерений $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана ε_N формируется в виде следующей блочной $N \times N$ матрицы, где

$$K^{ij} = [k_{ij}(t_r, t_s) | t_r \in \varepsilon_{n_i}; t_s \in \varepsilon_{n_j}; r = \overline{1, n_i}; s = \overline{1, n_j}]$$

при $i = j$ есть квадратная подматрица порядка n_i , представляющая собой ковариационную матрицу измерений i -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана ε_i , а при $i \neq j$ подматрица размером $n_i \times n_j$, представляющая собой ковариационную матрицу измерений i -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана ε_i и j -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана ε_j ($i, j = \overline{1, m}$).

$$K_N = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & \dots & m & \\ & 1 \dots n_1 & n_1+1 \dots n_1+n_2 & \dots & N-n_m+1 \dots N & \\ \hline 1 & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & K^{11} & K^{12} & \dots & K^{1m} & 1 \\ n_1 & \vdots & & & & \vdots \\ \hline n_1+1 & K^{21} & K^{22} & \dots & K^{2m} & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n_1+n_2 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ N-n_m+1 & K^{m1} & K^{m2} & \dots & K^{mm} & m \\ \vdots & & & & & \vdots \\ N & & & & & \vdots \end{array} \quad (6.11)$$

Определим матрицу измерений F_N в виде следующей блочно-диагональной матрицы размера $L \times N$:

$$F_N = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ l_1 \\ \hline l_1+1 \\ \vdots \\ l_1+l_2 \\ \hline \vdots \\ \hline L-l_m+1 \\ \vdots \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \dots \quad m \\ 1 \dots n_1 \quad n_1+1 \dots n_1+n_2 \quad \dots \quad N-n_m+1 \dots N \\ \hline F^1 \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} \quad F^2 \quad \dots \quad \mathbf{0} \\ \hline \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ \hline \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad F^m \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline m \end{array} \end{array}, \quad (6.12)$$

где $F^i = [\mathbf{f}_i(t_r), t_r \in \varepsilon_{n_i}; r = \overline{1, n_i}] - (l_i \times n_i)$ подматрица значений вектора $\mathbf{f}_i(t)$ в точках плана ε_{n_i} .

Введенные обозначения дают возможность следующим образом записать оптимальные ОМНК-оценки (совпадающие с наилучшими линейными несмещенными оценками) параметров β векторного случайного поля, удовлетворяющего условиям (6.1)–(6.5), по результатам измерений в точках плана ε_N :

$$\hat{\beta}_N = [F_N K_N^{-1} F_N^T]^{-1} F_N K_N^{-1} \mathbf{Z}_N = D_N \mathbf{Z}_N^*, \quad (6.13)$$

где $D_N = [F_N K_N^{-1} F_N^T]^{-1} - (L \times L)$ матрица, элементы которой представляют собой дисперсии и ковариации оценок $\hat{\beta}_N$ и могут служить мерой точности получаемых оценок; $\mathbf{Z}_N^* = F_N K_N^{-1} \mathbf{Z}_N - L$ -мерный преобразованный вектор измерений.

Матрицу D_N часто называют дисперсионной матрицей оценок $\hat{\beta}_N$, а обратную к ней матрицу $M_N = [F_N K_N^{-1} F_N^T] = D_N^{-1} -$ информационной матрицей плана ε_N [97], т.е. матрицей, определяющей информационность различных точек измерений при заданных матрицах F_N и K_N .

Как уже отмечалось в главе 1, наибольшую трудность при вычислении оценок $\hat{\beta}_N$ представляет обращение матрицы K_N . Одним из способов облегчения задачи обращения матриц большой размерности является разбиение большой матрицы на подматрицы (блоки) меньшей размерности

и использование формул обращения блочных матриц. В данном случае матрица K_N естественным образом разбита на блоки, которые имеют описанную в (6.11) физическую интерпретацию.

Таким образом, здесь наиболее целесообразно обращать матрицу K_N как блочную, с блочным же представлением обратной матрицы K_N^{-1} , размеры блоков C^{ij} ($i, j = \overline{1, m}$) которой совпадают с размерами соответствующих блоков K^{ij} ($i, j = \overline{1, m}$) исходной матрицы K_N .

$$K_N^{-1} = \begin{array}{c|ccc|c|c} & 1 & 2 & \dots & m & \\ & 1 \dots n_1 & n_1+1 \dots n_1+n_2 & \dots & N-n_m+1 \dots N & \\ \hline 1 & C^{11} & C^{12} & & C^{1m} & 1 \\ \vdots & & & & & \\ n_1 & & & & & \\ \hline n_1+1 & C^{21} & C^{22} & \dots & C^{2m} & 2 \\ \vdots & & & & & \\ n_1+n_2 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline N-n_m+1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ N & C^{m1} & C^{m2} & \dots & C^{mm} & m \end{array} \quad (6.14)$$

С учетом (6.14) легко записать общие элементы матрицы M_N и вектора \mathbf{Z}_N^* :

$$M^{ij} = F^i C^{ij} (F^j)^T, \quad (i, j = \overline{1, m}), \quad (6.15)$$

$$Z^{i*} = F^i \sum_{j=1}^m C^{ij} Z^j, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.16)$$

где $M^{ij} - (l_i \times l_j)$ подматрица матрицы M_N , а $Z^{i*} - l_i$ - мерный вектор, входящий в составной вектор \mathbf{Z}_N^* , длиной L .

Опираясь на формулу (6.13) можно, при соответствующих предположениях, получить различные более простые оценки, используемые в теории линейного оценивания.

1. В частности, если все компоненты детерминированной составляющей $\mathbf{Z}(t)$ имеют общие параметры, т.е. $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j = \mathbf{B}$, $l_i = l_j = l$ ($i, j = \overline{1, m}$), то блочно-диагональная матричная функция $F_N^m(t)$ может быть записана в виде обычной матрицы $F(t)$ размера $l \times m$.

При этом, матрица параметров вырождается в вектор β длины $L = 1$, т.е. $\beta = B = \mathbf{B} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l]^T$ и формула (6.5) принимает вид:

$$\eta(t, \mathbf{B}) = F^T(t)B = \mathbf{F}B^T. \quad (6.17)$$

Матрица измерений F_N также может быть записана в более простом виде:

$$F_N = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ l \end{matrix} \left\| \begin{array}{cccc} 1 \dots n_1 & n_1+1 \dots n_1+n_2 & \dots & N-n_m+1 \dots N \\ F^1 & F^2 & \dots & F^m \end{array} \right\|. \quad (6.18)$$

При этом блочная матрица M_N будет содержать единственный блок размерностью $l \times l$, определяемый формулой

$$M_N = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F^i C^{ij} (F^j)^T = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M^{ij}. \quad (6.19)$$

Составной вектор \mathbf{Z}_N^* будет иметь одну компоненту длины l , определяемую формулой

$$\mathbf{Z}_N^* = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m F^i C^{ij} Z^j = \sum_{i=1}^m F^i Z^{i*}. \quad (6.20)$$

2. Если компоненты векторного случайного процесса являются некоррелированными между собой, то матрица K_N принимает блочно-диагональный вид. При этом матрица K_N^{-1} также будет блочно-диагональной ($C^{ij} = 0$ при $i \neq j$; $i, j = \overline{1, m}$), причем

$$C^{ii} = [K^{ii}]^{-1}, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.21)$$

где $[K^{ii}]^{-1}$ – матрица, обратная ковариационной матрице измерений i -й компоненты $\mathbf{Z}(t)$. Из (6.15) и (6.16) следует, что тогда

$$M_N = \left\| \begin{array}{cccc} M^{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M^{mm} \end{array} \right\|; \quad D_N = \left\| \begin{array}{cccc} D^{11} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D^{22} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D^{mm} \end{array} \right\|; \quad (6.22)$$

$$Z^* = FC^i Z, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (6.23)$$

где $M^{ii} = FC^i(F)^T$; $D^{ii} = (M^{ii})^{-1}$.

Таким образом, при этом можно вычислять компоненты \mathbf{B}_i ($i = \overline{1, m}$) составного вектора оценок параметров $\hat{\boldsymbol{\beta}}_N$ (см. (6.6)) для каждой компоненты $\mathbf{Z}(t)$ независимо:

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{D}^{ii} \mathbf{Z}^*, \quad (i = \overline{1, m}). \quad (6.24)$$

3. В случае общих параметров и некоррелированных компонент процесса $\mathbf{Z}(t)$, выражения (6.19) и (6.20) примут вид:

$$\mathbf{M}_N = \sum_{i=1}^m F^i C^{ii} (F^i)^T = \sum_{i=1}^m M^{ii}; \quad (6.25)$$

$$\mathbf{z}_N^* = \sum_{i=1}^m F^i C^{ii} \mathbf{Z}^i = \sum_{i=1}^m F^i \mathbf{Z}^{i*}. \quad (6.26)$$

Таким образом, оценки параметров будут определяться формулой

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_N = \mathbf{B}_N = \left(\sum_{i=1}^m F^i C^{ii} (F^i)^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^m F^i C^{ii} \mathbf{Z}^i = \mathbf{M}_N^{-1} \mathbf{z}_N^*. \quad (6.27)$$

4. Если модели математических ожиданий всех компонент процесса описываются одной и той же моделью, то матрица $F_N(t)$ состоит из m одинаковых вектор-столбцов $\mathbf{f}(t)$ длиной l . В остальном схема вычислений остается аналогичной п. 1, т.е. справедливы формулы (6.17)–(6.20).

Таким образом, если модели математических ожиданий компонент процесса не имеют общих параметров, то при обработке должна использоваться блочно-диагональная матрица F_N вида (6.12), если все параметры общие, то используется матрица измерений вида (6.18).

Здесь не рассмотрен наиболее общий случай задания моделей компонент математического ожидания $\mathbf{Z}(t)$, когда часть моделей имеет общие параметры, а параметры остальных моделей уникальны. В этом случае матрица F_N будет иметь вид матрицы (6.12), в котором некоторые внедиагональные элементы (подматрицы) будут ненулевыми.

Перейдем теперь к более общей задаче линейной фильтрации процесса $\mathbf{Y}(t)$ по наблюдениям $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{Y}(t) + \mathbf{V}(t)$ с одновременной параметрической идентификацией математического ожидания процесса $\mathbf{Y}(t)$. Как и для скалярного случая, будем предполагать, что $\mathbf{V}(t)$ – случайный процесс с $E\{\mathbf{V}(t)\} = 0$ и математическое ожидание $\mathbf{Y}(t)$ задано в виде линейно-параметризованной модели, т.е. $E\{\mathbf{Y}(t)\} = \mathbf{h}(t) = [F_L^m(t)]^T \boldsymbol{\beta}$ с известной матрицей $F_L^m(t)$ (см. (6.6) и (6.7)). Кроме того, будем предполагать,

что нам известны матричная ковариационная функция наблюдаемого процесса $\mathbf{Z}(t)$:

$$K(s, t) = E\left\{\mathbf{Z}^0(s)(\mathbf{Z}^0(t))^T\right\} = E\left\{(\boldsymbol{\Xi}(s) + \mathbf{V}(s))(\boldsymbol{\Xi}(t) + \mathbf{V}(t))^T\right\}, \quad (6.28)$$

где $\mathbf{Z}^0(t) = \mathbf{Z}(t) - E\mathbf{Z}(t) = \boldsymbol{\Xi}(t) - \mathbf{V}(t)$; $\boldsymbol{\Xi}(t) = \mathbf{Y}(t) - E\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}(t) - \boldsymbol{\eta}(t)$ и матричная взаимная ковариационная функция процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ равна

$$K_{zy}(s, t) = E\left\{\mathbf{Z}^0(s)(\mathbf{Y}^0(t))^T\right\} = E\left\{(\boldsymbol{\Xi}(s) + \mathbf{V}(s))\boldsymbol{\Xi}^T(t)\right\}. \quad (6.29)$$

Нам далее потребуется следующее представление матрицы $K_{zy}(s, t)$:

$$K_{zy}(s, t) = \left[\mathbf{k}_{zy}^1(s, t), \mathbf{k}_{zy}^2(s, t), \dots, \mathbf{k}_{zy}^m(s, t) \right], \quad (6.30)$$

где $\mathbf{k}_{zy}^i(s, t) = \left[k_{zy}^{i1}, k_{zy}^{i2}, \dots, k_{zy}^{im} \right]^T$ – m -мерный вектор, представляющий собой i -й столбец матрицы $K_{zy}(s, t)$.

Введем $m \times N$ матрицу $K_{zy}^m(\boldsymbol{\varepsilon}_N, t)$ в виде

$$K_{zy}^m(\boldsymbol{\varepsilon}_N, t) = \begin{bmatrix} 1 \dots n_1 & (n_1 + 1) \dots (n_1 + n_2) & \dots & (N - n_m + 1) \dots (N) \\ K_{zy}(\boldsymbol{\varepsilon}_1, t) & K_{zy}(\boldsymbol{\varepsilon}_2, t) & \dots & K_{zy}(\boldsymbol{\varepsilon}_m, t) \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

где $K_{zy}(\boldsymbol{\varepsilon}_i, t) = \left[\mathbf{k}_{zy}^i(t_1, t), \mathbf{k}_{zy}^i(t_2, t), \dots, \mathbf{k}_{zy}^i(t_{n_i}, t) \right]$ – подматрица размером $m \times n_i$ значений вектора $\mathbf{k}_{zy}^i(s, t)$ в точках $t_j \in \boldsymbol{\varepsilon}_i$ ($j = \overline{1, n_i}$) и t .

Тогда оптимальная ОМНК-оценка процесса $\mathcal{Y}(\cdot)$ в точке $t \in T$ по наблюдениям $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана $\boldsymbol{\varepsilon}_N$ будет иметь вид:

$$\hat{\mathbf{Y}}_N(t) = \hat{\boldsymbol{\Xi}}_N(t) + \hat{\boldsymbol{\eta}}_N(t, \hat{\boldsymbol{\beta}}_N), \quad (6.32)$$

где
$$\hat{\boldsymbol{\Xi}}_N(t) = K_{zy}^m(\boldsymbol{\varepsilon}_N, t) K_N^{-1} \left(\mathbf{Z}_N - F_N^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_N \right) \quad (6.33)$$

– оптимальная ОМНК-оценка центрированного процесса $\boldsymbol{\Xi}(t)$;

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_N(t, \hat{\boldsymbol{\beta}}_N) = F^T(t) \hat{\boldsymbol{\beta}}_N \quad (6.34)$$

– оптимальная ОМНК-оценка детерминированной составляющей $\hat{\boldsymbol{\eta}}_N(t) = \hat{\boldsymbol{\eta}}_N(t, \hat{\boldsymbol{\beta}}_N)$. Оптимальная ОМНК-оценка вектора параметров $\boldsymbol{\beta}$ определяется формулой (6.13).

6.2. Оптимальные оценки в задачах фильтрации векторных марковских процессов (схема обработки 2)

Рассмотрим теперь более частный случай, когда измерения всех компонент $\mathbf{z}(t)$ проводятся в точках одного и того же плана ε_n , т.е.

$$\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_{n_2} = \dots = \varepsilon_{n_m} = \varepsilon_n = (t_1, t_2, \dots, t_n \mid t_i \in T, i = \overline{1, n}).$$

При этом в каждой точке плана ε_n одновременно измеряются значения всех компонент $\mathbf{Z}(t)$ и общее число измерений $N = nm$. Тогда план ε_N , соответствующий (6.9) будет выглядеть следующим образом:

$$\varepsilon_N = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & m \\ \varepsilon_n & \varepsilon_n & \dots & \varepsilon_n \end{array} \right\|. \quad (6.35)$$

Формулы (6.13), (6.32)–(6.34) остаются при этом неизменными, но все подматрицы K^y матрицы K_N (соответственно и подматрицы C^y матрицы K_N^{-1}) будут квадратными порядка n , подматрицы F^l матрицы F_N будут иметь одинаковое число столбцов, равное n , а блоки Z^l вектора Z_N будут одинаковой длины n . Используя этот факт, можно несколько упростить алгоритмы вычисления ОМНК-оценок (6.13), (6.32)–(6.34).

Самое интересное здесь заключается в том, что в данном случае можно построить другую, более удобную для нашей задачи, схему вычисления ОМНК-оценок $\hat{\mathbf{Y}}_N(t)$, $\hat{\mathbf{\Xi}}_N(t)$, $\hat{\mathbf{h}}_N(t)$ и $\hat{\mathbf{\beta}}_N$ (или матрицы \hat{B}_N). Пусть план формируется из точек ε_n следующим образом:

$$\varepsilon_N = \left(\overbrace{t_1, \dots, t_1}^m, \overbrace{t_2, \dots, t_2}^m, \dots, \overbrace{t_n, \dots, t_n}^m \right) = \left(\overbrace{t_1 \times m}^1, \overbrace{t_2 \times m}^2, \dots, \overbrace{t_n \times m}^m \right). \quad (6.36)$$

Тогда матрица F_N значений $F_N(t)$ в точках ε_N будет иметь следующий вид:

$$F_N = \left\| \begin{array}{cccc} 1 \dots m & m+1 \dots 2m & \dots & N-m+1 \dots N \\ \vdots & & & \\ L & F_1 & F_2 & \dots & F_n \end{array} \right\|, \quad (6.37)$$

где $F_i = F(t_i) - (L \times m)$ подматрица значений блочно-диагональной матричной функции $F^{diag}(t)$ в точке $t_i (i = \overline{1, n})$.

Ковариационная матрица измерений $\mathbf{Z}(t)$ в точках ε_N , обозначим ее \mathbf{K}_N , формируется также поточечно, т.е.

$$\mathbf{K}_N = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & \dots & n \\ & 1 \dots m & m+1 \dots 2m & \dots & m(n-1)+1 \dots N=mn \\ \hline 1 & \vdots & & & \\ \vdots & K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \hline m & & & & \\ \vdots & & & & \\ m+1 & K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2m} \\ \vdots & & & & \\ 2m & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline & & & & \\ m(n-1)+1 & & & & \\ \vdots & K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \\ \hline & & & & \\ N=mn & & & & \end{array}, \quad (6.38)$$

где $K_{ij} = K(t_i, t_j)$ – подматрица размером $(m \times m)$, элементы которой представляют значения матричной ковариационной функции $K(s, t)$ в точках $t_i, t_j \in \varepsilon_n$, т.е.

$$K_{ij} = K(t_i, t_j) = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 2 & \dots & m \\ \hline & k_{11}(t_i, t_j) & k_{12}(t_i, t_j) & \dots & k_{1m}(t_i, t_j) \\ \hline & k_{21}(t_i, t_j) & k_{22}(t_i, t_j) & \dots & k_{2m}(t_i, t_j) \\ \hline & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline & k_{m1}(t_i, t_j) & k_{m2}(t_i, t_j) & \dots & k_{mm}(t_i, t_j) \\ \hline & & & & \end{array}, \quad (6.39)$$

Определим вектор измерений процесса $\mathbf{Z}(t)$ в точках ε_N в виде следующего $(N \times 1)$ вектора:

$$\mathbf{Z}_N = \begin{array}{c|ccc|c} & 1 \dots m & m+1 \dots 2m & \dots & N-m+1 \dots N \\ \hline & \mathbf{Z}_1^T & \mathbf{Z}_2^T & \dots & \mathbf{Z}_n^T \\ \hline & & & & \end{array}, \quad (6.40)$$

где $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i}, \dots, Z_{mi})^T$ – измерение $\mathbf{Z}(t)$ в точке $t_i \in \varepsilon_n$ ($i = \overline{1, n}$).

И, наконец, определим матрицу $\mathbf{K}_{zy}(\varepsilon_N, t)$ ковариаций вектора измерений \mathbf{Z}_N с измерением $\mathbf{Y}(t)$ в точке $t \in T$ следующим образом:

$$\mathbf{K}_{zy}(\varepsilon_N, t) = \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ m \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 1 \dots m & m+1 \dots 2m & \dots & N-m+1 \dots N \\ K_{zy}(t_1, t) & K_{zy}(t_2, t) & \dots & K_{zy}(t_n, t) \end{matrix} \right\|, \quad (6.41)$$

1 2 ... n

где $(m \times m)$ подматрица $K_{zy}(t_i, t)$ представляет собой значение матричной ковариационной функции $K_{zy}(s, t)$ в точках $t_i \in \varepsilon_n$ ($i = \overline{1, n}$) и $t \in T$.

Тогда оптимальные ОМНК-оценки вектора параметров β и векторных процессов $\mathbf{Y}(t)$, $\Xi(t)$, $\eta(t)$ в точке $t \in T$ по наблюдениям процесса $\mathbf{Z}(t)$ в точках ε_N можно записать аналогично формулам (6.32)–(6.34) и (6.13):

$$\hat{\mathbf{Y}}_N(t) = \hat{\Xi}_N(t) + \hat{\eta}_N(t, \hat{\beta}_N) \quad (6.42)$$

– оптимальная ОМНК-оценка полезного процесса $\mathbf{Y}(t)$;

$$\hat{\Xi}_N(t) = \mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_N, t) \mathbf{K}_N^{-1} (\mathbf{Z}_N - \mathbf{F}_N^T \hat{\beta}_N) \quad (6.43)$$

– оптимальная ОМНК-оценка центрированного процесса $\Xi(t)$;

$$\hat{\eta}_N(t, \hat{\beta}_N) = F^T(t_i) \hat{\beta}_N \quad (6.44)$$

– оптимальная ОМНК-оценка детерминированной функции $\mathbf{h}(t)$;

$$\hat{\beta}_N = [\mathbf{F}_N \mathbf{K}_N^{-1} \mathbf{F}_N^T]^{-1} \mathbf{F}_N \mathbf{K}_N^{-1} \mathbf{Z}_N \quad (6.45)$$

– оптимальная ОМНК-оценка вектора параметров β .

Обозначим матрицы M_N , D_N и вектор \mathbf{Z}_N^* (см. формулу (6.13) и пояснения к ней) для схемы обработки 2 через \mathbf{D}_{N^*} , \mathbf{M}_N и \mathbf{Z}_N^* , соответственно. Из (6.45) следуют формулы вычисления \mathbf{D}_{N^*} , \mathbf{M}_N и \mathbf{Z}_N^* :

$$\mathbf{M}_N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i C_{ij} F_j; \quad \mathbf{D}_N = \mathbf{M}_N^{-1}; \quad \mathbf{Z}_N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i C_{ij} Z_j, \quad (6.46)$$

где C_{ij} – $(m \times m)$ подматрица (блок) матрицы \mathbf{K}_N^{-1} разбитой на n^2 блоков.

К сожалению, в отличие от M_N , D_N и \mathbf{Z}_N^* , матрицы \mathbf{D}_{N^*} , \mathbf{M}_N и вектор \mathbf{Z}_N уже нельзя естественным образом разбить на блоки D^{θ} , M^{θ} и Z^j , соответствующие отдельным компонентам $\mathbf{Z}(t)$ (см. формулы (6.15) и (6.16) и пояснения к ним).

Так же как и для схемы обработки 1, здесь можно получить различные более простые частные случаи оценок (6.42)–(6.44). Здесь мы рассмотрим только частный случай 1 (см. раздел 1).

Если все компоненты детерминированной составляющей $\mathbf{Z}(t)$ имеют общие параметры, т.е. $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j = \mathbf{B}$; $l_i = l_j = l$ ($i, j = \overline{1, m}$), то матрица параметров \mathbf{B} и вектор β вырождаются в вектор \mathbf{B} длины l .

При этом матрицу \mathbf{F}_N можно записать в виде $(l \times N)$ матрицы

$$\mathbf{F}_N = [F_1 \ F_2 \ \dots \ F_N], \quad (6.47)$$

где $F_i = F(t_i) - (l \times m)$ подматрица значений матричной функции $F(t)$ в точке $t_i \in \varepsilon_n$ ($i = \overline{1, n}$).

Формулы (6.42)–(6.45) будут справедливы в данном случае при замене $\hat{\mathbf{B}}_N$ на $\hat{\mathbf{B}}_N$, $F^{diag}(t)$ на $F(t)$ и с учетом (6.47). При этом матрицы \mathbf{D}_N , \mathbf{M}_N будут иметь размеры $(l \times l)$, а вектор \mathbf{Z}_N длину l .

Данный частный случай имеет большое значение при исследовании скалярных немарковских процессов, допускающих аппроксимацию векторным марковским процессом, первая компонента которого совпадает с наблюдаемым процессом, а остальные представляют собой производные от первой компоненты (точнее, i -ая компонента является $(i - 1)$ -й производной от первой компоненты). Отметим, что необходимым условием возможности такой аппроксимации является наличие конечного числа производных у аппроксимируемого процесса, т.к. хотя бы одна компонента векторного марковского процесса (в данном случае – последняя) должна быть недифференцируемой. При этом, если скалярный процесс $\mathbf{Z}(t)$ имеет $(m - 1)$ производную, то он может быть аппроксимирован m -мерным марковским процессом.

Действительно, если модель математического ожидания аппроксимируемого процесса $\mathbf{Z}(t)$ выбрана линейной относительно неизвестных параметров, т.е. $\eta(t) = \eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t)$, т.е.

$$\eta(t, \mathbf{B}) = \left[\frac{d\eta^i(t)}{dt} \right] = \left[\mathbf{B}^T \frac{d^i \mathbf{f}(t)}{dt} \right], \quad (i = \overline{0, m-1}). \quad (6.48)$$

Из (6.48) следует, что функции $\mathbf{f}(t)$ должны быть по крайней мере $(m - 1)$ раз дифференцируемыми, где m – размерность аппроксимирующего векторного марковского процесса $\mathbf{Z}(t)$.

Элементы матричной ковариационной функции процесса $\mathbf{Z}(t)$ и взаимной ковариационной функции процессов $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ находятся, при

этом, путем вычисления частных производных по переменным s и t от функций $k(s, t)$ и $k_{zy}(s, t)$, т.е.

$$K(s, t) = \left[\frac{\partial k^{p+q}(s, t)}{\partial s^p \partial t^q} \right]; \quad K_{zy}(s, t) = \left[\frac{\partial k_{zy}^{p+q}(s, t)}{\partial s^p \partial t^q} \right], \quad (p, q = \overline{0, m-1}). \quad (6.49)$$

Вектор измерений \mathbf{Z}_N можно получить измеряя процесс $\mathbf{Z}(t)$ и одновременно его $(m - 1)$ производных в точках ε_j .

Другие частные случаи вычисления ОМНК-оценок, рассмотренные в разделе 6.1 в рамках схемы обработки 1, также можно, очевидным образом, распространить на схему обработки 2.

6.3. Ковариационная функция и ковариационная матрица измерений векторного КМ-процесса

В гл. 2 было показано, что матричная ковариационная функция $K(s, t)$ векторного КМ-процесса $\mathbf{Z}(t)$ удовлетворяет условию

$$K(s, t) = K(s, \tau)K^{-1}(\tau, \tau)K(\tau, t), \quad (6.50)$$

где $s < \tau < t$ или $s > \tau > t$. (Условие (6.50) является необходимым и достаточным для определения КМ-процесса.)

Что касается элементов $k_{ij}(s, t)$ ($i, j = \overline{1, m}$) матрицы $K(s, t)$, то в зависимости от свойств отдельных компонент $\mathbf{Z}(t)$ и связей между ними они могут удовлетворять условию (6.50), в котором вместо $K(\bullet, \bullet)$ подставлено $k_{ij}(\bullet, \bullet)$, или нет. В некоторых случаях взаимные ковариационные функции $k_{ij}(s, t)$ ($i \neq j$) могут удовлетворять (6.50) только при $s < \tau < t$ или, наоборот, только при $s > \tau > t$.

В гл. 2 были проанализированы свойства отдельных компонент векторного марковского процесса. На основе этого была сделана классификация векторных марковских процессов, опирающаяся на такие свойства компонент векторного марковского процесса как марковость и дифференцируемость, а также учитывающая характер связей между компонентами (марковская, полумарковская или немарковская связь). Посмотрим как влияют упомянутые выше свойства отдельных компонент и связей между ними на вид матричной ковариационной функции векторного КМ-процесса. Ниже ковариационно марковски связанные КМ-процессы называются для краткости просто марковски связанными КМ-процессами.

1. Если все компоненты векторного КМ-процесса представляют собой независимые друг от друга простые (одномерные) КМ-процессы, то матрица $K(s, t)$ будет диагональной, причем диагональные элементы

$k_{ij}(s, t)$ ($i = \overline{1, m}$) будут удовлетворять (6.50), в котором матричная функция $K(s, t)$ заменена на $k_{ij}(s, t)$.

2. Если все компоненты векторного КМ-процесса представляют собой одномерные КМ-процессы с марковскими связями между ними, то все элементы $k_{ij}(s, t)$ ($i, j = \overline{1, m}$) матрицы $K(s, t)$ будут удовлетворять (6.50) при $K(s, t) = k_{ij}(s, t)$.

3. Пусть часть компонент векторного КМ-процесса являются одномерными КМ-процессами, а часть немарковскими процессами. При этом связи между КМ-компонентами будут марковскими, связи между немарковскими компонентами – немарковскими, а связи между КМ- и немарковскими компонентами – полумарковскими. Тогда элементы ковариационной матрицы $K(s, t)$, соответствующие КМ-компонентам и связям между ними будут удовлетворять (6.50), элементы $K(s, t)$, соответствующие немарковским компонентам и связям между ними, соответственно, не будут удовлетворять (6.50), а элементы $K(s, t)$, соответствующие связям между КМ- и немарковскими компонентами будут удовлетворять (6.50) только при $s < \tau < t$ или только при $s > \tau > t$.

4. Если все компоненты векторного КМ-процесса являются немарковскими процессами с немарковскими связями между ними, то, очевидно, ни один элемент $K(s, t)$ не будет удовлетворять (6.50).

Справедливость приведенных утверждений можно проверить на примерах, которые приведены в разделе 6.6.

Важным частным случаем векторного КМ-процесса является m -мерный процесс, у которого все компоненты, за исключением последней, являются дифференцируемыми, а следовательно, немарковскими процессами. Последняя – (m -я)-компонента может быть как марковской, так и немарковской. Такие процессы имеют место при аппроксимации скалярного немарковского ($m - 1$)-раз дифференцируемого процесса m -мерным векторным КМ-процессом. При этом

i -я компонента векторного КМ-процесса является ($i - 1$)-производной от первой компоненты, совпадающей с аппроксимируемым скалярным процессом.

Распишем подробнее условие (6.50) для случая, когда $K(s, t)$ есть матричная ковариационная функция двумерного КМ-процесса:

$$K(s, t) = \begin{bmatrix} k_{11}(s, \tau) & k_{12}(s, \tau) \\ k_{21}(s, \tau) & k_{22}(s, \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(\tau, \tau) & k_{12}(\tau, \tau) \\ k_{21}(\tau, \tau) & k_{22}(\tau, \tau) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_{11}(\tau, t) & k_{12}(\tau, t) \\ k_{21}(\tau, t) & k_{22}(\tau, t) \end{bmatrix}.$$

Из последнего выражения получаем, что отдельные элементы $K(s, t)$ в случае двумерного марковского процесса должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} k_{11}(s, t) &= \left(k_{st}^{11} k_{\tau\tau}^{22} k_{\tau t}^{11} - k_{st}^{12} k_{\tau\tau}^{12} k_{\tau t}^{11} + k_{st}^{12} k_{\tau\tau}^{11} k_{\tau t}^{21} - k_{st}^{11} k_{\tau\tau}^{21} k_{\tau t}^{21} \right) \left| \det K(\tau, \tau) \right|; \\ k_{12}(s, t) &= \left(k_{st}^{11} k_{\tau\tau}^{22} k_{\tau t}^{12} - k_{st}^{12} k_{\tau\tau}^{12} k_{\tau t}^{12} + k_{st}^{12} k_{\tau\tau}^{11} k_{\tau t}^{22} - k_{st}^{11} k_{\tau\tau}^{21} k_{\tau t}^{22} \right) \left| \det K(\tau, \tau) \right|; \\ k_{21}(s, t) &= \left(k_{st}^{21} k_{\tau\tau}^{22} k_{\tau t}^{11} - k_{st}^{22} k_{\tau\tau}^{12} k_{\tau t}^{11} + k_{st}^{22} k_{\tau\tau}^{11} k_{\tau t}^{21} - k_{st}^{21} k_{\tau\tau}^{21} k_{\tau t}^{21} \right) \left| \det K(\tau, \tau) \right|; \\ k_{22}(s, t) &= \left(k_{st}^{21} k_{\tau\tau}^{22} k_{\tau t}^{12} - k_{st}^{22} k_{\tau\tau}^{12} k_{\tau t}^{12} + k_{st}^{22} k_{\tau\tau}^{11} k_{\tau t}^{22} - k_{st}^{21} k_{\tau\tau}^{21} k_{\tau t}^{22} \right) \left| \det K(\tau, \tau) \right|, \end{aligned}$$

где $\det K(\tau, \tau) = k_{\tau\tau}^{11} k_{\tau\tau}^{22} - k_{\tau\tau}^{12} k_{\tau\tau}^{21}$; $k_{qr}^{v\mu} = k_{v\mu}(q, r)$.

Более простые условия на элементы $K(s, t)$ получаются в случае, когда мы рассматриваем m -мерный стационарный КМ-процесс, i -я компонента которого есть $(i - 1)$ -я производная от первой компоненты. В этом случае, матрица $K(\tau, \tau)$ будет диагональной и условия марковости для отдельных элементов $K(s, t)$ примут вид:

$$k_{v\mu}(s, t) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{k_{st}^{vi} k_{\tau t}^{i\mu}}{k_{\tau\tau}^{ii}} \right] \quad (v, \mu = \overline{1, m}), \quad (6.51)$$

где, как и выше, $k_{qr}^{v\mu} = k_{v\mu}(q, r)$.

Попробуем теперь найти общий вид ковариационной матрицы измерений в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ векторного марковского процесса для различных схем обработки. Рассмотрим вначале схему обработки 2.

Пусть ковариационная матрица K_N измерений в точках $\varepsilon_n^>$ m -мерного векторного процесса имеет вид (6.38). Определим квадратные порядка m (под)матрицы Γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) и Φ_{ij} ($i, j = \overline{1, n-1}$) следующим образом:

$$\Gamma_i = K_{ii}^{-1} K_{i, i+1}, \quad (6.52)$$

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} \Gamma_i \Gamma_{i+1} \dots \Gamma_{j-1} \Gamma_j & \text{при } j \geq i \\ \Gamma_j^T \Gamma_{j+1}^T \dots \Gamma_{i-1}^T \Gamma_i^T & \text{при } i \leq j \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n-1}). \quad (6.53)$$

С учетом введенных обозначений можно сформулировать следующую теорему.

Таким образом, общий вид матрицы \mathbf{C}_N^m будет иметь вид:

$$\mathbf{C}_N^m = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_2^{-1}M_1A_1^{-1} & -\Gamma_1A_2^{-1} & & \\ \hline -A_2^{-1}\Gamma_1^T & A_3^{-1}M_2A_2^{-1} & -\Gamma_2A_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline & -A_3^{-1}\Gamma_2^T & A_4^{-1}M_3A_3^{-1} & \sim \ddots \\ \hline & & -A_4^{-1}\Gamma_3^T & \ddots \\ \hline & \mathbf{0} & & A_n^{-1}M_{n-1}A_{n-1}^{-1} & -\Gamma_{n-1}A_n^{-1} \\ \hline & & & -A_n^{-1}\Gamma_{n-1}^T & A_n^{-1} \\ \hline \end{array}$$

3. Определитель любой угловой подматрицы \mathbf{K}_i^{m+} ($i = \overline{1, n}$), включая и определитель полной матрицы \mathbf{K}_N^m можно вычислить с помощью выражения

$$\det \mathbf{K}_i^{m+} = \prod_{l=1}^i \det A_l. \tag{6.58}$$

Доказательство теоремы 6.1 приведено в приложении 3.

Попробуем теперь, основываясь на результатах теоремы 6.1, найти общий вид ковариационной матрицы K_N (построенной по схеме 1) для измерений в точках плана $\varepsilon_n^>$ m -мерного КМ-процесса.

Ковариационные матрицы K_N и \mathbf{K}_N легко преобразуются друг в друга с помощью матрицы перестановки P_N , изображенной на рис. 6.1.

Утверждение 6.1. Для преобразования ковариационной матрицы измерений вида \mathbf{K}_N в ковариационную матрицу вида K_N необходимо умножить \mathbf{K}_N слева на P_N^T и справа на P_N , т.е.

$$K_N = P_N \mathbf{K}_N P_N^T. \tag{6.59}$$

Утверждение 6.2. Для преобразования ковариационной матрицы измерений вида K_N в ковариационную матрицу вида \mathbf{K}_N необходимо умножить K_N слева на P_N^T и справа на P_N , т.е.

$$\mathbf{K}_N = P_N^T K_N P_N. \tag{6.60}$$

Доказать справедливость данных утверждений можно путем прямой проверки, записав матрицы \mathbf{K}_N и K_N в общем виде.

		1				2				...				N			
		1	2	...	m	1	2	...	m					1	2	...	m
$P_N =$	1	1		
	2			...		1		
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
	n				1		...	
	1		1	
	2			...			1	
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
	n					1	...	
	⋮			⋮				⋮				⋮				⋮	
	1			...	1			
	2			1			
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
n			1	

Рис. 6.1. Вид матрицы перестановки P_N для преобразования $K_N \Leftrightarrow K_N$

Замечание 6.1. При обычной индексации элементов матрицы K_N (без разбиения ее на $(n \times n)$ подматрицы) $K_N = [k_{\varphi\tau}]_{\varphi,\tau=1}^N$, индексы φ и τ будут связаны с надстрочными (ν, μ) и подстрочными (ij) индексами (см., например, (6.61)), соотношениями

$$\varphi = (\nu - 1)n + i; \quad \tau = (\mu - 1)n + j \quad (\nu, \mu = \overline{1, m}; i, j = \overline{1, n}).$$

Представим подматрицы K_{ij} , Γ_i и Φ_{ij} в виде совокупности векторов:

$$\Gamma_i = [\Gamma_i^1, \Gamma_i^2, \dots, \Gamma_i^m], \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (6.61a)$$

$$\Phi_{ij} = [\Phi_{ij}^1, \Phi_{ij}^2, \dots, \Phi_{ij}^m], \quad (i, j = \overline{1, n-1}); \quad (6.61б)$$

$$K_{ij} = [k_{ij}^1, k_{ij}^2, \dots, k_{ij}^m], \quad (i, j = \overline{1, n-1}); \quad (6.61в)$$

где $\Gamma_i^v = (\gamma_i^{1v}, \gamma_i^{2v}, \dots, \gamma_i^{mv})^T, \quad \Phi_{ij}^v = (\phi_{ij}^{1v}, \phi_{ij}^{2v}, \dots, \phi_{ij}^{mv})^T,$

$$k_{ij}^v = (k_{ij}^{1v}, k_{ij}^{2v}, \dots, k_{ij}^{mv})^T \quad (v = \overline{1, m}).$$

В (6.61) верхние индексы относятся к измеряемым компонентам процесса, а нижние индексы – к точкам измерений.

Теорема 6.2.

1. Подматрица $K^{v\mu}$ ($v, \mu = \overline{1, m}$) ковариационной матрицы K_N^n измерений в точках плана $\varepsilon_n^>$ m -мерного КМ-процесса имеет вид:

$$K^{v\mu} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11}^{v\mu} & (\mathbf{k}_{11}^v)^T \Phi_{11}^\mu & \dots & (\mathbf{k}_{11}^v)^T \Phi_{1,n-1}^\mu \\ (\Phi_{11}^v)^T \mathbf{k}_{11}^\mu & k_{22}^{v\mu} & \dots & (\mathbf{k}_{22}^v)^T \Phi_{2,n-1}^\mu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\Phi_{n-1,1}^v)^T \mathbf{k}_{11}^\mu & (\Phi_{n-1,2}^v)^T \mathbf{k}_{22}^\mu & \dots & (\mathbf{k}_{n-1,n-1}^v)^T \Phi_{n-1,n-1}^\mu \\ & & & k_{nn}^{v\mu} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.62)$$

2. Матрица $\varepsilon_N^n = K_N^{-1} = (K_N^n)^{-1} = K_N^{-n}$, разбитая на квадратные ($n \times n$) подматрицы $C^{v\mu}$ ($v, \mu = \overline{1, m}$), имеет блочно-трехдиагональную структуру:

$$K_N^{-m} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots & 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \\ m \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc} c_{11}^{11} & c_{12}^{11} & & \\ c_{21}^{11} & c_{22}^{11} & c_{23}^{11} & \mathbf{0} \\ & c_{32}^{11} & c_{33}^{11} & \cdot \\ & & \ddots & \cdot \\ & \mathbf{0} & & c_{n-1,n-1}^{11} & c_{n-1,n}^{11} \\ & & & c_{n,n-1}^{11} & c_{nn}^{11} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{cccc} c_{11}^{1m} & c_{12}^{1m} & & \\ c_{21}^{1m} & c_{22}^{1m} & c_{23}^{1m} & \mathbf{0} \\ & c_{32}^{1m} & c_{33}^{1m} & \cdot \\ & & \ddots & \cdot \\ & \mathbf{0} & & c_{n-1,n-1}^{1m} & c_{n-1,n}^{1m} \\ & & & c_{n,n-1}^{1m} & c_{nn}^{1m} \end{array} \right] \\ \vdots & & & & & & \vdots & & & & & \\ \left[\begin{array}{cccc} c_{11}^{m1} & c_{12}^{m1} & & \\ c_{21}^{m1} & c_{22}^{m1} & c_{23}^{m1} & \mathbf{0} \\ & c_{32}^{m1} & c_{33}^{m1} & \cdot \\ & & \ddots & \cdot \\ & \mathbf{0} & & c_{n-1,n-1}^{m1} & c_{n-1,n}^{m1} \\ & & & c_{n,n-1}^{m1} & c_{nn}^{m1} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{cccc} c_{11}^{mm} & c_{12}^{mm} & & \\ c_{21}^{mm} & c_{22}^{mm} & c_{23}^{mm} & \mathbf{0} \\ & c_{32}^{mm} & c_{33}^{mm} & \cdot \\ & & \ddots & \cdot \\ & \mathbf{0} & & c_{n-1,n-1}^{mm} & c_{n-1,n}^{mm} \\ & & & c_{n,n-1}^{mm} & c_{nn}^{mm} \end{array} \right] \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6.63)$$

подматрицы $C^{\nu\mu}$ которой являются трехдиагональными с ненулевыми скалярными элементами:

$$\left. \begin{aligned} c_{ii}^{\nu\mu} &= (\mathbf{q}_{i+1}^{\nu})^T M_i \mathbf{q}_i^{\mu}, & c_n^{\nu\mu} &= q_n^{\nu\mu}, \\ c_{i,i+1}^{\nu\mu} &= -(\Gamma_i^{\nu\phi})^T q_{i+1}^{\mu}, & c_{i+1,i}^{\nu\mu} &= -(\mathbf{q}_{i+1}^{\nu})^T \Gamma_i^{\mu}, \end{aligned} \right\} (i = \overline{1, n-1}) \quad (\nu, \mu = \overline{1, n}), \quad (6.64б)$$

где $\mathbf{q}_i^{\nu} = (q_i^{1\nu}, q_i^{2\nu}, \dots, q_i^{m\nu})^T$ ($i = \overline{1, n}; \nu = \overline{1, m}$), а $q_i^{\nu\mu}$ — элементы подматрицы A_i^{-1} .

Замечание. При записи матрицы (6.62) для краткости использованы обозначения $(\Phi_{i-1, j}^{\nu})^T \rightarrow \Phi_{i-1, j}^{\nu T}$ и $(\mathbf{k}_{ii}^{\nu})^T = \mathbf{k}_{ii}^{\nu T}$.

Доказательство теоремы 6.3. вынесено в приложение 3.

6.4. Ковариационная матрица измерений векторного КМ-процесса в точках плана общего вида. Эффективность использования оценок в задачах с КМ-процессами

В разделе 6.3. был получен вид ковариационной матрицы измерений векторного КМ-процесса, когда измерения выполняются в точках упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ (все формулы раздела 6.3, очевидно, верны также и для равномерного плана ε_n^p). Интересно, как будут выглядеть блочные матрицы \mathbf{K}_N и K_N , если измерения векторного марковского процесса выполняются в точках плана общего вида ε_n .

Рассмотрим вначале матрицы вида \mathbf{K}_N . Пусть $\tilde{\mathbf{K}}_N$ — блочная ковариационная матрица измерений в точках плана ε_n , в которой блоки (подматрицы) размером $(m \times m)$ представляют собой значения матричной ковариационной функции $K(s, t)$ в точках t_i и t_j ($t, t_j \in \varepsilon_n; i, j = \overline{1, n}$). Кроме того, условимся, последовательности из m строк или m столбцов матрицы \mathbf{K}_N , элементы которой входят в одну и ту же подматрицу K_{ij} (т.е. соответствуют одной и той же точке плана ε_n), называть просто строками или столбцами, соответственно. С учетом этих замечаний теорему 4.4 (см. гл. 4) можно переформулировать следующим образом.

Теорема 6.3.

1. Блочная ковариационная матрица $\tilde{\mathbf{K}}_N$ измерений векторного КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n совпадает с блочной матрицей \mathbf{K}_N для плана $\varepsilon_n^>$, в которой строки и столбцы переставлены в соответствии с порядком следования точек плана $\varepsilon_n^>$ в плане ε_n .

2. Матрица $\tilde{\mathbf{K}}_N^{-1}$, обратная к $\tilde{\mathbf{K}}_N$, имеет не более $3n - 2$ ненулевых $(m \times m)$ подматриц, расположение и элементы которых можно найти из (6.55)–(6.57), зная порядок следования точек плана $\varepsilon_n^>$ в плане ε_n .

Доказательство данной теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 4.4, если рассматривать элементы матриц $K_n(K_n^{-1})$, $\tilde{K}_n(\tilde{K}_n^{-1})$ в теореме 4.4 как блоки (подматрицы) размером $(m \times m)$. В матрице перестановки $P(1)$ единица заменяется при этом на подматрицу $(m \times m)$, заполненную единицами, т.е.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 1 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & \dots & m \\ \hline 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline m & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Замечание 6.2. Порядок следования точек плана ϵ_n в плане $\epsilon_n^>$ можно высчитать расположив точки ϵ_n в порядке возрастания их координат.

Очевидно, используя матрицу перестановки $P_N(m \Rightarrow n)$ можно сформулировать аналогичную теорему и для матрицы \tilde{K}_N . Самое главное, что в любом случае, обратные матрицы \tilde{K}_N^{-1} и \tilde{K}_N^{-1} будут содержать, как и для упорядоченных планов $\epsilon_n^>$ и ϵ_n^p , не более $(3n - 2)m^2$ ненулевых элементов, т.е. будут разреженными (для немарковского процесса матрицы \tilde{K}_N^{-1} и \tilde{K}_N^{-1} могут содержать до n^2m^2 ненулевых элементов). При этом, степень разреженности матрицы будет тем выше, чем больше отношение n/m .

Это позволяет, используя аппарат разреженных матриц, для любых процедур оценивания, содержащих матрицы K_N и K_N (или обратные к ним матрицы K_N^{-1} и K_N^{-1}), создавать экономичные с точки зрения вычислительных затрат и требуемой памяти компьютера вычислительные алгоритмы. Другими словами, полученные результаты позволяют упростить получение любых оценок (а не только НЛНО), в записи которых встречается ковариационная матрица измерений (или обратная ей матрица), включая и случай нелинейного оценивания. Конечно, в общем случае, выигрыш будет меньше, чем для рассматриваемых линейных задач оценивания по измерениям в точках упорядоченных планов $\epsilon_n^>$ и ϵ_n^p .

Рассмотрим вопросы эффективности ОМНК-оценок подробнее на примере задач оптимальной фильтрации и параметрической идентификации математического ожидания случайного процесса, сформулированных в разделе 6.1. Можно заметить, что все формулы оценивания,

независимо от схемы обработки, содержат матрицу \mathbf{K}_N^{-m} (или K_N^{-m}) порядка $(N \times N)$, число элементов которой равно квадрату суммарного числа измерений по всем компонентам векторного процесса (см. (6.13), (6.32)–(6.34), (6.42)–(6.45)). В случае многомерных процессов и большого числа измерений, вычисление матриц \mathbf{K}_N^{-m} (или K_N^{-m}) представляет основную трудность в нахождении НЛНО. Используя полученные результаты можно решить эту задачу достаточно просто. Проиллюстрируем это на примере матрицы \mathbf{K}_N^{-1} .

Во-первых, можно заметить, что в формировании подматриц матрицы \mathbf{K}_N^{-m} участвуют только $2n - 1$ подматриц матрицы \mathbf{K}_N (с учетом симметричности \mathbf{K}_N), входящие в ее главную диагональ и одну из соседних боковых диагоналей (наддиагональ или поддиагональ). Таким образом, в памяти ЭВМ достаточно хранить $(2n - 1)m^2$ величин, составляющих указанные подматрицы матрицы \mathbf{K}_N , что при больших N дает существенную экономию памяти ЭВМ. В случае ковариационной матрицы общего вида в памяти ЭВМ необходимо хранить $N(N + 1)/2$ величин.

Во-вторых, используя предложенные алгоритмы вычисления подматриц блочно-трехдиагональной матрицы \mathbf{K}_N^{-m} можно существенно сократить объем вычислений, необходимых для обращения \mathbf{K}_N^m , относительно стандартных процедур обращения матриц.

И, в-третьих, учитывая трехдиагональность \mathbf{K}_N^{-m} можно дополнительно упростить процесс оценивания, используя аппарат разреженных матриц [81] при выполнении операций умножения и других преобразований с матрицами, необходимых для нахождения требуемых оценок.

Приведем здесь расчет числа операций, необходимых для обращения матрицы \mathbf{K}_N^m с учетом ее марковской структуры.

Пусть ковариационная матрица измерений марковского процесса задана в виде (6.54), т.е. нам известны n подматриц K_{ii} и $(n - 1)$ подматриц Γ_i .

Для вычисления ненулевых подматриц C_{ii} ($i = \overline{1, n}$) и $C_{i,i+1}$ ($i = \overline{1, n-1}$) матрицы \mathbf{K}_N^{-m} , необходимо предварительно вычислить $(n - 1)$ подматриц A_i ($i = \overline{2, n}$) (подматрица $A_1 = K_{11}$) и $(n - 2)$ подматриц M_i ($i = \overline{2, n-1}$) (подматрица $M_1 = K_{22}$).

Расчеты показывают, что требуемое число операций типа умножения на вычисление подматриц равно:

- 1) $A_i \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow (n - 1)[m^3 + m^2(m + 1)/2];$
- 2) $M_i \quad (i = \overline{2, n-1}) \Rightarrow (n - 2)[m^3 + m^2(m + 1)/2];$
- 3) $C_{ii} \quad (i = \overline{1, n}) \Rightarrow (n - 1)[m^2(m + 1)];$
- 4) $C_{i,i+1} \quad (i = \overline{1, n-1}) \Rightarrow (n - 1)m^2.$

Таким образом, на вычисление матрицы \mathbf{K}_N^{-m} требуется всего $nm^2(4m + 3) - m^2(11m + 7)/2$ умножений плюс $\approx nm^2$ операций на обращение подматриц A_i ($i = \overline{1, n}$). Последнее выражение показывает, что число операций умножения пропорционально n и m^3 .

Подсчитав точно также число операций сложения и вычитания, необходимых для обращения \mathbf{K}_N^m , получим выражение

$$(5n - 6,5)m^3 - (2n - 2,5)m^2 + (n - 1)m,$$

которое также пропорционально n и m^3 .

Известно [81], что число арифметических операций, необходимых для обращения матрицы общего вида размером $(n \times m) \times (n \times m)$ пропорционально $(n \times m)^3$. Таким образом, при больших значениях отношения n/m (что, как правило, имеет место в рассматриваемой задаче), учет структуры ковариационной матрицы наблюдаемого КМ-процесса может дать возможность существенно упростить вычисление требуемых оценок.

Отношение числа ненулевых элементов матриц \mathbf{K}_N^{-1} и K_N^{-1} к числу элементов заполненной матрицы для различных значений n и m приведено в табл. 6.1 и 6.2. Из таблиц видно, что выигрыш в объеме требуемой памяти практически не зависит от m и пропорционален n .

Таблица 6.1

Возможное число ненулевых элементов матрицы \mathbf{K}_N^{-1} (или K_N^{-1}) (числитель) и симметричной заполненной матрицы размером $(N \times N)$ (знаменатель) с учетом их симметричности

$n \backslash m$	5	10	50	100	500	1000
1	$\frac{9}{15}$	$\frac{19}{55}$	$\frac{99}{1275}$	$\frac{199}{5050}$	$\frac{999}{125250}$	$\frac{1999}{500500}$
2	$\frac{36}{55}$	$\frac{76}{210}$	$\frac{396}{5050}$	$\frac{796}{20100}$	$\frac{3996}{500500}$	$\frac{7996}{2001000}$
3	$\frac{81}{120}$	$\frac{171}{465}$	$\frac{891}{11325}$	$\frac{1791}{45150}$	$\frac{8991}{1125750}$	$\frac{17991}{4501500}$
4	$\frac{144}{210}$	$\frac{304}{820}$	$\frac{1584}{20100}$	$\frac{3184}{80200}$	$\frac{15984}{2001000}$	$\frac{31984}{8002000}$
5	$\frac{225}{325}$	$\frac{475}{1275}$	$\frac{2475}{31375}$	$\frac{4975}{125250}$	$\frac{24975}{3126250}$	$\frac{49975}{12502500}$

На рис. 6.2 приведены графики экономии памяти и числа арифметических операций в зависимости от n и m при обращении матрицы K_n^m .

Таблица 6.2

Отношение числа элементов заполненной матрицы ($N \times N$) к числу ненулевых элементов матрицы \mathbf{K}_N^{-1} (или K_N^{-1}) с учетом их симметричности

$m \backslash n$	5	10	50	100	500	1000
1	1,67	2,89	12,88	25,38	125,38	250,38
2	1,53	2,76	12,75	25,25	125,25	250,25
3	1,48	2,72	12,71	25,21	125,21	250,21
4	1,46	2,70	12,69	25,19	125,19	250,19
5	1,44	2,68	12,68	25,18	125,18	250,18

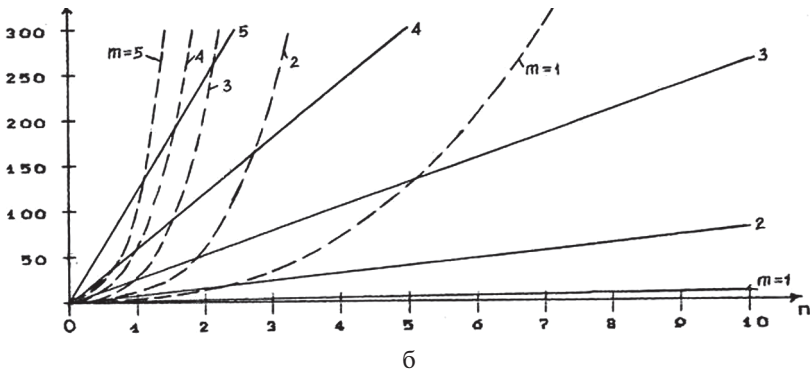
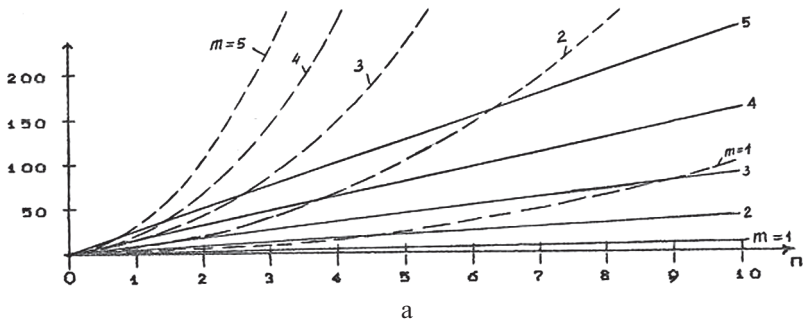


Рис. 6.2. Требуемый объем памяти и число арифметических операций, необходимых для обращения матрицы вида K_n^m (сплошные линии) и матрицы общего вида (штриховые линии):

а — требуемая память: $(nm)^2 \rightarrow nm^2$;

б — число арифметических операций $(nm)^3 \rightarrow nm^3$

6.5. Рекуррентные процедуры

Наиболее простые формулы оценивания здесь, как и в скалярном случае, получаются при переходе к рекуррентным процедурам ОМНК.

Используя результаты гл. 4, можно получить следующие выражения для рекуррентных оценок ОМНК в задачах оптимальной линейной фильтрации и параметрической идентификации векторных КМ-процессов.

Рассмотрим схему обработки 2. Пусть $\varepsilon_{i \times m} = \{t_{j \times m}\}_{j=1}^i$ есть фрагмент плана $\varepsilon_N = \varepsilon_{n \times m}$, представляющий собой его первые $(i \times m)$ точек ($i = \overline{1, n}$) (ниже множитель m в обозначении планов $\varepsilon_{i \times m}$ будет опускаться). Предположим, что нам известны оценки $\hat{\Xi}_i(t)$, $\hat{\eta}_i(t)$, $\hat{\beta}_i$, а также блочные матрицы \mathbf{K}_i^{-1} (блоки $m \times m$), \mathbf{F}_i (блоки $(L \times m)$), $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_i, t)$ (блоки $m \times m$) и вектор \mathbf{Z}_i (блоки длиной m) для плана ε_i .

Пусть в точке $t_{i+1} \in \varepsilon_{i+1} \subset \varepsilon_n$ выполнено новое измерение \mathbf{Z}_{i+1} процесса $\mathbf{Z}(t)$. При этом должны быть измерены одновременно все компоненты $\mathbf{Z}(t)$, т.е. $\mathbf{Z}_{i+1} = (Z_{1,i+1}, Z_{2,i+1}, \dots, Z_{m,i+1})^T$. Вычислим подматрицы (блоки) $K_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, $F_{i+1}^* = F(t_{i+1})$ и вектор-матрицу размера $m \times (i \times m)$ для новой точки t_{i+1} : $\mathbf{k}_{i+1} = [K_{1,i+1} \mid K_{2,i+2} \mid \dots \mid K_{i,i+1}]^T$ (здесь $K_{ij} = K(t_i, t_j)$).

Тогда, поступая точно также, как и в одномерном случае (см. раздел 4.4), можно получить следующие рекуррентные формулы вычисления оптимальных ОМНК-оценок $\hat{\mathbf{Y}}_{i+1}(t)$, $\hat{\Xi}_{i+1}(t)$, $\hat{\eta}_{i+1}(t)$, $\hat{\beta}_{i+1}$ для плана $\varepsilon_{i+1} = \{\varepsilon_i, t_{(i+1) \times m}\}$.

1) Найдем оптимальную ОМНК-оценку $\hat{\Xi}_{i+1}(t)$:

$$\hat{\Xi}_{i+1}(t) = \hat{\Xi}_i(t) = K_{zy}^*(t_{i+1}, t) \left[\mathbf{Z}_{i+1}^* - (F_{i+1}^*)^T \hat{\beta}_{i+1} \right] + Q_i^T(t) [\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{i+1}], \quad (6.65)$$

где
$$K_{zy}^*(t_{i+1}, t) = [K_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{K}_{zy}(\varepsilon_i, t) \mathbf{U}_{i+1}] / \sqrt{A_{i+1}};$$

$$\mathbf{Z}_{i+1}^* = [\mathbf{Z}_{i+1} - \mathbf{U}_{i+1}^T \mathbf{Z}_i] / \sqrt{A_{i+1}}, \quad F_{i+1}^* = [F_{i+1} - \mathbf{F}_i \mathbf{U}_{i+1}] / \sqrt{A_{i+1}};$$

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1}; \quad A_{i+1} = K_{i+1,i+1} - \mathbf{k}_{i+1}^T \mathbf{U}_{i+1}; \quad Q_i(t) = \mathbf{F}_i \mathbf{K}_i^{-1} K_{zy}^T(\varepsilon_i, t).$$

Удобно матрицу $Q_i(t)$ также вычислять по рекуррентной формуле. Тогда для последующей итерации она корректируется следующим образом:

$$Q_{i+1}(t) = Q_i(t) + F_{i+1}^* K_{zy}^*(t_{i+1}, t). \quad (6.66)$$

2) Оптимальная ОМНК-оценка $\hat{\eta}_{i+1}(t)$ находится из выражения:

$$\hat{\eta}_{i+1}(t) = \hat{\eta}_i(t) - F^T(t) [\hat{\beta}_i - \hat{\beta}_{i+1}]. \quad (6.67)$$

3) С учетом (6.65)–(6.67) рекуррентную оценку $\hat{\mathbf{Y}}_{i+1}(t)$ можно найти по формуле:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i+1}(t) = \hat{\Xi}_{i+1}(t) + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{i+1}(t) = \hat{\mathbf{Y}}_i(t) + K_{zy}^*(t_{i+1}, t) \left[\mathbf{Z}_{i+1}^* - (F_{i+1}^*)^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i+1} \right] + \\ + [Q_i(t) - F(t)]^T [\hat{\boldsymbol{\beta}}_i - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{i+1}], \quad (6.68)$$

где
$$\hat{\mathbf{Y}}_{i+1}(t) = \hat{\Xi}_{i+1}(t) + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{i+1}(t).$$

4) Рекуррентная ОМНК-оценка вектора параметров $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i+1}$ находится по формуле:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_i + \mathbf{D}_{i+1} F_{i+1}^* \left[\mathbf{Z}_{i+1}^* - (F_{i+1}^*)^T \hat{\boldsymbol{\beta}}_i \right], \quad (6.69)$$

где матрица \mathbf{D}_{i+1} определена в (6.46).

5) Рекуррентная корректировка матрицы \mathbf{D}_i может быть выполнена с помощью формулы корректировки обратной матрицы при малоранговой модификации исходной матрицы \mathbf{M}_i [82]. Действительно, в данном случае, матрица M_i (см. (6.45)) после нового измерения корректируется следующим образом:

$$\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{M}_i + F_{i+1}^* (F_{i+1}^*)^T. \quad (6.70)$$

Тогда

$$\mathbf{D}_{i+1} = \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_i F_{i+1}^* \left[\mathbf{I}_m + (F_{i+1}^*)^T \mathbf{D}_i F_{i+1}^* \right]^{-1} (F_{i+1}^*)^T \mathbf{D}_i. \quad (6.71)$$

Замечание 6.4. Матрица A_{i+1} в рассматриваемой задаче имеет очевидную физическую интерпретацию, а именно, A_{i+1} есть ковариационная (дисперсионная) матрица среднеквадратической ошибки наилучшей линейной интерполяции (экстраполяции) централизованного процесса $\mathbf{Z}(t) - \mathbf{h}(t) = \Xi(t) + \mathbf{V}(t)$ в точку t_{i+1} по измерениям, полученным в точках t_1, t_2, \dots, t_i .

Как и в скалярном случае, рекуррентные формулы (6.65)–(6.71) не устраняют необходимости хранения в памяти ЭВМ матрицы \mathbf{K}_i^{-1} , число элементов которой растет с каждой итерацией пропорционально $(i \times m)^2$, а также матриц \mathbf{F}_i , $\mathbf{K}_{zy}(\varepsilon, t)$ и вектора \mathbf{Z}_i , число элементов которых пропорционально $(i \times m)$. Но если процесс $\mathbf{Z}(t)$ – ковариационно марковский и измерения выполняются в точках упорядоченных планов $\varepsilon_n^>$ или ε_n^p , то рекуррентные формулы оптимального ОМНК резко упрощаются.

Можно показать, что матрица \mathbf{U}_{i+1} в случае марковского процесса принимает вид:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 \dots m & 1 \dots m & \dots & 1 \dots m & 1 \dots m \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \Gamma_i^T \end{array} \right\|, \quad (6.72)$$

где $\Gamma_i = K_{ii}^{-1} K_{i,i+1}$.

С учетом выражения (6.72) выражения для вычисления A_{i+1} , $K_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, \mathbf{Z}_{i+1}^* и F_{i+1}^* принимают простой вид (сравни с (6.65)):

$$\left. \begin{aligned} A_{i+1} &= K_{i+1,i+1} - \Gamma_i^T K_{ii}^{-1} \Gamma_i = K_{i+1,i+1} - K_{i+1,i} K_{ii}^{-1} K_{i,i+1} \\ K_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= [K_{zy}(t_{i+1}, t) - K_{zy}(t_i, t) \Gamma_i] / \sqrt{A_{i+1}} \\ \mathbf{Z}_{i+1}^* &= [\mathbf{Z}_{i+1} - \Gamma_i^T \mathbf{Z}_i] / \sqrt{A_{i+1}}, \quad F_{i+1}^* = [F_{i+1} - F_i \Gamma_i] / \sqrt{A_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

Соответственно упрощается вычисление векторов и матриц $\mathbf{Q}_i(t)$, $\hat{\beta}_i$, \mathbf{D}_i . При этом исчезает также необходимость вычисления вектора \mathbf{k}_{i+1} . Нам нужен только его последний элемент $K_{i,i+1}$. Таким образом, использование рекуррентных формул (6.65)–(6.71) для обработки результатов измерений марковских процессов дает возможность избавиться от необходимости хранения в памяти ЭВМ матриц \mathbf{K}_i^{-1} , \mathbf{F}_i , $\mathbf{K}_{zy}(\epsilon_i, t)$ и вектора \mathbf{Z}_i в процессе вычислений. Исключение составляет матрица \mathbf{D}_i . Но матрица \mathbf{D}_i , во-первых, имеет небольшие размеры ($L \times L$) и, во-вторых, элементы этой матрицы представляют собой дисперсии и ковариации оценок $\hat{\beta}_N$, т.е. несут важную информацию о статистической точности получаемой модели.

Используя результаты, приведенные в приложении 7, можно получить также рекуррентные формулы ОМНК для обработки измерений двумерного КМ-процесса по схеме обработки 1, когда на каждом шаге процедуры измеряются не все компоненты процесса. Они получаются значительно сложнее и на них нельзя прямо распространить полученные здесь результаты. В зависимости от конкретной схемы измерений здесь могут быть получены различные формулы.

6.6. Примеры

В данном разделе приведены примеры получения общих выражений для подматриц K_{ii} ($i = \overline{1, n}$), $K_{i,i+1}$ и Γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) ковариационной матрицы \mathbf{K}_N^m измерений в точках плана \mathbf{K}_N^m для пяти характерных двумерных марковских и КМ-процессов. Также найдены общие выражения для подматриц A_i ($i = \overline{1, n}$) и M_i ($i = \overline{1, n-1}$), с помощью которых можно легко вычислить ненулевые подматрицы обратной матрицы \mathbf{K}_N^{-m} , а, следовательно, и ненулевые элементы матрицы K_N^{-m} , не прибегая к стандартным процедурам

обращения матриц. Для примеров 6.1 и 6.5 приведен также общий вид матрицы K_N^{-m} в случае измерений в точках равномерного плана ε_n^p .

Чтобы выявить влияние на вид указанных подматриц таких характеристик отдельных составляющих векторного процесса, как марковость и стационарность, рассмотрены двумерные марковские и ковариационно-марковские процессы, представляющие собой совокупность:

- 1) двух нестационарных марковских и марковски связанных процессов;
- 2) двух марковских и марковски связанных процессов, из которых один является нестационарным, а второй – стационарным;
- 3) двух стационарных немарковских и немарковски связанных процессов;
- 4) двух стационарных процессов, один из которых является немарковским, а второй – марковским с полумарковскими связями между ними;
- 5) двух нестационарных процессов, из которых первый является нестационарным процессом, а второй – марковским процессом с полумарковскими связями между ними.

Составляющие векторных процессов также отличаются дифференцируемостью в среднеквадратичном смысле (см. гл. 1), что отмечено при описании каждого отдельного примера.

Пример 6.1. Рассмотрим двумерный нестационарный КМ-процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))_t$, задаваемый матричной ковариационной функцией $K(s, t) = [k_{ij}(s, t)]$ ($i, j = \overline{1, 2}$) с элементами

$$k_{11}(s, t) = \sigma_1^2 \min(s, t); \quad k_{22}(s, t) = \frac{\sigma_2^2}{2\alpha} [\exp(-\alpha |s - t|) - \exp(-\alpha(s + t))]; \quad (6.74a)$$

$$k_{12}(s, t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha} \begin{cases} \exp(-\alpha(t - s)) - \exp(-\alpha t) & \text{при } s < t, \\ 1 - \exp(-\alpha t) & \text{при } s > t \end{cases};$$

$$k_{21}(s, t) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha} \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha s) & \text{при } s < t \\ \exp(-\alpha(s - t)) - \exp(-\alpha s) & \text{при } s > t \end{cases}.$$

Можно проверить, что матричная функция $K(s, t)$ удовлетворяет условию (6.50), а ее элементы удовлетворяют условию (2.12), как при $s < \tau < t$, так и при $s > \tau > t$. Таким образом, $\mathbf{Z}(t)$ и его компоненты являются ковариационно-марковскими и марковски связанными процессами.

При нормальном законе распределения, центрированная составляющая $\mathbf{Z}(t)$ совпадает с двумерным марковским процессом, представляющим собой решение при $t_0 = 0$ и $Z_1(0) = Z_2(0) = 0$ системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = \sigma_1 N(t); \quad \frac{dZ_2(t)}{dt} = -\alpha Z_1(t) + \sigma_2 N(t), \quad (6.74б)$$

возбуждаемых нормальным белым шумом $N(t)$ с единичной дисперсией.

Запишем выражения для подматриц K_{ii} и $K_{i,i+1}$ ($t_{i+1} > t_i$) ковариационной матрицы \mathbf{K}_N измерений $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$, влияющих на формирование ненулевых подматриц обратной матрицы \mathbf{K}_N^{-m} :

$$K_{ii} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sigma_1^2 t_i & \sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_i)) \\ \sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_i)) & \sigma_2^2 (1 - \exp(-2\alpha t_i))/2 \end{bmatrix}; \quad (i = \overline{1, n});$$

$$K_{i,i+1} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sigma_1^2 t_i & \sigma_1 \sigma_2 (\exp(-\alpha(t_{i+1} - t_i)) - \exp(-\alpha t_{i+1})) \\ \sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_i)) & \sigma_2^2 (\exp(-\alpha(t_{i+1} - t_i)) - \exp(-\alpha(t_i + t_{i+1}))) / 2 \end{bmatrix},$$

$$i = \overline{1, n-1}).$$

При этом подматрица K_{ii}^{-1} будет иметь вид:

$$K_{ii}^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \det K_{ii}} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 (1 - \exp(-2\alpha t_i)) / 2 & -\sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_i)) \\ -\sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_i)) & \alpha \sigma_1^2 t_i \end{bmatrix}; \quad (i = \overline{1, n});$$

где $\det K_{ii} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{t_i}{2} (1 - \exp(-2\alpha t_i)) - \frac{1}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t_i))^2 \right]$.

Чтобы представить матрицу \mathbf{K}_N в виде \mathbf{K}_N^m необходимо вычислить подматрицы Γ_i :

$$\Gamma_i = K_{ii}^{-1} K_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha(t_{i+1} - t_i)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{1i} & 0 \\ 0 & \gamma_{2i} \end{bmatrix}, \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

где $\gamma_{1i} = 1$, $\gamma_{2i} = \exp(-\alpha(t_{i+1} - t_i))$.

Замечание 6.5. Если подматрица $K_{ii} = 0$ или вырождена, то можно найти Γ_i с помощью любого неравного 0 и невырожденного K_{ij} , используя соотношение $\Gamma_i = K_{ij}^{-1} K_{i,j+1}$ ($j = \overline{1, n-1}$).

Замечание 6.6. Можно заметить, что полученные значения γ_{1i} и γ_{2i} для первой и второй компонент $\mathbf{Z}(t)$ равны γ_i , соответственно, в примерах 4.1 и 4.3, где рассматривались соответствующие одномерные КМ-процессы.

Для вычисления ненулевых подматриц матрицы \mathbf{K}_N^{-m} необходимо предварительно вычислить подматрицы A_i и A_i^{-1} ($i = \overline{1, n}$) и M_i ($i = \overline{1, n-1}$):

$$A_i = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sigma_1^2 (t_i - t_{i-1}) & \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) \\ \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) & \sigma_2^2 (1 - \gamma_{2,i-1}^2) / 2 \end{bmatrix}; \quad (i = \overline{2, n});$$

$$A_1 = K_{11} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \alpha \sigma_1^2 t_1 & \sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_1)) \\ \sigma_1 \sigma_2 (1 - \exp(-\alpha t_1)) & \sigma_2^2 (1 - \exp(-2\alpha t_1)) / 2 \end{bmatrix}; \quad (t_0 = 0).$$

Здесь $\alpha_{i\bar{i}} = \sigma_1^2(t_i - t_{i-1})$ с точностью до постоянного множителя совпадает с α_i в примере 4.1, а $\alpha_{2i} = \sigma_2^2(1 - \gamma_{2,i-1}^2)/(2\alpha)$ – с величиной α_i ($i = \overline{1, n}$) в примере 4.3.

Отсюда

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\alpha \det A_i} \begin{bmatrix} \sigma_2^2(1 - \gamma_{2,i-1}^2)/2 & -\sigma_1\sigma_2(1 - \gamma_{2,i-1}) \\ -\sigma_1\sigma_2(1 - \gamma_{2,i-1}) & \alpha\sigma_1^2(t_i - t_{i-1}) \end{bmatrix}; \quad (i = \overline{2, n}),$$

где $\det A_i = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{1}{2}(t_i - t_{i-1})(1 - \gamma_{2,i-1}^2) - \frac{1}{\alpha}(1 - \gamma_{2,i-1})^2 \right];$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \det A_1} \begin{bmatrix} \sigma_2^2(1 - \exp(-2\alpha t_1))/2 & -\sigma_1\sigma_2(1 - \exp(-\alpha t_1)) \\ -\sigma_1\sigma_2(1 - \exp(-\alpha t_1)) & \alpha\sigma_1^2 t_1 \end{bmatrix};$$

где $\det A_1 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{t_1}{2}(1 - \exp(-2\alpha t_1)) - \frac{1}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t_1))^2 \right].$

Найдем подматрицы M_i , которые вместе с подматрицами Γ_i и A_i^{-1} определяют все $3n - 2$ ненулевых подматриц C_{ii} ($i = \overline{1, n}$) и $C_{i,i+1} = C_{i+1,i}$ ($i = \overline{1, n-1}$) матрицы \mathbf{K}_N^{-m} :

$$M_i = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha\sigma_1^2(t_{i+1} - t_{i-1}) & \sigma_1\sigma_2(1 - \gamma_{2,i-1}\gamma_{2i}) \\ \hline \sigma_1\sigma_2(1 - \gamma_{2,i-1}\gamma_{2i}) & \sigma_2^2(1 - \gamma_{2,i-1}^2\gamma_{2i}^2)/2 \end{array} \right\| \quad (i = \overline{2, n});$$

$$M_1 = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha\sigma_1^2 t_2 & \sigma_1\sigma_2(1 - \exp(-\alpha t_2)) \\ \hline \sigma_1\sigma_2(1 - \exp(-\alpha t_2)) & \sigma_2^2(1 - \exp(-2\alpha t_2))/2 \end{array} \right\| \quad (t_0 = 0);$$

Более простые выражения получаются для равномерного плана ε_n^p . Пусть $t_0 = 0, t_1 = \tau, t_2 = 2\tau$ и т.д. Пусть $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Тогда $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots = \Gamma_{n-1} = \Gamma$; $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$; $M_1 = M_2 = \dots = M_{n-1} = M$ и

$$A = \frac{\sigma^2}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha\tau & (1 - \gamma) \\ \hline (1 - \gamma) & (1 - \gamma^2)/2 \end{array} \right\|; \quad A^{-1} = \frac{\sigma^2}{\alpha \cdot \det A} \left\| \begin{array}{c|c} (1 - \gamma^2)/2 & -(1 - \gamma) \\ \hline -(1 - \gamma) & \alpha\tau \end{array} \right\|;$$

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \gamma \end{array} \right\|; \quad M = \frac{\sigma^2}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} 2\alpha\tau & (1 - \gamma^2) \\ \hline (1 - \gamma^2) & (1 - \gamma^4)/2 \end{array} \right\|;$$

где $\gamma = \exp(-\alpha\tau)$: $\det A = (\sigma^4/\alpha^2)(1 - \gamma)[\alpha\tau(1 + \gamma)/2 - (1 - \gamma)]$.

При этом выражения для ненулевых подматриц $C_{ii}(i = \overline{1, n})$ и $C_{i,i+1} = C_{i+1,i}(i = \overline{1, n-1})$ матрицы \mathbf{K}_N^{-m} получаются довольно громоздкими даже для равномерного плана. Поэтому, чтобы посмотреть на структуру матрицы \mathbf{K}_N^{-1} в целом, запишем ее следующим образом.

Обозначим

$$Q_N = \begin{array}{|cccc|} \hline M & -A\Gamma & & \\ \hline -\Gamma^T A & M & -A\Gamma & \\ \hline & -\Gamma^T A & M & -A\Gamma \\ \hline & & -\Gamma^T A & \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & & -A\Gamma \\ \hline 0 & & & & -\Gamma^T A & M & -A\Gamma \\ \hline & & & & & -\Gamma^T A & A \\ \hline \end{array}.$$

Тогда \mathbf{K}_N^{-m} можно представить в виде:

$$\mathbf{K}_N^{-m} = A^{-1} \begin{array}{|cccc|} \hline M & -A\Gamma & & \\ \hline -\Gamma^T A & M & -A\Gamma & \\ \hline & -\Gamma^T A & M & -A\Gamma \\ \hline & & -\Gamma^T A & \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & & -A\Gamma \\ \hline 0 & & & & -\Gamma^T A & M & -A\Gamma \\ \hline & & & & & -\Gamma^T A & A \\ \hline \end{array} A^{-1} \quad (6.75)$$

или $\mathbf{K}_N^{-m} = A^{-1} Q_N A^{-1}$.

Найдем общий вид подматриц $A\Gamma$ и $\Gamma^T A$ для равномерного плана ε_n^p и подставим их, а также M , в (6.75). В результате этого получаем общий вид матрицы Q_N (см. рис. 6.3 ниже).

Чтобы перейти от матрицы \mathbf{K}_N^{-m} к матрице K_N^{-m} надо выполнить преобразование (6.59). Обозначим $W_N = [P_N A^{-1} P_N^T]$; $G_N = [P_N Q_N P^T]$.

Тогда с учетом структуры матрицы K_N^{-m} , получаем:

$$K_N^{-2} = W_N G_N W_N^T.$$

Общий вид матрицы G_N приведен на рис. 6.4.

$$Q_N = \frac{\sigma^2}{\alpha} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\alpha\tau & (1-\gamma^2) \\ (1-\gamma^2) & (1-\gamma^4)/2 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \alpha\tau & \gamma(1-\gamma) \\ (1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ - \begin{bmatrix} \alpha\tau & (1-\gamma) \\ \gamma(1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\alpha\tau & (1-\gamma^2) \\ (1-\gamma^2) & (1-\gamma^4)/2 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \alpha\tau & \gamma(1-\gamma) \\ (1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & - \begin{bmatrix} \alpha\tau & (1-\gamma) \\ \gamma(1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2\alpha\tau & (1-\gamma^2) \\ (1-\gamma^2) & (1-\gamma^4)/2 \end{bmatrix} & \dots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \dots & \begin{bmatrix} 2\alpha\tau & (1-\gamma^2) \\ (1-\gamma^2) & (1-\gamma^4)/2 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \alpha\tau & (1-\gamma) \\ \gamma(1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & - \begin{bmatrix} \alpha\tau & (1-\gamma) \\ \gamma(1-\gamma) & \gamma(1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha\tau & (1-\gamma) \\ (1-\gamma) & (1-\gamma^2)/2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Рис. 6.3. Общий вид матрицы Q_N

$$G_N = \frac{\sigma^2}{\alpha} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \begin{matrix} A_1 & A_2 & & & & & \Gamma_1 & \Gamma_2 & & & & \\ A_2 & A_1 & A_2 & & & \mathbf{0} & \Gamma_3 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & A_1 & \cdot & & & \Gamma_3 & \Gamma_1 & \cdot & & & \\ \vdots & & \cdot & \sim & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ n-1 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & A_1 & A_2 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ n & & & & A_2 & A_1/2 & & & & & \Gamma_3 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \begin{matrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 & & & & & \Gamma_4 & \Gamma_5 & & & & \mathbf{0} \\ \Gamma_2 & \Gamma_1 & \Gamma_3 & & & \mathbf{0} & \Gamma_5 & \Gamma_4 & \Gamma_5 & & & \mathbf{0} \\ & \Gamma_2 & \Gamma_1 & \cdot & & & \Gamma_5 & \Gamma_4 & \cdot & & & \\ \vdots & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ n-1 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \Gamma_1 & \Gamma_3 & \mathbf{0} & \cdot & \cdot & \cdot & \Gamma_4 & \Gamma_5 \\ n & & & & \Gamma_2 & 1 & & & & & \Gamma_5 & \Gamma_1/2 \end{matrix} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Рис. 6.4. Общий вид матрицы G_N :

$$A_1 = 2\alpha\tau; A_2 = -\alpha\tau; \Gamma_1 = 1 - \gamma^2; \Gamma_2 = -\gamma(1 - \gamma); \Gamma_3 = -(1 - \gamma); \Gamma_4 = (1 - \gamma^4)/2; \Gamma_5 = -\gamma/2$$

Можно видеть, что элементы левой верхней $(n \times n)$ подматрицы G_N с точностью до постоянного множителя τ^2 совпадают с элементами матрицы (4.33) для винеровского процесса, а элементы нижней правой $(n \times n)$

подматрицы с точностью до постоянного множителя $\sigma^4(1 - \gamma^2)^2/(2\alpha)$ совпадают с элементами матрицы (4.38), рассмотренной в примере 4.3.

Матрица W_N соответственно будет равна:

$$W_N = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{11} & & & 0 \\ & a_{11} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{11} \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{12} & & & 0 \\ & a_{12} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{12} \end{array} \right| \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{21} & & & 0 \\ & a_{21} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{21} \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots & n \\ a_{22} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{22} \end{array} \right| \end{array} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\alpha \cdot \det A} \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -\gamma(1-\gamma^2)/2 & & & 0 \\ & -\gamma(1^2-\gamma^2)/2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -\gamma(1-\gamma^2)/2 \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -(1-\gamma) & & & 0 \\ & -(1-\gamma) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -(1-\gamma) \end{array} \right| \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -(1-\gamma) & & & 0 \\ & -(1-\gamma) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -(1-\gamma) \end{array} \right| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{array} \left| \begin{array}{ccc} \alpha\tau & & & 0 \\ & \alpha\tau & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha\tau \end{array} \right| \end{array}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ — элементы подматрицы A^{-1} .

Пример 6.2. Отличается от примера 6.1 тем, что в качестве $Z_2(t)$ используется стационарное решение второго уравнения системы (6.746). При этом

$$K(s, t) = \left| \begin{array}{c|c} \sigma_1^2 \min(s, t) & \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha} \begin{cases} 1, & \tau \leq 0 \\ \exp(-\alpha\tau), & \tau > 0 \end{cases} \\ \hline \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\alpha} \begin{cases} 1, & \tau \geq 0 \\ \exp(\alpha\tau), & \tau < 0 \end{cases} & \frac{\sigma_2^2}{2\alpha} \cdot \exp(-\alpha|\tau|) \end{array} \right|,$$

где $\tau = s - t$.

Тогда при $\tau_i = t_{i+1} - t_i > 0$, получаем

$$K_{i,i+1} = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 t_i & \sigma_1 \sigma_2 \exp(-\alpha \tau_i) \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \exp(-\alpha \tau_i) / 2 \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{1, n-1});$$

$$K_{ii} = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 t_i & \sigma_1 \sigma_2 \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 / 2 \end{array} \right\|; \quad K_{ii}^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \det K_{ii}} \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_2^2 / 2 & -\sigma_1 \sigma_2 \\ \hline -\sigma_1 \sigma_2 & \alpha \sigma_1^2 t_i \end{array} \right\| \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $\det K_{ii} = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{t_i}{2} - \frac{1}{\alpha} \right]$.

Отсюда находим подматрицы Γ_i :

$$\Gamma_i = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \exp(-\alpha \tau_i) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \gamma_{1i} & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{2i} \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

которые совпадают с подматрицами Γ_i для примера 6.1. Находим

$$A_i = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 \tau_{i-1} & \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) & \sigma_2^2 (1 - \gamma_{2,i-1}^2) / 2 \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{2, n});$$

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \det A_i} \left\| \begin{array}{c|c} \sigma_2^2 (1 - \gamma_{2,i-1}^2) / 2 & -\sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) \\ \hline -\sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1}) & \alpha \tau_{i-1} \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{2, n});$$

где $\det A_i = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{\tau_{i-1}}{2} (1 - \gamma_{2,i-1}^2) - \frac{1}{\alpha} (1 - \gamma_{2,i-1})^2 \right]$;

$$M_i = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 (t_{i+1} - t_{i-1}) & \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1} \gamma_{2i}) \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 (1 - \gamma_{2,i-1} \gamma_{2i}) & \sigma_2^2 (1 - \gamma_{2,i-1}^2 \gamma_{2i}^2) / 2 \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{2, n});$$

$$A^1 = K_{11} = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 t_1 & \sigma_1 \sigma_2 \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 / 2 \end{array} \right\|; \quad M_1 = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha \sigma_1^2 t_2 & \sigma_1 \sigma_2 \\ \hline \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 / 2 \end{array} \right\|, \quad (t_0 = 0);$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\alpha \cdot \det A_1} \begin{vmatrix} \sigma_2^2/2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 t_1 \end{vmatrix};$$

где $\det A_1 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\alpha} \left[\frac{t_1}{2} - \frac{1}{\alpha} \right]$.

Таким образом, в данном случае вид подматриц $\Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$, $A_i (i = \overline{2, n})$ и $M_i (i = \overline{2, n-1})$ полностью совпадает с видом соответствующих подматриц для примера 6.1, отличаются только начальные подматрицы A_1 и M_1 . Это имело место и в случае одномерных КМ-процессов в примерах 4.2 и 4.3.

Пример 6.3. Рассмотрим стационарный двумерный КМ-процесс $Z(t)$ с матричной ковариационной функцией

$$K(s, t) = K(\tau) = \sigma^2 \begin{vmatrix} \exp(-\alpha |\tau|)(1 + \alpha |\tau|) & \alpha^2 \tau \cdot \exp(-\alpha |\tau|) \\ -\alpha^2 \tau \cdot \exp(-\alpha |\tau|) & \alpha^2 \exp(-\alpha |\tau|)(1 + \alpha |\tau|) \end{vmatrix}. \quad (6.77a)$$

Матричная функция $K(s, t)$ удовлетворяет марковскому условию (6.50), но ни один из ее элементов $k_{11}(\tau)$, $k_{12}(\tau)$, $k_{21}(\tau)$, $k_{22}(\tau)$ в отдельности этому условию не удовлетворяет. Таким образом, $Z(t)$ есть КМ-процесс с немарковскими и немарковски связанными компонентами.

При нормальном законе распределения, центрированная составляющая $Z(t)$ при $Z_1(0) = Z_2(0) = 0$ совпадает со стационарным решением системы СДУ

$$\frac{dZ_1(t)}{dt} = Z_2(t); \quad (6.77б)$$

$$\frac{dZ_2(t)}{dt} = -2\alpha Z_2(t) - \alpha^2 Z_1(t) + (2\sigma\alpha\sqrt{\alpha})N(t),$$

где $N(t)$ – нормальный белый шум с единичной дисперсией.

Компонента $Z_1(t)$ является квадратично дифференцируемой функцией, а компонента $Z_2(t)$ – недифференцируемая функция, представляющая собой производную от $Z_1(t)$.

Далее, без потери общности будем полагать $\sigma^2 = 1$. Тогда подматрицы ковариационной матрицы K_N измерений $Z(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$, влияющие на формирование ненулевых элементов матрицы K_N^{-1} , будут при $\tau_i = t_{i+1} - t_i > 0 (i = \overline{1, n-1})$ иметь вид (ниже $K = K_{ii} (i = \overline{1, n})$):

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{vmatrix}; \quad K^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-2} \end{vmatrix}; \quad K_{i,i+1} = \exp(-\alpha\tau_i) \begin{vmatrix} 1 + \alpha\tau_i & \alpha^2\tau_i \\ -\alpha^2\tau_i & \alpha^2(1 - \alpha\tau_i) \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$\Gamma_i = K^{-1}K_{i,i+1} = \exp(-\alpha\tau_i) \left\| \begin{array}{c|c} 1 + \alpha\tau_i & \alpha^2\tau_i \\ \hline -\tau_i & 1 - \alpha\tau_i \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Для вычисления элементов матрицы \mathbf{K}_N^{-1} необходимо предварительно вычислить подматрицы $A_i^{-1} (i = \overline{1, n})$ и $M_i (i = \overline{1, n-1})$:

$$A_i = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 \end{array} \right\| - \gamma_{i-1}^2 \left\| \begin{array}{c|c} 1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2 & 2\alpha^3\tau_{i-1}^2 \\ \hline 2\alpha^3\tau_{i-1}^2 & \alpha^2(1 - 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} 1 - \gamma_{i-1}^2(1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) & -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2 \\ \hline 2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2 & \alpha^2[1 - \gamma_{i-1}^2(1 - 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2)] \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{2, n}),$$

где $\gamma_i = \exp(-\alpha\tau_i)$. Отсюда, при $(i = \overline{2, n})$, получаем

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\det A_i} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha^2[1 - \gamma_{i-1}^2(1 - 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2)] & -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2 \\ \hline -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2 & 1 - \gamma_{i-1}^2(1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) \end{array} \right\|,$$

где $\det A_i = \alpha^2[1 - 2\gamma_{i-1}^2(1 + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) + \gamma_{i-1}^4] = \alpha^2[(1 - \gamma_{i-1}^2)^2 - 4\alpha^2\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2]$.

Можно получить также, что

$$\Gamma_{i-1}\Gamma_i = \exp(-\alpha\tau_i) \left\| \begin{array}{c|c} 1 + \alpha\tau_i & \alpha^2\tau_i \\ \hline -\tau_i & 1 - \alpha\tau_i \end{array} \right\|,$$

где $\tau_i = t_{i+1} - t_{i-1} = \tau_i + \tau_{i-1}$.

Отсюда, при $i = \overline{2, n}$, получаем

$$M_i = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 \end{array} \right\| - \gamma_i^2\gamma_{i-1}^2 \left\| \begin{array}{c|c} 1 + 2\alpha\tau_i + 2\alpha^2\tau_i^2 & 2\alpha^3\tau_i^2 \\ \hline 2\alpha^3\tau_i^2 & \alpha^2(1 - 2\alpha\tau_i + 2\alpha^2\tau_i^2) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} 1 - \gamma_{i-1}^2\gamma_i^2(1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) & -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2\gamma_i^2 \\ \hline -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2\gamma_i^2 & \alpha^2[1 - \gamma_{i-1}^2\gamma_i^2(1 - 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2)] \end{array} \right\|.$$

При $i = 1$:

$$A_1^{-1} = K_{11}^{-1} = K^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^{-2} \end{array} \right\|; \quad M_1 = K_{22} = K = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 \end{array} \right\|.$$

Зная подматрицы $A_i^{-1} (i = \overline{1, n})$, $\Gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ и $M_i (i = \overline{1, n-1})$ легко вычислить ненулевые подматрицы матрицы \mathbf{K}_N^{-1} с помощью формул (6.56) не прибегая к известным процедурам обращения матриц.

Интересно, что подматрицы A_i при $i = \overline{2, n}$ и M_i при $i = \overline{2, n-1}$ полностью совпадают с заменой τ_{i-1} в A_i на τ_i в M_i (здесь необходимо принять во внимание, что $\gamma_i^2 \gamma_{i-1}^2 = \exp(-\alpha\tau)$).

Более простые выражения, как и в предыдущих примерах, получаются для равномерного плана ε_n^p . В этом случае, $\tau_i + \tau = \text{const}$, $\gamma_i + \gamma = \text{const}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots \Gamma_{n-1} = \Gamma$; $A_2 = \dots = A_n = A$; $M_2 = \dots = M_{n-1} = M$; $A_1 = M_1 = K_1 = K$.

При этом:

$$\Gamma = \gamma \left\| \begin{array}{c|c} 1 + \alpha\tau & \alpha^2 \tau_i \\ \hline -\tau & 1 - \alpha\tau \end{array} \right\|; \quad A_1^{-1} = K^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^{-2} \end{array} \right\|;$$

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\det A_i} \left\| \begin{array}{c|c} \alpha^2 [1 - \gamma^2 (1 - 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2)] & -2\alpha^3 \tau^2 \gamma^2 \\ \hline -2\alpha^3 \tau^2 \gamma^2 & 1 - \gamma^2 (1 + 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2) \end{array} \right\|,$$

где $\det A_i = \alpha^2 [1 - 2\gamma_i^2 (1 + 2\alpha^2 \tau_i^2) + \gamma_i^4] = \alpha^2 [(1 - \gamma_i^2)^2 - 4\alpha^2 \tau_i^2 \gamma_i^2]$.

Отсюда, при $i = \overline{2, n}$, получаем

$$M = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 \end{array} \right\| - \gamma^4 \left\| \begin{array}{c|c} 1 + 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2 & 2\alpha^3 \tau^2 \\ \hline 2\alpha^3 \tau^2 & \alpha^2 (1 - 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} 1 - \gamma^4 (1 + 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2) & -2\alpha^3 \tau^2 \gamma^4 \\ \hline -2\alpha^3 \tau^2 \gamma^4 & \alpha^2 [1 - \gamma^4 (1 - 2\alpha\tau + 2\alpha^2 \tau^2)] \end{array} \right\|; \quad M_1 = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^2 \end{array} \right\|.$$

Так как процесс $\mathbf{Z}(t)$ стационарный, все найденные величины и подматрицы не зависят от t_0 .

Пример 6.4. Рассмотрим двумерный стационарный процесс $\mathbf{Z}(t)$, определяемый матричной ковариационной функцией

$$K(\tau) = \sigma^2 \left\| \begin{array}{c|c} \exp(-\alpha|\tau|)(1+\alpha|\tau|) & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \exp(-\alpha\tau), & \tau > 0 \\ (1-2\alpha\tau)\exp\alpha\tau, & \tau < 0 \end{cases} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \exp(\alpha\tau), & \tau < 0 \\ (1+2\alpha\tau)\exp(-\alpha\tau), & \tau > 0 \end{cases} & \exp(-\alpha|\tau|) \end{array} \right\|. \quad (6.78a)$$

Функция $K(\tau)$ удовлетворяет векторному условию (6.50), $k_{22}(\tau)$ – скалярному условию (2.12), а $k_{12}(\tau)$ удовлетворяет (2.12) только при $\tau > 0$, а $k_{21}(\tau)$, наоборот, только при $\tau < 0$. Таким образом, мы имеем дело с двумерным КМ-процессом, первая компонента которого является дифференцируемым немарковским процессом, а вторая компонента – одномерным КМ-процессом. При этом, связи между компонентами являются, соответственно, полумарковскими (сравни с примером 6.3).

В классе нормальных случайных процессов, $\mathbf{Z}(t)$ совпадает со случайным процессом, являющимся стационарным решением при $\mathbf{Z}(0) = 0$ СДУ

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1(t)}{dt} &= -\alpha Z_1(t) + \alpha\sqrt{2} \cdot Z_2(t) \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} &= -\alpha Z_2(t) + \sigma\sqrt{2\alpha} \cdot N(t) \end{aligned} \right\}, \quad (6.78б)$$

где $N(t)$ – белый шум с единичной эффективностью.

Процесс $Z_1(t)$ при одинаковых начальных условиях совпадает с процессом $Z_1(t)$ в примере 6.3 (это можно проверить, исключив из систем (6.77б) и (6.78б) переменную $Z_2(t)$, в обоих случаях мы получим одно и то же СДУ 2-го порядка относительно переменной $Z_1(t)$). Из системы (6.78б) также видно, что компонента $Z_2(t)$ является одномерным марковским процессом (см. примеры 3.4 и 3.5).

Далее без потери общности будем полагать $\sigma^2 = 1$. Тогда подматрицы ковариационной матрицы \mathbf{K}_N измерений $\mathbf{Z}(t)$ в точках плана $\varepsilon_n^>$, влияющие на формирование ненулевых элементов матрицы \mathbf{K}_N^{-1} , будут при $\tau_i = t_{i+1} - t_i > 0$ и $i = \overline{1, n-1}$ иметь вид (ниже $K_{ii} = K(i = \overline{1, n})$):

$$K = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{array} \right\|; \quad K^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 2 & -\sqrt{2} \\ \hline -\sqrt{2} & 2 \end{array} \right\|;$$

$$K_{i,i+1} = \exp(-\alpha\tau_i) \times \left\| \begin{array}{c|c} 1 + \alpha\tau_i & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha\tau_i) & 1 \end{array} \right\|.$$

Отсюда

$$\Gamma_i = K^{-1}K_{i,i+1} = \exp(-\alpha\tau_i) \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \alpha\tau_i\sqrt{2} & 1 \end{array} \right\|; \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Видно, что элемент $\gamma_{22,i} = \exp(-\alpha\tau_i)$ матрицы Γ_i равен величине в примере 6.1 и величине γ_i в примерах 4.2 и 4.3. Кроме того, из примеров 6.1–6.3 и данного примера можно сделать вывод, что если μ -я компонента векторного процесса есть КМ-процесс, то элемент $\gamma_{\mu\mu,i}$ подматрицы Γ_i , соответствующий этой компоненте, совпадает со значением γ_i , вычисленным для соответствующего одномерного КМ-процесса. Если связь между компонентами $Z_\nu(s)$ и $Z_\mu(t)$ марковская, как при $s < t$, так и при $s > t$, то $\gamma_{\nu\mu,i} = \gamma_{\mu\nu,i} = 0$. Если связь между компонентами $Z_\nu(s)$ и $Z_\mu(t)$ марковская только при $s < t$ (или наоборот), то нулю равняется только одна из величин $\gamma_{\nu\mu,i}$ или $\gamma_{\mu\nu,i}$.

Для вычисления элементов матрицы \mathbf{K}_N^{-1} необходимо предварительно вычислить подматрицы $A_i^{-1} (i = \overline{1, n})$ и $M_i (i = \overline{1, n})$:

$$A_i = \left\| \begin{array}{c|c} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{array} \right\| - \gamma_{i-1}^2 \left\| \begin{array}{c|c} 1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha\tau_{i-1}) \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha\tau_{i-1}) & 1 \end{array} \right\|,$$

где $\gamma_i = \exp(-\alpha\tau_i)$. Отсюда, при $(i = \overline{1, n})$, получаем

$$A_i^{-1} = \frac{1}{\det A_i} \left\| \begin{array}{c|c} 1 - \gamma_{i-1}^2 & -2\alpha^3\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2 \\ \hline -\frac{1}{\sqrt{2}}[1 - \gamma_{i-1}^2(1 + 2\alpha\tau_{i-1})] & 1 - \gamma_{i-1}^2(1 + 2\alpha\tau_{i-1} + 2\alpha^2\tau_{i-1}^2) \end{array} \right\|,$$

где $\det A_i = \frac{1}{2}[(1 - \gamma_{i-1}^2)^2 - 4\alpha^2\tau_{i-1}^2\gamma_{i-1}^2]$; $A_1^{-1} = K^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$.

Отметим, что определители подматриц A_i при $i = \overline{2, n}$ в данном примере и примере 6.3 отличаются только постоянным множителем $2\alpha^2$ (или $1/(2\alpha^2)$).

Можно получить, что

$$\Gamma_{i-1}\Gamma_i = \exp(-\alpha\Delta_i) \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \sqrt{2\alpha\Delta_i} & 1 \end{array} \right\|,$$

где $\Delta_i = t_{i+1} - t_{i-1} = \tau_i + \tau_{i-1}$.

Отсюда, при $i = \overline{2, n}$, получаем

$$M_i = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{array} \right\| - \gamma_i^2 \gamma_{i-1}^2 \left\| \begin{array}{c|c} 1 + 2\alpha\Delta_i + 2\alpha^2\Delta_i^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha_i\Delta) \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha_i\Delta) & 1 \end{array} \right\|. \quad M_1 = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \hline \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{array} \right\|.$$

Зная подматрицы A_i^{-1} ($i = \overline{1, n}$), Γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) и M_i ($i = \overline{1, n-1}$) легко вычислить ненулевые подматрицы матрицы \mathbf{K}_N^{-1} с помощью формул (6.56) не прибегая к операции обращения матриц.

Интересно, что как и в примере 6.3, подматрицы A_i при ($i = \overline{2, n}$) и M_i при ($i = \overline{2, n-1}$) полностью совпадают с заменой τ_{i-1} в A_i на $\Delta_i = \tau_i + \tau_{i-1}$ в M_i (здесь необходимо принять во внимание, что $\gamma_i^2 \gamma_{i-1}^2 = \exp(-\alpha\Delta_i)$).

В случае равномерного плана $\tau_i + \tau = \text{const}$, $\Delta_i + \Delta = \text{const}$, $\gamma_i + \gamma = \text{const}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots \Gamma_{n-1} = \Gamma$, $A_2 = \dots = A_n = A$, $M_2 = \dots = M_{n-1} = M$. При этом

$$\Gamma = \gamma \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \sqrt{2 \cdot \alpha\tau} & 1 \end{array} \right\|; \quad A_1^{-1} = K^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \alpha^{-2} \end{array} \right\|;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left\| \begin{array}{c|c} 1 - \gamma^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}[1 - \gamma^2(1 + 2\alpha\tau)] \\ \hline -\frac{1}{\sqrt{2}}[1 - \gamma^2(1 + 2\alpha\tau)] & 1 - \gamma^2(1 + 2\alpha\tau + 2\alpha^2\tau^2) \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{2, n})$$

где $\det A_i = \frac{1}{2}[(1 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2\tau^2\gamma^2]$; $A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$.

Отсюда, при $i = \overline{2, n}$, получаем

$$M = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix} - \gamma^4 \begin{vmatrix} 1 + 2\alpha\Delta + 2\alpha^2\Delta^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha\Delta) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\alpha\Delta) & 1 \end{vmatrix}; \quad M_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Так как процесс $\mathbf{Z}(t)$ стационарный, все найденные величины и подматрицы не зависят от t_0 .

Пример 6.5. Рассмотрим двумерный нестационарный процесс $\mathbf{Z}(t) = (Z_1(t), Z_2(t))^T$, для которого

$$K(s, t) = \frac{\sigma^2}{2} \begin{vmatrix} st \cdot \min(s, t) - \frac{1}{3} \min^3(s, t) & \begin{cases} s^2, & s \leq t \\ 2st - t^2, & s \geq t \end{cases} \\ \begin{cases} t^2, & s \geq t \\ 2st - s^2, & s \leq t \end{cases} & 2 \min(s, t) \end{vmatrix}. \quad (6.79a)$$

Из (6.79a) видно, что связь между процессами $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ ковариационно марковская при $s < t$ и немарковская при $s > t$. Обратная связь, наоборот, ковариационно марковская при $s > t$ и немарковская при $s < t$.

В классе нормальных процессов, центрированная составляющая $\mathbf{Z}(t)$ совпадает с двумерным марковским процессом, задаваемым СДУ при

$$\begin{cases} \frac{dZ_1(t)}{dt} = Z_2(t) \\ \frac{dZ_2(t)}{dt} = N(t) \end{cases}, \quad (6.79б)$$

где $N(t)$ – белый шум с эффективностью σ^2 , $Z(0) = 0$, $t_0 = 0$.

Первая компонента (6.79б) является дифференцируемым немарковским процессом (винеровским процессом второго порядка), а вторая компонента марковским процессом (винеровским процессом первого порядка (см. пример 3.1)). Компонента $Z_2(t)$ является производной от первой компоненты.

Далее примем $\sigma^2 = 2$. Тогда, как и в предыдущих примерах, получаем при $t_i < t_{i+1}$:

$$K_{ii} = \left\| \begin{array}{c|c} -\frac{2}{3}t_i^3 & t_i^2 \\ \hline t_i^2 & 2t_i \end{array} \right\|; \quad K_{ii}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 6t_i^{-3} & -3t_i^{-2} \\ \hline -3t_i^{-2} & 2t_i^{-1} \end{array} \right\|; \quad (i = \overline{1, n});$$

$$K_{i,i+1} = \left\| \begin{array}{c|c} t_i^2 t_{i+1} - \frac{1}{3}t_i^3 & t_i^2 \\ \hline 2t_i t_{i+1} - t_i^2 & 2t_i \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Отсюда

$$\Gamma_i = \left\| \begin{array}{c|c} 6t_i^{-3} & -3t_i^{-2} \\ \hline -3t_i^{-2} & 2t_i^{-1} \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c|c} t_i^2 t_{i+1} - \frac{1}{3}t_i^3 & t_i^2 \\ \hline 2t_i t_{i+1} - t_i^2 & 2t_i \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t_{i+1} - t_i & 1 \end{array} \right\| \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

Вычислим подматрицы A_i ($i = \overline{2, n}$) и M_i ($i = \overline{1, n-1}$):

$$A_i = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}(t_i - t_{i-1})^3 & (t_i - t_{i-1})^2 \\ \hline (t_i - t_{i-1})^2 & 2(t_i - t_{i-1}) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}\tau_{i-1}^3 & \tau_{i-1}^2 \\ \hline \tau_{i-1}^2 & 2\tau_{i-1} \end{array} \right\|,$$

где $\tau_{i-1} = t_{i+1} - t_i$, ($i = \overline{2, n}$)

Подматрица A_i при $i = \overline{2, n}$ совпадает с матрицей K_{ii} с заменой τ_{i-1} в A_i на t_i в K_{ii} .

$$A_i^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 6\tau_{i-1}^{-3} & -3\tau_{i-1}^{-2} \\ \hline -3\tau_{i-1}^{-2} & 2\tau_{i-1}^{-1} \end{array} \right\|; \quad A_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}t_1^3 & t_1^2 \\ \hline t_1^2 & 2t_1 \end{array} \right\|; \quad A_1^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 6t_1^{-3} & -3t_1^{-2} \\ \hline -3t_1^{-2} & 2t_1^{-1} \end{array} \right\|.$$

Вычислим

$$\Gamma_{i-1}\Gamma_i = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t_i - t_{i-1} & 1 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t_{i+1} - t_i & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t_{i+1} - t_{i-1} & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \Delta_i & 1 \end{array} \right\|,$$

где $\Delta_i = t_{i+1} - t_{i-1} = \tau_i + \tau_{i-1}$.

Отсюда

$$M_i = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}\Delta_{i-1}^3 & \Delta_{i-1}^2 \\ \hline \Delta_{i-1}^2 & 2\Delta_{i-1} \end{array} \right\|; \text{ при } (i = \overline{2, n}); \quad M_1 = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}t_1^3 & t_1^2 \\ \hline t_1^2 & 2t_1 \end{array} \right\|.$$

Подматрицы M_i совпадают с подматрицами A_i и K_{ii} с заменой t_i в K_{ii} или τ_{i-1} в A_i на Δ_i в M_i .

В случае равномерного плана ε_n^p при $t_0 = 0$ и $t_1 = \tau$, $t_1 = 2\tau$ и т.д. подматрицы $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots \Gamma_{n-1} = \Gamma$; $A_1 = A_2 = \dots A_n = A$, $M_1 = M_2 = \dots M_{n-1} = M$. При этом

$$\Gamma = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \Delta & 1 \end{array} \right\|; \quad A = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}\tau^3 & \tau^2 \\ \hline \tau^2 & 2\tau \end{array} \right\|; \quad A^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 6\tau^{-3} & -3\tau^{-2} \\ \hline -3\tau^{-2} & 2\tau^{-1} \end{array} \right\|;$$

$$M = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{2}{3}\Delta^3 & \Delta^2 \\ \hline \Delta^2 & 2\Delta \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \frac{16}{3}\tau^3 & 4\tau^2 \\ \hline 4\tau^2 & 4\tau \end{array} \right\|,$$

где $\tau = t_{i+1} - t_i = \text{const}$; $\Delta = t_{i+1} - t_{i-1} = 2\tau = \text{const}$.

При этом подматрицы Γ , A и M зависят от единственного параметра τ .

$$C_{ii} = A^{-1}MA^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} 84\tau^{-3} & -36\tau^{-2} \\ \hline -36\tau^{-2} & 16\tau^{-1} \end{array} \right\| = \frac{4}{\tau^3} \left\| \begin{array}{c|c} 84 & -36\tau \\ \hline -36\tau & 16\tau \end{array} \right\|;$$

$$C_{i,i+1} = -\Gamma A^{-1} = - \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline \tau & 1 \end{array} \right\| \times \left\| \begin{array}{c|c} 6\tau^{-3} & -3\tau^{-2} \\ \hline -3\tau^{-2} & 2\tau^{-1} \end{array} \right\| = -\frac{1}{\tau^3} \left\| \begin{array}{c|c} 6 & -3\tau \\ \hline -3\tau & -\tau^2 \end{array} \right\|,$$

$C_{i+1,i} = C_{i,i+1}$ ($i = \overline{1, n-1}$). Матрица \mathbf{K}_N^{-1} , преобразованная к виду K_N^{-1} имеет простой вид, представленный на рис. 6.5.

$$K_N^{-1} = \frac{1}{\tau^3} \begin{array}{c|cccc|cccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ \hline 1 & 84 & -6 & & & & & -36\tau & 3\tau & & & & \\ 2 & -6 & 84 & -6 & & & 0 & -3\tau & -36\tau & 3\tau & & & 0 \\ 3 & & -6 & 84 & & & & & -3\tau & -36\tau & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \ddots & & \\ n-1 & & & & & 84 & -6 & & & & & -36\tau & 3\tau \\ n & & & & & -6 & 6 & & & & & -3\tau & -3\tau \\ \hline 1 & 36 & -3\tau & & & & & 6\tau & \tau^2 & & & & \\ 2 & 3\tau & -36\tau & -3\tau & & & 0 & \tau^2 & 16\tau^2 & \tau^2 & & & 0 \\ 3 & & 3\tau & -36\tau & & & & & \tau^2 & 16\tau^2 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & & \ddots & & \\ n-1 & & & & & -36\tau & -3\tau & & & & & 16\tau^2 & \tau^2 \\ n & & & & & 3\tau & -3\tau & & & & & \tau^2 & 2\tau^2 \end{array}$$

Рис. 6.5. Общий вид матрицы K_N^{-1}

Анализ всех приведенных в данном разделе примеров позволяет сделать следующие выводы:

1. В случае нестационарных процессов выражения для подматриц K_{ii} , $A_i (i = \overline{1, n})$ и $M_i (i = \overline{1, n-1})$ получаются подобными с заменой переменной t_i в подматрице K_{ii} на $\tau_{i-1} = (t_i - t_{i-1})$ в A_i , или, с заменой t_i в K_{ii} на $\Delta_i = (t_{i+1} - t_{i-1})$ в M_i . Для начальных подматриц K_{11} , A_1 , M_1 , переменная t_1 в подматрице K_{ii} заменяется на $(t_1 - t_0)$ в A_1 , или, на $(t_2 - t_0)$ в подматрице M_1 .

2. В случае стационарных процессов вышесказанное имеет место только для подматриц $A_i (i = \overline{1, n})$ и $M_i (i = \overline{1, n-1})$. При этом, переменная τ_{i-1} в A_i соответствует переменной Δ_i в M_i . Подматрицы A_1 и M_1 в этом случае равняются K_{11} .

3. Если μ -я компонента векторного КМ-процесса – одномерный КМ-процесс, то диагональный элемент $\gamma_{\mu\mu,i}$ подматрицы Γ_i , соответствующий этой компоненте, совпадает со значением γ_i , вычисленным для соответствующей компоненты.

4. Если связь между компонентами $Z_\nu(s)$ и $Z_\mu(t) (s, t \in T)$ марковская как при $s < t$, так и при $s > t$, то $\gamma_{\nu\mu,i} = \gamma_{\mu\nu,i} = 0$. Если связь между компонентами $Z_\nu(s)$ и $Z_\mu(t)$ марковская только при $s < t$ (или наоборот, только при $s > t$), то нулю равняется только одна из величин $\gamma_{\nu\mu,i}$ или $\gamma_{\mu\nu,i}$.

5. Для ковариационной матрицы K_N измерений в точках равномерного плана ε_n^p , подматрицы $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \dots \Gamma_{n-1} = \Gamma$; $A_2 = A_3 = \dots A_n = A$; $M_2 = M_3 = \dots M_{n-1} = M$. В случае нестационарных процессов подматрицы A_1 и M_1 совпадают с подматрицами A и M , соответственно, если $t_0 = 0$

и $t_1 = \tau, t_2 = 2\tau, \dots, t_n = n\tau$. В случае стационарных процессов подматрицы A_1 и M_1 равняются $K_{ii} = K$.

6. В случае, когда векторный КМ-процесс представляет собой совокупность независимых или марковски связанных одномерных КМ-процессов, диагональные подматрицы матрицы G_N (см. пример 6.2) с точностью до постоянного множителя совпадают с обратными ковариационными матрицами измерений соответствующих одномерных КМ-процессов (здесь имеется в виду, что измерения векторного и соответствующих скалярных процессов проводятся в точках одного и того же плана ε_n^p).

7. Для равномерных планов подматрицы G_i, A_i и M_i , а следовательно и элементы обратной матрицы \mathbf{K}_N^{-1} (или K_N^{-1}) зависят только от единственного параметра τ — интервала между точками измерений, независимо от того — стационарный это процесс или нестационарный. Отметим, что для процессов общего вида, это имеет место только в стационарном случае.

6.7. Обзор некоторых новых работ, связанных с трехдиагональными, ленточными и блочно-ленточными матрицами и марковской аппроксимацией немарковских процессов

Исследованию матриц, имеющих диагональную структуру, посвящено много работ, в качестве примера можно привести работы [1–5, 230, 232]. Как наиболее общую, надо особо отметить статью G. Meurant, 1992 [230], где приведен детальный обзор и анализ результатов изучения свойств инверсий к симметричным трехдиагональным, блочно-трехдиагональным и ленточным матрицам. В статье обобщены многие результаты и приведена достаточно полная (34 наименования) библиография публикаций в этой области, начиная с 1944 по 1992 годы. Обзор начинается с первой публикации Московича, D. Moskovitz, 1944 [231], в которой приведены аналитические выражения для задач, рассматривающих 1D и 2D модели Пуассона.

Связь матриц, инверсии которых имеют диагональную структуру с марковскими процессами Гаусса-Маркова изучена в работах [221–225, 229, 237]. В работе [221], посвященной ассимиляции данных при изучении больших, многомерных, время-зависимых полей за счет учета структуры матрицы измерений удалось построить 4 экономичных алгоритма фильтра Калмана-Бьюси, снижающие вычислительные затраты до 2-х порядков, относительно известных алгоритмов. Такая возможность появляется в том случае, когда ошибки измерений аппроксимируются Марковским случайным полем (Markov random fields). В этом случае, инверсия ковариационной матрицы ошибок измерений поля, имеет ленточную

структуру, что позволяет нам построить экономичные в вычислительном аспекте алгоритмы. Учет разреженности измерений, характерный для рассматриваемых в статье задач (например, результаты спутникового сканирования) делают возможным получение алгоритмов, которые являются еще более эффективными.

В работе [222] рассматриваются матрицы, инверсии которых являются ленточными. В работе, трехдиагональная матрица представляется как Адамарово произведение трех матриц. Это приводит к очень интересному результату. когда случайный процесс Гаусса-Маркова представляется в виде произведения трех независимых процессов: прямого и обратного процессов с независимыми приращениями и процесса со стационарной дисперсией. Здесь мы можем увидеть связь между матрицами, входящими в разложение трехдиагональной матрицы и процессами, входящими в разложение случайного процесса Гаусса-Маркова. В этом смысле, *положительно определенные симметричные матрицы с ленточными инверсиями можно рассматривать как одну из форм представления случайных процессов Гаусса-Маркова.*

В работе [223] получены алгоритмы обращения L – блочно ленточных матриц, инверсии которых также являются L – блочно-ленточными. Полученные алгоритмы обращения применены к задачам обработки сигналов, когда используется фильтрация Калмана-Бьюси (ФКБ). При этом ковариационные матрицы аппроксимируются блочно-ленточной матрицей. Это дает возможность уменьшить вычислительную сложность алгоритмов на 2 порядка и сделать ФКБ алгоритмы осуществимыми для решения задач большой размерности.

В [230] есть ссылка на работу Varret, 1979 [232], в которой введено понятие «свойство треугольника» (Матрица R имеет «свойство треугольника», если $R_{ij} = (R_{ik}R_{kj}) / R_{kk}$); матрица, имеющая «треугольное свойство» и ненулевые диагональные элементы имеет трехдиагональную инверсию и наоборот). Надо отметить, что «свойство треугольника», введенное в [232] совпадает с дискретной формой условия на вид ковариационной функции марковского процесса в широком смысле, приведенном в книге Дуба, 1953, Theorem 8.1 [1]. Мы фокусируемся на этом, так как на результаты теоремы 8.1 опираются многие результаты, приведенные в приложении 1, связанные с исследованиями связи матриц, инверсии которых являются трехдиагональными, блочными или блочно-треугольными матрицами с ковариационными матрицами ординарных (простых) марковских процессов, многосвязных марковских процессов и векторных марковских случайных процессов.

Обобщая содержание этих статей можно отметить, что во всех этих работах изучаются алгоритмы обработки сигналов, имеющих марковское

свойство. При этом структура матриц, входящих в алгоритмы обработки таких сигналов позволяет получить эффективные вычислительные алгоритмы, позволяющие решать задачи больших размерностей.

Задача аппроксимации произвольных случайных процессов марковскими процессами рассмотрена в работах [222, 223, 225], в которых рассмотрены задачи аппроксимации ковариационной матрицы произвольного гауссовского процесса ковариационной матрицей, инверсия к которой является ленточной матрицей. Информационные потери такой аппроксимации оценены в работе [226]. В этих работах также показано, что для обращения таких матриц необходимо знание только элементов прямой матрицы, лежащих внутри ленты шириной $2m + 1$.

Также вопросы аппроксимации немарковских процессов марковскими рассмотрены в работах [227, 228, 237, 233–235].

В работе [227], посвященной построению оптимальных детекторов последовательностей, представлено несколько классов новых субоптимальных детекторов последовательностей, полученных путем замены ковариационной матрицы исследуемого процесса ковариационной матрицей марковского процесса. В статье [228] также рассмотрены вопросы марковской аппроксимации немарковских процессов.

Выводы по главе 6 и общий вывод по главам 4–6

1. Показано, что в отличие от скалярного случая, для векторных процессов появляются различные возможные способы формирования ковариационной матрицы измерений (КМИ), из которых рассмотрены две. Первый способ заключается в построении КМИ m -мерного векторного процесса из m^2 блоков, представляющих собой ковариационные и взаимные ковариационные матрицы измерений отдельных компонент процесса. Второй способ заключается в формировании КМИ векторного процесса из n^2 блоков, представляющих собой значения матричной ковариационной функции процесса в заданных n точках. Таким образом, первый способ формирования КМИ можно назвать компонентным, а второй – точечным (поточечным). Получен вид матрицы перестановки, с помощью которой КМИ векторного процесса может быть легко преобразована из одной формы представления в другую.

2. Сформулированы задачи линейной оптимальной фильтрации и параметрической идентификации векторных случайных процессов. Показано, что в зависимости от способа построения КМИ векторного процесса можно построить две различные схемы обработки наблюдений для этих задач. Подробно рассмотрено построение оптимальных ОМНК-оценок в задачах линейной фильтрации и идентификации для двух от-

меченных схем обработки измерений. Проанализированы различные частные случаи этих задач. Показано, что при точечном способе формирования КМИ, результаты, полученные для скалярных процессов, легче переносятся на векторный случай, чем при компонентном формировании КМИ.

3. Проанализированы свойства отдельных компонент векторного КМ-процесса и их влияние на вид матричной ковариационной функции процесса. Получены условия, которым должны удовлетворять ковариационные и взаимные ковариационные функции отдельных компонент двумерного и стационарного m -мерного КМ-процесса.

4. Найден общий вид КМИ векторного КМ-процесса в точках упорядоченного плана для рассмотренных двух способов формирования КМИ. Показано, что для первого способа построения КМИ, обратная к ней матрица будет состоять из m^2 трехдиагональных $n \times n$ блоков, а для второго способа – будет представлять блочно-трехдиагональную матрицу с блоками $m \times m$. Получены простые рекуррентные соотношения для вычисления ненулевых элементов обратных матриц и величины определителя КМИ. Теорема о КМИ скалярного КМ-процесса в точках плана общего вида (неупорядоченного плана) обобщена на векторный случай.

5. Рассмотрены вопросы эффективности использования ОМНК-оценок в задачах с КМ-процессами. Показано, что если в общем случае, число арифметических операций, необходимых для обращения КМИ, пропорционально $(nm)^2$, то для КМ-процессов оно пропорционально m^3 , а от n зависит линейно. При $m \ll n$ это дает существенный выигрыш в числе необходимых арифметических операций для обращения КМИ. Для КМ-процессов также уменьшается объем памяти, требуемый для хранения КМИ (или обратной к ней матрицы), так как можно хранить только элементы блоков, влияющих на формирование ненулевых элементов обратной матрицы.

6. Выведены рекуррентные соотношения нахождения оптимальных ОМНК-оценок для точечной схемы обработки измерений векторного случайного процесса и показано, что для КМ-процессов они принимают тривиальный вид. При этом, операции с матрицами $(n \times m) \times (n \times m)$ или $(p \times m) \times (n \times m)$ заменяются на операции с $(m \times m)$ подматрицами этих матриц.

7. Рассмотрены примеры вычисления подматриц КМИ для пяти характерных двумерных КМ-процессов. Найден аналитические соотношения с помощью которых можно вычислить элементы ненулевых подматриц обратной матрицы. Приведен подробный анализ влияния свойств отдельных компонент двумерного КМ-процесса на вид аналитических выражений для элементов обратной матрицы.

7. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Наряду с задачами оценивания важное значение при исследовании случайных процессов имеют и задачи планирования эксперимента (ПЭ). В главе 1 сформулирована, в достаточно общем виде, математическая постановка задачи ПЭ по оцениванию заданных характеристик случайного процесса. При этом предполагается, что цель ПЭ заключается в таком размещении измерений в заданной области T_u , которое обеспечивает наибольшую, в смысле выбранного статистического критерия, точность получаемых оценок (при заданном числе измерений и выбранном методе построения оценок).

В качестве оцениваемых параметров могут выступать параметры модели математического ожидания процесса (регрессионный анализ случайных полей), значения наблюдаемого процесса (задачи интерполяции и экстраполяции), значения процесса статистически связанного с наблюдаемым (задача фильтрации). ПЭ для задач оценивания параметров математического ожидания процесса обычно называется *планированием регрессионных экспериментов*.

Было отмечено, что аналитическое построение оптимальных планов для задач оценивания случайных процессов чрезвычайно сложно и в настоящее время решено только для простейших случаев. Более универсальными оказываются численные методы синтеза оптимальных планов, которые не зависят от вида модели математического ожидания, вида ковариационной(ых) функции(й) процесса, размерности аргумента t , конфигурации области планирования T_u (при размерности $t > 1$). Но эффективность численных процедур для случайных процессов общего вида быстро падает с увеличением размерности задачи. Особенно это касается численных процедур, в основе которых лежит обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК). По этим причинам, применение численных процедур ограничено синтезом планов с небольшим числом точек.

Таким образом, весьма актуальной является задача построения эффективных процедур планирования, учитывающих класс исследуемых случайных процессов и позволяющих строить планы с большим числом точек. Из результатов глав 4–6 можно ожидать, что для КМ-процессов возможен синтез более простых и быстродействующих, относительно процедур для процессов общего вида, алгоритмов синтеза оптимальных планов. Поэтому в данной главе рассматриваются вопросы численного поиска оптимальных или квазиоптимальных планов для задач оценивания одномерных

КМ-процессов. Возможности обобщения получаемых результатов на скалярные m -связные КМ-процессы и векторные КМ-процессы видна из контекста.

Для конкретности рассматривается задача ПЭ, целью которой является линейная фильтрация с использованием оценок ОМНК скалярного случайного процесса с одновременной параметрической идентификацией его математического ожидания. Важным частным случаем этой задачи является параметрическая ОМНК-идентификация линейной модели математического ожидания процесса.

7.1. Постановка задачи планирования эксперимента при фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов

Пусть наблюдается случайный процесс $Z(t)$, описываемый моделью

$$Z(t) = Y(t) + V(t) = \eta(t) + \xi(t) + V(t), \quad t \in T, \quad (7.1)$$

представляющий собой сумму полезного (фильтруемого) $Y(t)$ и шумового $V(t)$ случайных процессов, удовлетворяющих предположениям:

$$\left. \begin{aligned} EY(t) = \eta(t) = \eta(t, \mathbf{B}) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t); \quad E\xi(t) = 0; \quad EV(t) = 0; \\ E\xi(s)\xi(t) = k_\xi(s, t) = k_y(s, t); \quad EV(s)V(t) = k_v(s, t); \\ E\xi(s)V(t) = k_{\xi v}(s, t) = k_{yv}(s, t); \quad EV(s)\xi(t) = k_{v\xi}(s, t) = k_{vy}(s, t) \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

где $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_p(t))_T$ – вектор известных линейно-независимых детерминированных функций; $\mathbf{B} = (\beta_1, \dots, \beta_p)_T$ – вектор неизвестных параметров; T – область действия (7.1).

Предположим, что поставлена задача на основе эксперимента, представляющего собой дискретные измерения в интервале $T_u \subset T$ одной реализации процесса $Z(t)$ найти оптимальные ОМНК-оценки значений процесса $Y(t)$ в заданной области $T_o \subset T$. Промежуточным этапом этой задачи фильтрации является поиск оптимальных ОМНК-оценок аддитивных составляющих $\eta(t)$ и $\xi(t)$ процесса $Y(t)$ и вектора параметров \mathbf{B} .

При проведении эксперимента могут использоваться различные дискретные схемы измерений, которые мы будем называть n -точечными планами эксперимента:

- 1) общего вида $\varepsilon_n = \{t_1, \dots, t_n \mid t_i \neq t_j; i, j = \overline{1, n}\}$;
- 2) возрастающими $\varepsilon_n^> = \{t_1, \dots, t_n \mid t_1 < \dots < t_n\}$;
- 3) равномерными $\varepsilon_n^p = \{t_1, \dots, t_n \mid t_{i+1} = t_1 + i\Delta; i = \overline{1, n-1}\}$,

где Δ – интервал между точками измерений. Для всех планов $t_i \in T_u \subset T$.

Оптимальная (т.е. совпадающая с наилучшей линейной несмещенной оценкой) ОМНК-оценка процесса $Y(t)$ по измерениям $Z(t)$ в точках ε_n , определяется выражениями [145]:

$$\hat{Y}_n(t) = \hat{\xi}_n(t) + \hat{\eta}_n(t), \quad (7.3)$$

где
$$\hat{\xi}_n(t) = \mathbf{k}_{zy}^T(t | \varepsilon_n) K_n^{-1} (\mathbf{z}_n - F_n^T \hat{\mathbf{B}}_n) \quad (7.4)$$

– оптимальная ОМНК-оценка центрированного процесса $\xi(t)$;

$$\hat{\eta}_n(t) = \mathbf{f}^T(t) \hat{\mathbf{B}}_n \quad (7.5)$$

– оптимальная ОМНК-оценка детерминированного процесса $\eta(t)$;

$$\hat{\mathbf{B}}_n = D_n F_n K_n^{-1} \mathbf{z}_n \quad (7.6)$$

– оптимальная ОМНК-оценка вектора параметров \mathbf{B} .

В (7.3)–(7.6) $\mathbf{z}_n = (z(t_1), \dots, z(t_n))_T$ – вектор измерений $Z(t)$ в точках ε_n ; $F_n = [\mathbf{f}(t_1), \dots, \mathbf{f}(t_n)]$ – матрица значений вектора $\mathbf{f}(t)$ в точках ε_n ; K_n^{-1} – матрица, обратная ковариационной матрице K_n вектора измерений \mathbf{z}_n ; $\mathbf{k}_{zy}(t | \varepsilon_n) = (k_{zy}(t_1, t), \dots, k_{zy}(t_n, t))^T$ – вектор ковариаций вектора \mathbf{z}_n со значением $y(\cdot)$ в точке t (здесь $k_{zy}(s, t) = k_{z\xi}(s, t) + k_{y\xi}(s, t)$);

$$D_n = [F_n K_n^{-1} F_n^T]^{-1} \quad (7.7)$$

– ковариационная (дисперсионная) матрица оптимальных ОМНК-оценок $\hat{\mathbf{B}}_n$.

Пусть $\Delta Y_n(t) = \hat{Y}_n(t) - Y(t)$, $\Delta \xi_n(t) = \hat{\xi}_n(t) - \xi(t)$, $\Delta \eta_n(t) = \hat{\eta}_n(t) - \eta(t)$ – ошибки оценок (7.3)–(7.5), $\sigma_{\Delta y}^2(t)$, $\sigma_{\Delta \xi}^2(t)$, $\sigma_{\Delta \eta}^2(t)$ – дисперсии этих ошибок. Тогда дисперсия ошибки предсказания процесса $Y(t)$ в точке $t_0 \in T_0$ по измерениям $Z(t)$ в точках ε_n определяется выражением

$$\sigma_{\Delta y}^2(t_0) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t_0) + \sigma_{\Delta \eta}^2(t_0) + 2 \text{cov}\{\Delta \xi_n(t_0), \Delta \eta_n(t_0)\}, \quad (7.8)$$

где
$$\sigma_{\Delta \xi}^2(t_0) = \sigma_y^2(t_0) - \mathbf{k}_{zy}^T(t_0 | \varepsilon_n) K_n^{-1} [I_n - F_n^T D_n F_n K_n^{-1}] \mathbf{k}_{zy}(t_0 | \varepsilon_n) \quad (7.9)$$

– дисперсия ошибки предсказания составляющей $\xi(t)$ в точке t_0 ; $\sigma_y^2(t_0)$ – дисперсия процесса $Y(t)$ в точке t_0 ;

$$\sigma_{\Delta\eta}^2(t_0) = \mathbf{f}^T(t_0)D_n\mathbf{f}(t_0) \quad (7.10)$$

– дисперсия ошибки предсказания математического ожидания $\eta(t)$ в точке t_0 , совпадающая с дисперсией $\sigma_{\hat{\eta}}^2(t_0)$ оценки $\hat{\eta}_n(t_0)$;

$$\text{cov}\{\Delta\xi_n(t_0), \Delta\eta_n(t_0)\} = -\mathbf{k}_{zy}^T(t_0 | \varepsilon_n)K_n^{-1}F_n^T D_n\mathbf{f}(t_0) \quad (7.11)$$

– ковариация ошибок предсказания процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в точке t_0 .

Из выражений (7.7)–(7.11) видно, что дисперсия ошибки $\Delta Y_n(t)$ в точке $t_0 \in T_0$ зависит от расположения точек измерений t_i ($i = \overline{1, n}$) в области T_u , т.е. от плана ε_n и не зависит от вектора измерений \mathbf{Z}_n . Поэтому, если известны ковариационная функция $k_\zeta(s, t)$ и взаимная ковариационная функция $k_{zy}(s, t)$, то здесь можно поставить задачу планирования эксперимента (ПЭ), заключающуюся в априорном (до проведения эксперимента) выборе оптимального в некотором смысле плана эксперимента ε_n .

Пусть E_n – класс всех n -точечных планов вида ε_n . Чтобы отметить зависимость величин $\sigma_{\Delta y}^2(t)$, $\sigma_{\Delta\xi}^2(t)$, $\sigma_{\Delta\eta}^2(t)$ и матрицы D_n от плана ε_n , будем обозначать их дальше, соответственно, через $\sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_n)$, $\sigma_{\Delta\xi}^2(t | \varepsilon_n)$, $\sigma_{\Delta\eta}^2(t | \varepsilon_n)$ и $D(\varepsilon_n)$. Тогда задачу оптимального ПЭ по оцениванию значения процесса $Y(t)$ в точке $t_0 \in T_0$ с помощью измерений процесса $Z(t)$ в точках плана $\varepsilon_n \in E_n$ можно сформулировать следующим образом: найти план эксперимента $\varepsilon_n^* \in E_n$, который минимизирует дисперсию $\sigma_{\Delta y}^2(t_0 | \varepsilon_n)$, т.е.

$$\sigma_{\Delta y}^2(t_0 | \varepsilon_n^*) = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \sigma_{\Delta y}^2(t_0 | \varepsilon_n). \quad (7.12)$$

План ε_n^* , найденный в соответствии с условием (7.12) называется *оптимальным экстраполяционным планом* [111]. Здесь не делается различия для случаев, когда $T_0 \in T$ (задача интерполяции) и $T_0 \notin T$ (задача экстраполяции), так как с точки зрения алгоритмов планирования эксперимента эти задачи эквивалентны.

Кроме рассмотренной задачи ПЭ, минимизирующего $\sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_n)$, можно поставить задачи поиска планов, минимизирующих дисперсии $\sigma_{\Delta\xi}^2(t | \varepsilon_n)$, $\sigma_{\Delta\eta}^2(t | \varepsilon_n)$ или некоторый выпуклый функционал $\Psi[\cdot]$ от матрицы $D(\varepsilon_n)$, позволяющий сравнивать между собой матрицы $D(\varepsilon_n)$ для различных планов ε_n . Тогда задача оптимального ПЭ, минимизирующего указанные величины будет выглядеть следующим образом: найти план $\varepsilon_n^* \in E_n$, для которого

$$\sigma_{\Delta\xi}^2(t_0 | \varepsilon_n^*) = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \sigma_{\Delta\xi}^2(t_0 | \varepsilon_n), \quad (7.13)$$

$$\text{или} \quad \sigma_{\Delta\eta}^2(t_0 | \varepsilon_n^*) = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \sigma_{\Delta\eta}^2(t_0 | \varepsilon_n), \quad (7.14)$$

$$\text{или} \quad \Psi[D(\varepsilon_n^*)] = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \Psi[D(\varepsilon_n)]. \quad (7.15)$$

Критерии (7.12)–(7.14) можно обобщить на более общий случай, когда надо построить план, минимизирующий дисперсию ошибки предсказания не в одной, а в группе точек $t_j \in T_0$ ($j = \overline{1, l}$). Но при этом надо задаться какой-то скалярной функцией $\Phi(\cdot)$ от вектора

$$\sigma_{\cdot}(\varepsilon_n) = (\sigma_{\cdot}^2(t_1 | \varepsilon_n), \dots, \sigma_{\cdot}^2(t_l | \varepsilon_n))^T,$$

позволяющей сравнивать между собой различные планы эксперимента. В качестве $\Phi(\cdot)$ часто используются функции вида

$$\varphi(\sigma_{\cdot}(\varepsilon_n)) = \sum_{j=1}^l \sigma_{\cdot}^2(t_j | \varepsilon_n) \quad \text{и} \quad \varphi(\sigma_{\cdot}(\varepsilon_n)) = \max_{1 \leq j \leq l} \sigma_{\cdot}^2(t_j | \varepsilon_n).$$

В этом случае, условие (7.12) принимает вид

$$\varphi(\sigma_{\Delta\eta}(\varepsilon_n^*)) = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \varphi(\sigma_{\Delta\eta}(\varepsilon_n)). \quad (7.16)$$

Соответственно, можно переписать в виде (7.16) и условия (7.13), (7.14).

Критерии (7.14) и (7.15) можно рассматривать по отношению к более простой модели случайного процесса

$$Z(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{f}(t) + V(t), \quad t \in T, \quad (7.17)$$

где $EV(t) = 0$; $EV(s)V(t) = EZ(s)Z(t) = k(s, t)$. Векторы \mathbf{B} и $\mathbf{f}(t)$ имеют тот же смысл, что и в (7.2).

Наиболее подробно в литературе рассмотрены вопросы планирования регрессионных экспериментов, т.е. поиска планов, удовлетворяющих (7.15) для модели (7.17). При этом, в зависимости от вида функционала $\Psi[\cdot]$ различают A -, E -, D -, G -оптимальные планы и ряд других. Ниже наиболее подробно рассматривается построение D -оптимальных планов, когда

$$\Psi[\cdot] = \Psi[D] = \det D = |D|.$$

Планы, удовлетворяющие (7.15) мы будем называть Ψ – оптимальными планами.

В классических работах по планированию регрессионного эксперимента (см., например, [89, 94, 97–103, 110, 187а–187 с, 160–187]) наблюдения (измерения) считаются, как правило, независимыми (некоррелированными) случайными величинами с известными дисперсиями.

Первыми работами, в которых рассматривались вопросы планирования эксперимента для коррелированных наблюдений, были работы Сакса и Илвисэйкера [181]. При этом оказалось удобным интерпретировать коррелированные наблюдения как измерения реализации случайного процесса с заданной ковариационной функцией. Математическая формулировка задачи ПЭ, рассмотренной в [181], совпадает с (7.15) при условии, что процесс задан в виде модели (7.17).

Работы Сакса и Илвисэйкера были обобщены в работах [166, 182–185] на процессы авторегрессии, скалярные и векторные случайные процессы, задаваемые стохастическими дифференциальными уравнениями. В работе [217] показаны особенности и сложность решения задачи (7.15) для случайных процессов с многомерным аргументом (случайных полей).

Аналитическое построение планов ε_n^* , удовлетворяющих (7.15), а тем более (7.12), возможно только в простейших случаях. Здесь надо отметить тот примечательный факт, что большинство аналитических результатов, полученных в [180–184, 187, 187д] относится к случайным процессам, центрированная составляющая которых представляет собой *скалярный или векторный марковский процесс или компоненту векторного марковского процесса*. В частности, получены результаты для марковских процессов, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями со случайными начальными условиями.

В связи с трудностью аналитического построения планов вида ε_n^* , в работах [111–113, 134–135, 138, 140–142, 145, 147–149, 152–158] разработаны численные алгоритмы решения задач (7.15) и (7.12), являющиеся обобщением известных численных алгоритмов последовательного и точного планирования эксперимента (см. например [97]), на случай коррелированных переменных. Эти результаты достаточно подробно рассмотрены в [145], поэтому ниже приводятся только самые краткие сведения о принципах построения численных процедур, необходимые для лучшего понимания основных результатов данной главы.

7.2. Численные процедуры планирования эксперимента

Одним из наиболее универсальных путей решения задачи ПЭ при оценивании случайных процессов является численный синтез оптимальных планов. Численные методы дают возможность построения процедур нахождения планов не накладывающих никаких специфических условий на вид функций $f(t)$ и $k(s, t)$, работающих при размерности аргумента t большем 1 и произвольной конфигурации области планирования T_u (при размерности $t > 1$). Что касается размерности

решаемой задачи и количества вычисляемых точек плана, то они ограничиваются вычислительными ресурсами компьютера, используемого для поиска точек плана.

Все множество численных процедур построения оптимальных планов можно свести к двум базовым процедурам – численной процедуре построения последовательных планов эксперимента (последовательная процедура планирования) и численной процедуре построения точных планов (т.е. планов эксперимента с заданным числом точек). С небольшими модификациями они позволяют строить планы оптимальные (квазиоптимальные) для различных критериев оптимальности планов, учитывающие вид априорной информации о статистической структуре измерений (независимые или некоррелированные измерения с равными или различными дисперсиями, коррелированные измерения и т.п.), произвольной размерности аргумента t , который часто интерпретируется как вектор входных переменных, различной области изменения входных переменных T_u и т.д. Как последовательная процедура планирования, так и процедура построения точных планов требуют задания начальных планов с числом точек не меньшим числа оцениваемых параметров модели математического ожидания процесса (см. (7.2) и (7.17)). Выбор точек начального плана влияет на скорость сходимости процедур.

Рассмотрим задачу построения оптимального в некотором смысле плана эксперимента $\varepsilon_n^* \in E_n$ для оценивания неизвестных параметров \mathbf{B} в модели (7.17). Пусть $\Psi[\cdot]$, как и раньше, некоторый выпуклый функционал, сопоставляющий матрице (7.7) число и дающий возможность сравнивать между собой дисперсионные матрицы оценок для различных планов. Тогда, задаваясь в зависимости от выбранного критерия оптимальности плана различными видами функционала $\Psi[\cdot]$, например, $\Psi[\cdot] = |\cdot|$ или $\Psi[\cdot] = Sp[\cdot]$, можно поставить задачу оптимизации плана по заданному критерию оптимальности.

Последовательными Ψ – оптимальными планами $\{\varepsilon_n \mid n \geq p\}$, называются планы i -я точка которых t_i^* обеспечивает максимально возможное в области T_u , изменение величины $\Psi[\cdot]$ при фиксированном плане ε_{i-1} , т.е.

$$\Psi[D(\varepsilon_{i-1} + t_i^*)] = \inf_{t_i \in T_u | \varepsilon_{i-1}} \Psi[D(\varepsilon_{i-1} + t_i)] \quad (7.18)$$

Для того, чтобы матрица $D(\varepsilon_i)$ была невырождена, необходимо задаваться начальным планом ε_{n_0} , число точек которого $n_0 \geq p$, где p – число оцениваемых параметров \mathbf{B} . Таким образом, в общем случае, последовательный Ψ – оптимальный план $\{\varepsilon_n \mid n \geq p\}$ будет функцией ε_{n_0} , но при

большом числе точек синтезируемого плана ε_n и малой величине p этим можно пренебречь.

Последовательная процедура достаточно проста и позволяет строить планы с заданной точностью, в частности, с помощью этой процедуры при достаточно больших n можно строить планы с непрерывными весами (*непрерывные планы* – в традиционной терминологии планирования эксперимента [97]), не зависящие от выбора начального плана эксперимента. С помощью последовательной процедуры можно, при достаточно больших n , получать оптимальные плотности распределения точек измерений в заданной области [145].

Точным Ψ – оптимальным планом называется n -точечный план $\varepsilon_n^ \in E_n$, который удовлетворяет условию*

$$\Psi[D(\varepsilon_n^*)] = \inf_{\varepsilon_n \in E_n} \Psi[D(\varepsilon_n)]. \quad (7.19)$$

Точные Ψ – оптимальные планы еще называют *планами*; Ψ – *оптимальными в классе n -точечных планов E_n* . Исходя, из тех же соображений, что и в случае последовательного плана, можно утверждать, что нельзя построить невырожденный точный план с числом точек $n < p$.

Процедура построения точных планов более сложна, как в идейном, так и в вычислительном отношении, по сравнению с последовательной процедурой. Но она позволяет при большом числе итераций синтезировать план с заданным (возможно небольшим) числом точек $n \geq p$, малозависящий от выбора точек начального плана.

Рассмотрим численную процедуру построения последовательных планов, удовлетворяющих условию (7.18). Процедура построения плана должна заканчиваться после вычисления заданного числа точек плана n или после достижения заданной точности γ_T .

А. Предварительная часть процедуры

1. Задается некоторый невырожденный начальный план эксперимента

$$\varepsilon_{n_0} = \{t_1, \dots, t_{n_0} \mid t_i \neq t_j; t_i \in T_u; i, j = \overline{1, n_0}; n_0 \geq p\}.$$

2. Для начального плана эксперимента вычисляется матрица $D(\varepsilon_{n_0})$ по формуле (7.7).

Б. Циклическая часть процедуры

3. Считая план ε_i фиксированным с известной матрицей $D(\varepsilon_i)$ находится точка $t^* \in T_n$, включение которой в план ε_i обеспечивает

$$\inf_{t_i \in T_n | \varepsilon_{i-1}} \Psi[D(\varepsilon_{i-1} + t_i)] \quad (7.19)$$

4. Найденная точка t^* включается в план эксперимента, т.е. строится план

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + t_{i+1},$$

где $t_{i+1} = t^*$.

5. Вычисляются матрицы $F(\varepsilon_{i+1})$, $K^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ и $D(\varepsilon_{i+1})$ для плана ε_{i+1} .

6. Если выполняется хотя бы одно из условий: $n \geq n_k$, где n_k – заданное (конечное) число точек плана, или $\Psi[D(\varepsilon_{i+1})] \leq \gamma_T$, где γ_T – заданная точность построения плана, то процедура синтеза плана заканчивается, в противном случае повторяются пп. 3–6.

В качестве критерия останова процедуры часто используется выполнение условия

$$\frac{\Psi[D(\varepsilon_i)] - \Psi[D(\varepsilon_{i+1})]}{\Psi[D(\varepsilon_{i+1})]} = \gamma_T \quad (7.20)$$

Из приведенной процедуры видно, что для эффективной ее реализации необходимо найти рекуррентные соотношения, связывающие матрицы $F(\varepsilon_{i+1})$, $K^{-1}(\varepsilon_{i+1})$ и $D(\varepsilon_{i+1})$ с матрицами $F(\varepsilon_i)$, $K^{-1}(\varepsilon_i)$ и $D(\varepsilon_i)$ для всех $i \geq n_0$.

Численная процедура мало изменяется, если ищется последовательный план, минимизирующий величину дисперсии ошибки предсказания $\sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_n)$ (или $\sigma_{\Delta \xi}^2(t | \varepsilon_n)$ или $\sigma_{\Delta \eta}^2(t | \varepsilon_n)$) для заданного начального плана ε_{n_0} . В этом случае условие (7.19) необходимо заменить на соответствующее другое условие, например, $\inf_{t \in T_n} \sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_{i+1})$.

Для многих критериев оптимальности нахождение (7.19) или (7.12) можно заменить более простой оптимизационной задачей (см. ниже).

Численная процедура построения планов с заданным числом точек n (точных планов), как уже отмечалось, сложнее последовательного планирования. Предварительная часть процедуры (шаги 1 и 2) выполняются точно также, как и для последовательной процедуры, но число точек начального плана n_0 выбирается равным заданному n . Основное отличие процедур заключается в выполнении 3-го шага, который и последующие шаги для процедуры точного планирования выглядят следующим образом.

3. Находится точка \tilde{t}_i ($i = \overline{1, n}$) текущего плана ε_n^s ($s = 0, 1, 2, \dots$), которая вносит наибольший вклад в величину $\Psi[D(\varepsilon_n^s)]$ (так называемая «наихудшая» точка плана) и точка $t^* \in T_u$, включение которой в план ε_n^s обеспечивает максимально возможное при заданных условиях уменьшение величины $\Psi[D(\varepsilon_n^s)]$ («наилучшая» точка из области T_u). Другими словами, находится пара точек $\tilde{t}_i \in \varepsilon_n^s$ и $t^* \in T_u$, такая, что замена \tilde{t}_i на t^* обеспечивает максимальное уменьшение величины $\Psi[D(\varepsilon_n^s)]$ среди всех точек $t_i \in \varepsilon_n^s$ ($i = \overline{1, n}$) и всех $t \in T_u$.

4. Точка \tilde{t}_i ($i = \overline{1, n}$) исключается из плана ε_n^s и вместо нее под номером i включается точка t^* , т.е. строится план $\varepsilon_n^{s+1} = \varepsilon_n^s - \tilde{t}_i + t^* = \varepsilon_{n-1}^s + t^*$.

5. Соответственно полученному плану ε_n^{s+1} корректируются матрицы $F(\varepsilon_n^s)$, $K^{-1}(\varepsilon_n^s)$ и $D(\varepsilon_n^s)$.

6. Шаги 3–5 выполняются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность γ_T приближения к точному Ψ – оптимальному плану. Условие останова процедуры может иметь, например, вид (7.20).

Обычно синтез точного Ψ – оптимального плана выполняют несколько раз для различных начальных планов ε_n^0 , пока не будут найдены несколько планов с приблизительно одинаковыми и наименьшими значениями $\Psi[D(\varepsilon_n^s)]$. Любой из этих планов может быть принят за точный Ψ – оптимальный план.

Из приведенных примеров видно, что численные процедуры построения планов, как правило, являются итерационными и опираются на рекуррентные формулы вычисления соответствующих оценок и их дисперсий. В следующем разделе приводятся рекуррентные формулы вычисления ОМНК-оценок и дисперсий, полученные для плана общего вида.

7.3. Рекуррентные формулы вычисления оценок и дисперсий

Рекуррентные формулы вычисления оценок (7.3)–(7.6), дисперсионной матрицы (7.7) и дисперсий ошибок (7.8)–(7.11) можно легко найти из соответствующих выражений. Пусть известны оценки (7.3)–(7.5) для плана ε_i . Тогда для плана ε_{i+1} их можно вычислить с помощью следующих выражений:

$$\hat{\xi}_{i+1}(t) = \hat{\xi}_i(t) + k_{zy}^*(t_{i+1}, t) [z_{i+1}^* - \mathbf{B}_{i+1}^T \mathbf{f}_{i+1}^*] + \mathbf{q}_i^T(t) [\hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}}_{i+1}]; \quad (7.21)$$

$$\hat{\eta}_{i+1}(t) = \hat{\eta}_i(t) - \mathbf{f}^T(t) [\hat{\mathbf{B}}_i - \hat{\mathbf{B}}_{i+1}]; \quad (7.22)$$

$$\hat{Y}_{i+1}(t) = \hat{\xi}_{i+1}(t) + \hat{\eta}_{i+1}(t), \quad (7.23)$$

где $k_{zy}^*(t_{i+1}, t) = (k_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{k}_{zy}^T(t | \varepsilon_i) \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}};$ (7.24)

$$z_{i+1}^* = (z_{i+1} - \mathbf{z}_i^T \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}}; \quad (7.25)$$

$$\mathbf{f}_{i+1}^* = (\mathbf{f}_{i+1} - F_i \mathbf{u}_{i+1}) / \sqrt{\alpha_{i+1}}; \quad (7.26)$$

$$\alpha_{i+1} = k_{i+1, i+1} - \mathbf{k}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1}; \quad (7.27)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1}; \quad (7.28)$$

$$\mathbf{q}_{i+1}(t) = F_{i+1} K_{i+1}^{-1} \mathbf{k}_{zy}(t | \varepsilon_{i+1}) = \mathbf{q}_i(t) + \mathbf{f}_{i+1}^* k_{zy}^*(t_{i+1}, t). \quad (7.29)$$

В (7.21)–(7.29) использованы обозначения

$$\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{f}(t_{i+1}); \quad \mathbf{k}_{i+1} = (k_{1, i+1}, \dots, k_{i, i+1})^T; \quad k_{ij} = k_z(t_i, t_j); \quad z_i = z(t_i).$$

Рекуррентная формула вычисления вектора оценок параметров $\hat{\mathbf{B}}_{i+1}$ через $\hat{\mathbf{B}}_i$ широко известна

$$\hat{\mathbf{B}}_{i+1} = \hat{\mathbf{B}}_i + D_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^* [z_{i+1}^* - \hat{\mathbf{B}}_i^* \mathbf{f}_{i+1}^*], \quad (7.30)$$

где z_{i+1}^* и \mathbf{f}_{i+1}^* определены в (7.25) и (7.26).

Также хорошо известна формула вычисления D_{i+1} через D_i (здесь $D_i = D(\varepsilon_i)$):

$$D_{i+1} = D_i - \frac{D_i \mathbf{f}_{i+1}^* (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_i}{1 + d_{i+1}^*}, \quad (7.31)$$

где $d_{i+1}^* = (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_i \mathbf{f}_{i+1}^*$.

Рекуррентные формулы вычисления дисперсий $\sigma_{\Delta \xi}^2(t | \varepsilon_{i+1})$ и $\sigma_{\Delta \eta}^2(t | \varepsilon_{i+1})$ находятся аналогичным образом и равны:

$$\sigma_{\Delta \xi}^2(t | \varepsilon_{i+1}) = \sigma_{\Delta \xi}^2(t | \varepsilon_i) - k_{zy}^*(t_{i+1}, t) [k_{zy}^*(t_{i+1}, t) (1 - (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^*) -$$

$$- 2\mathbf{q}_i^T(t) D_{i+1} \mathbf{f}_{i+1}^*] - \mathbf{q}_i^T(t) [D_i - D_{i+1}] \mathbf{q}_i(t).$$

$$\sigma_{\Delta \eta}^2(t | \varepsilon_{i+1}) = \sigma_{\Delta \eta}^2(t | \varepsilon_i) - \mathbf{f}^T(t) [D_i - D_{i+1}] \mathbf{f}(t). \quad (7.33)$$

Ковариация ошибок предсказаний $\Delta\xi_{i+1}(t)$ и $\Delta\eta_{i+1}(t)$ равна:

$$\begin{aligned} \text{cov}\{\Delta\xi_{i+1}(t), \Delta\eta_{i+1}(t)\} = & \text{cov}\{\Delta\xi_i(t), \Delta\eta_i(t)\} + \\ & + \mathbf{q}_i^T(t)[D_i - D_{i+1}]\mathbf{f}(t) - k_{zy}^*(t_{i+1}, t)\mathbf{f}^T(t)D_{i+1}\mathbf{f}_{i+1}^*. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Суммируя выражения (7.32)–(7.34) с учетом формулы (7.8) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_{i+1}) = & \sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_i) - \mathbf{w}_i^T(t)[D_i - D_{i+1}]\mathbf{w}_i(t) - k_{zy}^*(t_{i+1}, t) \times \\ & \times [k_{zy}^*(t_{i+1}, t)(1 - (\mathbf{f}_{i+1}^*)^T D_{i+1}\mathbf{f}_{i+1}^*) + 2\mathbf{w}_i^T(t)D_{i+1}\mathbf{f}_{i+1}^*], \end{aligned} \quad (7.35)$$

где $\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{q}_i(t)$.

Ранее было отмечено, что для многих конкретных критериев оптимальности решение задач (7.12) или (7.19) можно заменить более простыми оптимизационными задачами. Например, если $\Psi[D(\varepsilon_n)] = D(\varepsilon_n)$, то поиск (7.19) эквивалентен поиску $\sup_{t \in T_u} d^*(t | \varepsilon_i)$, где

$$d^*(t | \varepsilon_i) = (\mathbf{f}^*(t | \varepsilon_i))^T D(\varepsilon_i)\mathbf{f}^*(t | \varepsilon_i).$$

Если $\Psi[D(\varepsilon_n)] = SpD(\varepsilon_n)$, то поиск $\inf_{t \in T_u} SpD(\varepsilon_{i+1})$ эквивалентен поиску $\sup_{t \in T_u} (\mathbf{f}^*(t | \varepsilon_i))^T D^2(\varepsilon_i)\mathbf{f}^*(t | \varepsilon_i)$. В работе [111] показано, что для задачи (7.12) также можно найти более простой, эквивалентный с точки зрения получаемого плана, критерий. Более подробно о реализации конкретных критериев оптимальности планов в численных процедурах см. в [145].

Как видно из формул (7.21)–(7.35), рекуррентные формулы вычисления оценок и дисперсий для рассматриваемой задачи являются весьма громоздкими с вычислительной точки зрения, требуют постоянного хранения в памяти компьютера матриц K_i^{-1} и F_i , размеры которых зависят от числа точек плана. В последовательной процедуре размеры этих матриц возрастают по мере вычисления новых точек плана. По этим причинам, численные процедуры планирования, построенные на основе рекуррентных формул (7.21)–(7.35) не пригодны для синтеза планов с большим числом точек.

Наибольший вклад в сложность реализации численных процедур вносит матрица K_i^{-1} , вычисление и хранение которой представляет достаточно сложную задачу даже для современных компьютеров. Поэтому здесь, как и в задачах оценивания, важно построение более простых процедур, учитывающих структуру ковариационной матрицы измерений исследуемого класса случайных процессов. Как было показано в главах 4–6,

рекуррентные процедуры резко упрощаются для КМ-процессов. Учитывая то, что все численные процедуры планирования являются итерационными и построены на основе рекуррентных формул оценивания, для КМ-процессов можно ожидать существенного упрощения и в отношении численных процедур планирования.

7.4. Особенности применения численных процедур планирования для КМ-процессов

В главах 4–6 получены рекуррентные формулы ОМНК-оценивания для простых, m -связных и векторных КМ-процессов. При выводе этих формул предполагалось, что матрица, обратная ковариационной матрице измерений является трехдиагональной для простых, ленточной с полушириной ленты m для m -связных и блочно-трехдиагональной для векторных КМ-процессов. Но, к сожалению, такие, удобные для вычислений, структуры обратных ковариационных матриц возможны только для измерений в точках упорядоченных планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p .

Рассмотрим подробнее рекуррентные формулы ОМНК, соответствующие измерениям простых (односвязных) КМ-процессов в точках упорядоченных планов $\varepsilon_i^>$ ($i = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$). При этом матрица K_i^{-1} при любом i является трехдиагональной и вектор \mathbf{u}_{i+1} в (7.28) принимает вид (см. формулы в приложении 3):

$$\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_i \end{pmatrix}^T, \quad (7.36)$$

где $\gamma_i = k_{i,i+1}/k_{ii}$; $k_{i,i+1} = k_z(t_i, t_{i+1})$; $k_{ii} = k_z(t_i, t_i)$.

Таким образом, при измерениях КМ-процессов в точках $\varepsilon_n^>$ вектор \mathbf{u}_{i+1} имеет единственный ненулевой элемент γ_i в позиции i .

С учетом (7.36) рекуррентные выражения (7.24)–(7.27) для вычисления $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, z_{i+1}^* , \mathbf{f}_{i+1}^* и α_{i+1} принимают тривиальный вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= k_{i+1,i+1} - \gamma_i k_{ii} \\ k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= (k_{zy}(t_{i+1}, t) - \gamma_i k_{zy}(t_i, t)) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ z_{i+1}^* &= (z_{i+1} - \gamma_i z_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= (\mathbf{f}_{i+1} - \gamma_i \mathbf{f}_i) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Из (7.37) видно, что при обработке результатов измерений КМ-процессов в формулах (7.24)–(7.27) исчезают матрицы K_i^{-1} и F_i , а векторы $\mathbf{k}_{zy}(t | \varepsilon_i)$, \mathbf{z}_i и \mathbf{k}_{i+1} вырождаются в скалярные величины. Соответственно упрощается вычисление векторов и матриц $\mathbf{q}_i(t)$, $\hat{\mathbf{B}}_i$, D_i .

К сожалению, при использовании численных процедур поиска точек плана, последовательность синтезируемых точек (план) ε_n , как правило, не является упорядоченной последовательностью вида $\varepsilon_n^>$. Действительно, анализ приведенных численных процедур показывает, что первой выбирается точка, которая наиболее сильно изменяет критерий оптимальности плана (при заданном начальном плане), следующей выбирается точка, которая также наиболее сильно изменяет этот критерий, но уже с учетом включения в план первой найденной точки и т.д. Естественно, рассчитывать на то, что последовательность найденных точек плана будет упорядоченной не приходится. Другими словами, в процессе численного планирования мы имеем дело с неупорядоченными планами ε_i ($i = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$).

При этом, обратная ковариационная матрица уже не будет иметь регулярную структуру (трехдиагональную, ленточную или блочно-трехдиагональную), а будет разреженной матрицей с ненулевыми элементами в позициях, определяемых порядком следования точек плана ε_n в плане $\varepsilon_n^>$. Естественно, что полученные ранее рекуррентные процедуры не могут быть использованы в численных процедурах планирования.

Анализ выражений (7.21)–(7.35) показывает, что от структуры матрицы K_n^{-1} зависят только вектор \mathbf{u}_{i+1} и связанные с ним величины и векторы $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$, \mathbf{f}_{i+1}^* , z_{i+1}^* , α_{i+1} . Поэтому достаточно найти рекуррентные процедуры вычисления этих величин и векторов для измерений КМ-процесса в точках неупорядоченного плана ε_n , чтобы модифицировать рассмотренные выше численные процедуры построения планов с учетом разреженности матрицы K_n^{-1} .

В случае измерений КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n , формулы вычисления вектора \mathbf{f}_{i+1}^* и величин α_{i+1} , z_{i+1}^* , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$ будут несколько сложнее, чем формулы (7.34), соответствующие измерениям марковского процесса в точках планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p . Но все же эти формулы будут намного проще, чем формулы (7.24)–(7.27), пригодные для оценивания произвольных процессов по измерениям в точках плана ε_n . Самым главным достоинством получаемых ниже формул является исключение необходимости хранения в памяти компьютера матриц F_i и K_n^{-1} , возрастающих в процессе итераций.

Для вывода формул вычисления величин α_{i+1} , z_{i+1}^* , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$ и вектора \mathbf{f}_{i+1}^* в точках плана общего вида ε_n необходимо предварительно получить формулы рекуррентного обращения ковариационной матрицы измерений КМ-процесса в точках ε_n .

Пользуясь результатами теорем 4.2 и 4.4 можно получить формулы вычисления матрицы K_{i+1}^{-1} по известным: – матрице K_i^{-1} , – вектору \mathbf{k}_{i+1} и скалярной величине $\mathbf{k}_{i+1,i+1}$.

В виду громоздкости выкладок, сопутствующих получению таких формул, весь этот материал вынесен в приложение 4. В приложении 4 также приведена процедура рекуррентного обращения ковариационной матрицы измерений КМ-процесса в точках упорядоченных планов вида $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p .

В зависимости от расположения новой точки t_{i+1} по отношению к уже найденным и включенным в план ε_n точкам $\{t_1, t_2, \dots, t_j\}$ формулы вычисления величин α_{i+1} , z_{i+1}^* , $k_{zy}^*(t_{i+1}, t)$ и вектора \mathbf{f}_{i+1}^* будут различными. При этом можно выделить три случая. (Ниже, в отличие от матрицы K_n^1 упорядоченного плана $\varepsilon_n^>$ величины γ_i и α_i , во избежание путаницы, имеют двойную нумерацию (индексацию), соответствующую порядковым номерам точек, с которыми они связаны, т.е.

$$\gamma_{ij} = k_{ij}/k_{ii}; \quad \alpha_{ij} = k_{jj} - \gamma_{ij}^2 k_{ii} = k_{jj} - k_{ij}^2 / k_{ii} \quad (t_j > t_i),$$

где $k_{ij} = k_z(t_i, t_j)$. При этом, если $j = i+1$, то $\gamma_{i,i+1} = \gamma_r$.

1) Если координата новой точки плана t_{i+1} (т.е. расстояние от точки t_{i+1} до 0) больше координат всех предыдущих точек $\{t_1, t_2, \dots, t_j\}$, что можно записать следующим образом:

$$t_{i+1} > t_r = \max_{1 \leq j \leq i} \{t_j\},$$

где r – порядковый номер точки с максимальной координатой в плане ε_i , то вектор,

$$\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1} = (0, \dots, 0, u_r, 0, \dots, 0)^T, \quad (7.38)$$

где
$$u_r = \gamma_{r,i+1} = k_{r,i+1} / k_{rr}. \quad (7.39)$$

Из (7.38) следует, что

$$\alpha_{i+1} = k_{i+1,i+1} - \mathbf{k}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = k_{i+1,i+1} - \gamma_{r,i+1}^2 k_{rr} = \alpha_{r,i+1}. \quad (7.40)$$

При $r = i$ величина

$$\alpha_{r,i+1} = \alpha_{i,i+1} = k_{i+1,i+1} - \gamma_{i,i+1}^2 k_{ii} = k_{i+1,i+1} - \gamma_i^2 k_{ii} = \alpha_{i+1},$$

т.е. совпадает с величиной α_{i+1} в (7.37).

2) Если координата новой точки плана t_{i+1} меньше координат всех предыдущих точек $\{t_1, t_2, \dots, t_l\}$, что можно записать следующим образом:

$$t_{i+1} < t_l = \min_{1 \leq j \leq l} \{t_j\},$$

где l — порядковый номер точки с минимальной координатой в плане ε_r , то вектор

$$\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1} = (0, \dots, 0, u_l, 0, \dots, 0)^T, \quad (7.41)$$

где
$$u_l = \gamma_{i+1,l} \frac{k_{i+1,i+1}}{k_{ll}} = \frac{k_{i+1,l}}{k_{ll}} = \gamma_{i,i+1}. \quad (7.42)$$

При этом величина

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1,l} \frac{k_{i+1,i+1}}{k_{ll}} = k_{i+1,i+1} - \frac{k_{i+1,l}^2}{k_{ll}} = \alpha_{l,i+1}, \quad (t_l > t_{i+1}). \quad (7.43)$$

3) Если новая точка плана t_{i+1} лежит между предыдущими точками плана, т.е. $t_l > t_{i+1} > t_r$, где $t_l = \min_{1 \leq j \leq l} \{t_j \mid t_j > t_{i+1}\}$ и $t_r = \max_{1 \leq j \leq i} \{t_j \mid t_j < t_{i+1}\}$, то вектор,

$$\mathbf{u}_{i+1} = (0, \dots, 0, u_l, 0, \dots, 0, u_r, 0, \dots, 0)^T, \quad (7.44)$$

где
$$u_l = \gamma_{i+1,l} \frac{\alpha_{r,i+1}}{\alpha_{rl}} = \frac{k_{i+1,l}}{k_{i+1,i+1}} \cdot \frac{(k_{rr} k_{i+1,i+1} - k_{r,i+1}^2)}{(k_{rr} k_{ll} - k_{rl}^2)},$$

$$u_r = \gamma_{r,i+1} \frac{\alpha_{i+1,l}}{\alpha_{rl}} = \frac{k_{r,i+1}}{k_{i+1,i+1}} \cdot \frac{(k_{ll} k_{i+1,i+1} - k_{i+1,l}^2)}{(k_{rr} k_{ll} - k_{rl}^2)}.$$

При этом величина

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{a_{r,i+1} \alpha_{i+1,l}}{\alpha_{rl}} = \frac{(k_{i+1,i+1} - \gamma_{r,i+1}^2 k_{rr})(k_{ll} - \gamma_{i+1,l}^2 k_{i+1,i+1})}{k_{ll} - \gamma_{r,i+1}^2 \gamma_{i+1,l}^2 k_{rr}} = \\ &= \frac{k_{rr} k_{i+1,i+1} (k_{i+1,i+1} - k_{r,i+1}^2 / k_{rr})(k_{ll} - k_{i+1,l}^2 / k_{i+1,i+1})}{k_{rr} k_{i+1,i+1}^2 k_{ll} - k_{r,i+1}^2 k_{i+1,l}^2}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Из формул (7.38)–(7.45) видно, что для КМ-процесса нет необходимости на каждом i -м шаге вычислять все элементы вектора \mathbf{k}_{i+1} ($i = 1, n-1$). Достаточно знать, в первом случае, элемент $k_{r,i+1}$, во втором случае, $k_{i+1,i}$ и, в третьем случае, элементы $k_{r,i+1}$ и $k_{i+1,l}$ этого вектора.

С учетом (7.38)–(7.45) формулы (7.24)–(7.26) в зависимости от взаимного расположения точки t_{i+1} и точек $\{t_1, t_2, \dots, t_i\}$ принимают следующий вид.

1) Точка $t_{i+1} > t_i$:

$$\left. \begin{aligned} k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= \left(k_{zy}(t_{i+1}, t) - \mathbf{k}_{zy}^T(\varepsilon_i, t) \mathbf{u}_{i+1} \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \\ &= \left(k_{zy}(t_{i+1}, t) - k_{zy}(t_r, t) u_r \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ z_{i+1}^* &= \left(z_{i+1} - \mathbf{z}_i^T \mathbf{u}_{i+1} \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \left(z_{i+1} - z_r u_r \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= \left(\mathbf{f}_{i+1} - F_i \mathbf{u}_{i+1} \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} = \left(\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_r u_r \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

где u_r и α_{i+1} определены ранее в (7.39) и (7.40).

2) Точка $t_{i+1} < t_i$:

$$\left. \begin{aligned} k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= \left(k_{zy}(t_{i+1}, t) - k_{zy}(t_l, t) u_l \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ z_{i+1}^* &= \left(z_{i+1} - z_l u_l \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= \left(\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_l u_l \right) / \sqrt{\alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.47)$$

где u_l и α_{i+1} определены ранее в (7.42) и (7.43).

3) Точка $t_i > t_{i+1} > t_r$:

$$\left. \begin{aligned} k_{zy}^*(t_{i+1}, t) &= \left\{ k_{zy}(t_{i+1}, t) - [k_{zy}(t_l, t) u_l + k_{zy}(t_r, t) u_r] \right\} / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ z_{i+1}^* &= \left\{ z_{i+1} - [z_l u_l + z_r u_r] \right\} / \sqrt{\alpha_{i+1}} \\ \mathbf{f}_{i+1}^* &= \left\{ \mathbf{f}_{i+1} - [\mathbf{f}_l u_l + \mathbf{f}_r u_r] \right\} / \sqrt{\alpha_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

где u_r , u_l и α_{i+1} определены ранее в (7.44) и (7.45).

Используя формулы (7.38)–(7.48) можно легко вычислять с помощью выражений (7.21)–(7.23) и (7.30) ОМНК-оценки процессов $Y(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ и вектора параметров \mathbf{V} для планов общего вида ε_n . С точки зрения ПЭ более важно то, что формулы (7.38)–(7.48) дают возможность легко корректировать матрицу D_i и дисперсии ошибок предсказания $\sigma_{\Delta y}^2(t | \varepsilon_i)$, $\sigma_{\Delta \xi}^2(t | \varepsilon_i)$, $\sigma_{\Delta \eta}^2(t | \varepsilon_i)$ при включении в план ε_i новой точки, независимо от расположения новой точки по отношению к точкам плана ε_i . Это дает возможность при построении планов для КМ-процессов, удовлетворяющих критериям (7.12)–(7.15), использовать стандартные

численные процедуры, подобные рассмотренным выше. Но трудоемкость синтеза планов при этом резко снизится вследствие простоты рекуррентных формул ОМНК-оценивания для КМ-процессов.

Формулы (7.38)–(7.48) можно обобщить на случай скалярных m -связных и векторных КМ-процессов. Для предсказания с вероятностью 1 значения m -связного КМ-процесса в текущий момент времени t_i надо знать его значения в m предыдущих t_{i-m}, \dots, t_{i-1} или в m последующих t_{i+1}, \dots, t_{i+m} моментах времени. Поэтому, формулы, аналогичные (7.38)–(7.48), для многосвязных КМ-процессов должны учитывать связь измерения в точке t_{i+1} с измерениями в m предыдущих и m последующих точках плана ε_i (а не только в предыдущей и последующей точке как для простого КМ-процесса). Здесь под m предыдущими точками плана ε_i понимаются такие его m точек, координаты которых меньше t_{i+1} , но больше координат всех остальных точек плана. Соответствующим образом определяются последующие по отношению к t_{i+1} m точек плана ε_i .

Для односвязных векторных процессов формулы (7.38)–(7.48) можно применить практически без изменений, если считать, что скалярные величины $\alpha_{i+1}, k_{ij}, \gamma_{ij}, k_{zy}(t, t)$ и т.д. представляют собой подматрицы размера $m \times m$, векторы $\mathbf{k}_{i+1}, \mathbf{k}_{zy}(t | \varepsilon_i)$ и т.д. представляют собой матрицы ($i \times m$). Подробнее об этом см. в главе 6.

В заключение этого раздела рассмотрим особенности построения ОМНК-оценок по измерениям в точках неупорядоченного плана ε_n . Как правило, в задачах обработки результатов выполненного эксперимента ситуаций с неупорядоченными планами, естественных для задач ПЭ, во многих случаях можно избежать. Действительно, если обработка ведется в реальном масштабе времени и аргумент t есть время, то измерения будут естественным образом упорядочены в порядке возрастания. Если обрабатываются результаты уже выполненного эксперимента, то также проще вначале упорядочить измерения в порядке возрастания координат точек измерений и использовать для получения оценок простые выражения (7.37). Но все же на практике могут встречаться ситуации, когда приходится обрабатывать неупорядоченные измерения. Например, это может иметь место, когда аргумент t не время, а, скажем, пространственная координата и обработка ведется в реальном масштабе времени.

При этом в памяти компьютера, в отличие от случая измерений в точках упорядоченных планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p , необходимо сохранять:

- 1) все предыдущие координаты точек измерений $\{t_1, t_2, \dots, t_i\}$, т.е. план ε_i ;
- 2) все предыдущие значения вектора измерений $\mathbf{z}_i = \{z_1, z_2, \dots, z_i\}$ (в случае упорядоченных планов $\varepsilon_n^>$ и ε_n^p достаточно хранения только предыдущих значений t_i и z_i).

При практическом использовании формул (7.46)–(7.48) возможны две экспериментальные ситуации:

– известны функции $k_{zy}(s, t)$, $k(s, t)$, $\mathbf{f}(t)$ и, следовательно, необходимые значения величин $k_{zy}(t_i, t)$, $k_{ij} = k(t_i, t_j)$ и вектора $\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{f}(t_i)$ могут быть вычислены для любого момента времени t и в любых точках $t_i, t_j \in T$ ($i, j = \overline{1, n}$);

– заданы не сами функции $k_{zy}(s, t)$, $k(s, t)$, $\mathbf{f}(t)$, а их значения в точках ε_n . В этом случае, в памяти компьютера необходимо, кроме плана ε_n и вектора \mathbf{z}_n , хранить также n -мерный вектор $\mathbf{k}_{zy}(\varepsilon_n, t)$, $(n-1)$ -мерный вектор $\mathbf{k}_{n,n+1} = (k_{12}, k_{23}, \dots, k_{n-1,n})^T$ – ковариаций измерений $Z(t)$ в точках t_i с измерениями в точках t_{i+1} ($i = \overline{1, n-1}$) или $(n-1)$ -мерный вектор коэффициентов $\{\gamma_i, (i = \overline{1, n-1})\}$; n -мерный вектор $\mathbf{k}_{nn} = (k_{11}, k_{22}, \dots, k_{nn})^T$ – дисперсий $Z(t)$ в точках ε_i и матрицу F_n .

Чтобы исключить повторные вычисления можно и в первой экспериментальной ситуации сохранять в памяти найденные ранее значения $k_{zy}(t_i, t)$, k_{ij} , \mathbf{f}_j ($j = \overline{1, i}$). В этом случае достигается известный компромисс между требуемыми объемами вычислений и памяти.

Выводы по главе

1. Сформулирована задача планирования эксперимента (ПЭ) при фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов. Аналитическое решение такой задачи весьма сложно. Поэтому на практике задачи ПЭ при оценивании случайных процессов решаются, как правило, с помощью численных процедур, мало зависящих от вида модели случайного процесса, размерности его аргумента и конфигурации области планирования.

К сожалению, эффективность численных процедур планирования быстро падает с увеличением размерности задачи. При этом наиболее значительный вклад в усложнение процедур вносит необходимость вычисления (корректировки) на каждом шаге алгоритма матрицы, обратной ковариационной матрице измерений процесса в точках синтезируемого плана.

2. Проанализированы известные численные процедуры построения оптимальных планов. Результаты анализа показывают, что все множество численных процедур планирования можно свести к двум базовым процедурам – численной процедуре построения последовательных планов эксперимента (последовательная процедура планирования) и численной процедуре построения планов с заданным числом точек (процедура построения точных планов). Обе процедуры требуют задания начального

плана эксперимента с числом точек не меньшим числа оцениваемых параметров. Выбор точек начального плана влияет на оптимальность конечного (синтезированного) плана.

3. Численные методы построения планов являются итерационными и опираются на рекуррентными процедуры вычисления соответствующих оценок и их дисперсий. Показано, что их можно легко модифицировать таким образом, чтобы они учитывали разреженность обратной ковариационной матрицы измерений КМ-процесса в точках синтезируемого плана. При этом для КМ-процессов резко сокращаются размерности векторов и матриц, входящих в процедуры планирования, и становится реальным построение планов с большим числом точек.

4. Получены рекуррентные формулы ОМНК-оценивания для простых (односвязных) КМ-процессов в точках плана общего вида, составляющие основу процедур планирования. Эти формулы зависят от положения вновь вводимой в план точки по отношению к точкам, уже включенным в план. В зависимости от трех возможных положений новой точки по отношению к имеющимся в плане, найдены три модификации рекуррентных формул оценивания.

8. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Приведенные в книге теоретические результаты имеют достаточно общий характер и могут быть использованы для повышения эффективности решения широкого круга задач статистики случайных процессов, имеющих дело с ковариационной матрицей измерений процесса или обратной к ней матрицей. Поэтому основной целью этой главы является описание ряда прикладных задач (Лазерная доплеровская анемометрия, автоматизация процесса записи-восстановления голограмм, хроматографический анализ веществ), в которых применение результатов работы может повысить эффективность и упростить их решение.

8.1. Лазерная доплеровская анемометрия

Лазерная доплеровская анемометрия (ЛДА) – направление современной прикладной оптики, связанное с разработкой когерентно-оптических методов измерения скорости движения жидкостей, газов и твердых тел. Эти методы основаны на регистрации доплеровского сдвига частоты в свете, рассеянном исследуемой средой [124–126, 128–130, 195]. В литературе лазерные доплеровские анемометры часто еще называют лазерными доплеровскими измерителями скорости (ЛДИС), мы ниже будем использовать термин – лазерные доплеровские анемометры (ЛДА). Информативные сигналы ЛДА являются результатом фотоэлектрического преобразования рассеянного от частиц движущейся среды светового поля и обработки их в первичных преобразователях доплеровского сигнала.

ЛДА являются одним из наиболее общих диагностических средств при измерениях потоков. Перечень достоинств ЛДА [163]:

- невозмущающие измерения – в поток не вводится зонд (щуп), т.е. сохраняются все характеристики потока;
- прямое измерение желаемой компоненты скорости без измерения других компонент;
- высокие динамические пределы – измерение скорости потоков в пределах от микрон/с до сверхзвуковых скоростей;
- высокая разрешающая способность вследствие малости измерительного объема, раскрывает широкие потенциальные возможности ЛДА.

Эти достоинства делают ЛДА идеальным инструментом для измерения скорости (особенно в таких «трудных» областях применения как измерение скорости течения крови, плазмы в клетках, измерения в агрессивных средах, в химических реакторах, измерение скорости потоков радиации и т.д.).

8.2. Принцип действия ЛДА

Рассмотрим упрощенный принцип действия ЛДА на примере двухлучевой дифференциальной системы [123–126, 163].

Измеряемый поток освещается двумя сфокусированными пучками (лучами) равной интенсивности (рис. 8.1). В точке пересечения лучей образуется так называемый измерительный объем (и.о.), имеющий форму эллипсоида (рис. 8.2, а). Каждая частица движущейся среды, проходя через и.о., рассеивает часть падающего света, который попадая на фотозащитный элемент, дает импульс тока. Величина и форма импульса фототока зависит от схемы построения ЛДА, оптических свойств частицы, ее траектории и скорости движения. Частота рассеянного частицей света будет отличаться от частоты падающего света в результате эффекта Доплера и пропорциональна скорости движения частицы.

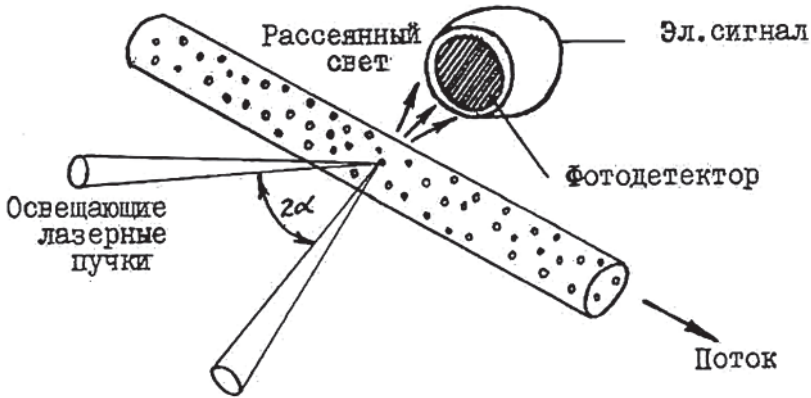


Рис. 8.1. Принцип измерения в ЛДА

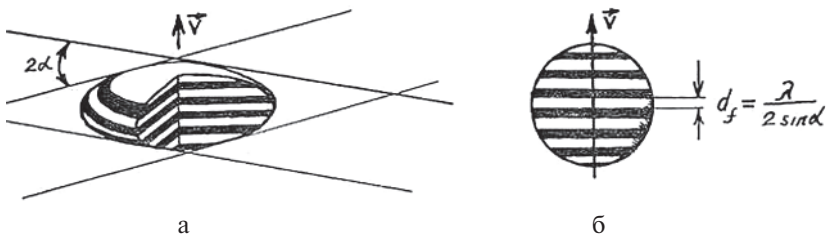


Рис. 8.2. Измерительный объем (а) и его поперечное сечение (интерференционная картина) (б) в точке пересечения освещающих лучей

Связь доплеровской частоты и скорости потока описывается простой формулой

$$f_D = \frac{2v_x}{\lambda} \cdot \sin \alpha; \quad v_x = |V| \cos \varphi, \quad (8.1)$$

где f_D – доплеровская частота; v_x – измеряемая в направлении X компонента скорости; λ – длина волны освещающего света (лазера); α – половина угла между освещающими (зондирующими) пучками; φ – угол между вектором скорости V и направлением X .

Работа дифференциальной системы может быть описана простой интерференционной моделью [126, 163]. Согласно этой модели в и.о. образуется интерференционная картина с периодическим пространственным распределением результирующего поля (рис. 8.2, б). Расстояние между полосами интерференционной картины d_f соответствует разности фаз освещающих лучей. Частица движущейся среды, пересекая и.о. порождает вторичный свет с частотой, пропорциональной частоте интерференционных полос, который далее улавливается фотодетектором.

Характерный вид сигнала от одной частицы на выходе фотодетектора без учета шумов показан на рис. 8.3.

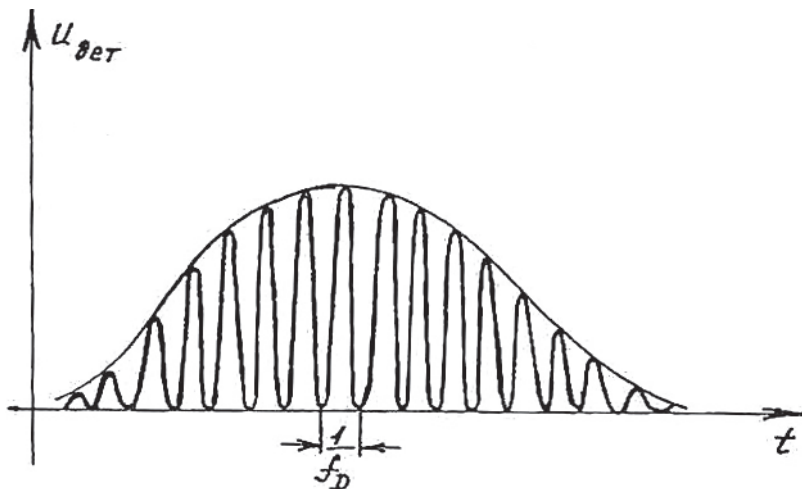


Рис. 8.3. Характерный вид сигнала на выходе фотодетектора

Он обычно называется доплеровским цугом и описывается формулой

$$i(t) = i_0 \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot (1 + \cos(\omega_D t + \varphi)), \quad (8.2)$$

где i_0 – амплитуда импульса; t_0 – момент пролета рассеивающей частицы через центр и.о.; σ – характерная ширина импульса; ω_D – доплеровская частота; φ – фаза, зависящая от разности хода освещающих лучей и t_0 .

8.3. Статистические характеристики и модели полезных сигналов и шумов ЛДА

Выше отмечалось, что доплеровский сигнал представляет собой последовательность цугов со случайными амплитудами и моментами появления (фазами) огибающей. Поэтому задачи анализа сигналов ЛДА во многом подобны задачам, решаемым в статистической теории связи и могут быть исследованы ее методами. Наиболее близкие по постановке задачи рассмотрены в статистической теории лазерной связи [202].

Остановимся вначале на природе шумов ЛДА, которые можно классифицировать следующим образом [124–126, 195]:

- 1) естественный шум, вызванный дискретным (фотонным) характером светового потока и соответствующим дискретным характером фотоэлектронной эмиссии, так называемый «фотонный шум»;
- 2) шумы лазерного излучения, среди которых можно выделить шумы типа «белого шума» и низкочастотные флуктуации;
- 3) помехи, вносимые оптической системой;
- 4) помехи от посторонних источников света (блики, отражения и т.п.);
- 5) шумы фотодетектора (дробовой, темновой и шумы Джонсона);
- 6) шумы электронной аппаратуры;
- 7) шум, вызванный полидисперсностью частиц в потоке (различные размеры, форма и оптические свойства рассеивающих частиц);
- 8) фазовый шум, характерный для многочастичного режима, заключающийся в флуктуации фазы суммарного доплеровского сигнала, вызванный случайным числом и расположением частиц в потоке;
- 9) градиентный шум, характерный для одночастичного режима и заключающийся в наличии градиента скорости в пределах и.о.;
- 10) турбулентность и случайность характеристик среды распространения лазерного излучения и вызванная этим неравномерность периода интерференционной картины в и.о.;
- 11) неравномерность освещенности в пределах и.о.

Шумы 2–6 часто еще называют аппаратными шумами, а шумы 7–11 – шумами среды распространения и рассеяния излучения.

В совокупности все эти шумы вызывают амплитудные (флуктуации огибающей высокочастотной составляющей доплеровского цуга), фазовые и частотные (флуктуации частоты и фазы) искажения формы доплеровского сигнала. В результате этого для многочастичного режима в большинстве случаев зависимость высокочастотной составляющей фототока является узкополосным случайным процессом с гауссовским распределением с разрывами фазы, провалами амплитуды и случайным образом образом модулированным по частоте. В одночастичном режиме фазовый шум отсутствует и сигнал ЛДА является нестационарным колоколообразным гауссовым радиоимпульсом, сопровождаемым мультипликативными дробовыми шумами.

Рассмотрим теперь модели полезных сигналов ЛДА. Вид этих моделей зависит от схемы построения ЛДА, характера движения частиц исследуемой среды (ламинарный, турбулентный), плотности цугов и т.д.

При работе в *одночастичном режиме* (характерном для газообразных движущихся сред) для описания полезного доплеровского сигнала используются следующие выражения [125]:

а) для дифференциальной оптической системы с гауссовыми пучками

$$y(t) = \beta_1 \exp(-\beta_2(t-t_0)^2) [1 + \beta_4 \cos(\beta_3 t + \beta_5)]; \quad (8.3)$$

б) для дифференциальной системы с маской в виде двух прямоугольных отверстий

$$y(t) = \beta_1 \frac{\sin^2 \beta_2(t-t_0)}{\beta_2^2(t-t_0)^2} \cdot [1 + \beta_4 \cos(\beta_3 t + \beta_5)]; \quad (8.4)$$

в) для дифференциальной системы с маской в виде двух круглых отверстий

$$y(t) = \beta_1 \left[\frac{J_1(\beta_2(t-t_0))}{\beta_2(t-t_0)} \right]^2 \cdot [1 + \beta_4 \cos(\beta_3 t + \beta_5)]; \quad (8.5)$$

г) для схемы с сигнальным и опорным гауссовыми пучками

$$y(t) = \beta_1 \exp(-\beta_2(t-t_0)^2) \cos \beta_3 t. \quad (8.6)$$

В (8.3)–(8.6): β_1 – параметр, характеризующий среднюю амплитуду импульсов фототока и зависящий от оптической схемы, мощности лазера, эффективности детектирующей системы, размеров, конфигурации

и оптических свойств рассеивающих частиц; β_2 – параметр, характеризующий ширину доплеровского пика и зависящий от оптической схемы и скорости частиц; t_0 – момент прохождения частицы через центр измерительного объема; β_3 – наиболее важный информационный параметр, соответствующий доплеровской частоте; β_5 – глубина модуляции; β_5 – фазовый сдвиг, зависящий от разности хода освещающих лучей; J_1 – функция Бесселя первого порядка.

Часто используются модели, приведенные к центру измерительного объема ($t_0 = 0$) и $\beta_4 = 1$, $\beta_5 = 0$:

$$\text{а) } y(t) = \beta_1 \exp(-\beta_2 t^2) [1 + \cos(\beta_3 t)]; \quad (8.3a)$$

$$\text{б) } y(t) = \beta_1 \frac{\sin^2 \beta_2 t}{\beta_2^2 t^2} [1 + \cos(\beta_3 t)]; \quad (8.4a)$$

$$\text{в) } y(t) = \beta_1 \left[\frac{J_1(\beta_2 t)}{\beta_2 t} \right]^2 [1 + \cos(\beta_3 t)]; \quad (8.5a)$$

$$\text{г) } y(t) = \beta_1 \exp(-\beta_2 t^2) \cos \beta_3 t. \quad (8.6a)$$

В многочастичном режиме, характерном для жидкостей, пульпы и других плотных сред, сигнал на выходе фотодетектора представляет собой суперпозицию сигналов от отдельных частиц:

$$y(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} y_p(t - t_p), \quad (8.7)$$

где $y_p(t - t_p)$ – фототок от p -й частицы, пересекающей центр измерительного объема в момент времени t_p .

При анализе, учитывая случайный характер формирования, в качестве модели многочастичного доплеровского сигнала выбирают узкополосный случайный процесс

$$y(t) = a(t) \cos \omega_D t + b(t) \sin \omega_D t = I(t) \cos(\omega_D t - \varphi(t)), \quad (8.8)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ – некоррелированные между собой нормальные стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$$k(\tau) = k_a(\tau) = k_b(\tau); \quad I(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)};$$

$$\varphi(t) = \arctg(b(t)/a(t)).$$

Ковариационные функции процессов $a(t)$ и $b(t)$ определяются выражением

$$k(\tau) = \sigma^2 R_w(\tau) = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} W(t)W(t+\tau)dt, \quad (8.9)$$

где $R_w(\tau)$ – ковариационная функция весовой (аппаратной) функции $W(t)$, зависящей от типа оптической системы:

а) для системы с гауссовыми пучками (дифференциальной и с опорным пучком)

$$W(t) = \exp(-\beta t^2), \quad (8.10)$$

б) для дифференциальной системы с прямоугольными отверстиями

$$W(t) = \frac{\sin^2 \beta t}{\beta^2 t^2}, \quad (8.11)$$

в) для дифференциальной системы с круглыми отверстиями

$$W(t) = \left[\frac{J_1(\beta t)}{\beta t} \right]^2. \quad (8.12)$$

Параметр β зависит от скорости пролета частицы и оптической схемы ЛДА.

Параметры β , β_1 , β_2 , β_3 , β_4 , β_5 , входящие в (8.3)–(8.12), даже при отсутствии шумов зависят от многочисленных параметров схемы и поэтому их вычисление аналитическим путем весьма трудно и дает не всегда надежные результаты. Из приведенной выше классификации видно, что сигнал ЛДА есть результат воздействия на полезный сигнал, описываемый моделями (8.3)–(8.12), многочисленных шумов различного происхождения. Это делает во многих случаях единственно возможным путем нахождения параметров β статистические методы, построенные на основе обработки результатов измерений выходного сигнала ЛДА, т.е. использование методов статистической параметрической идентификации.

Перейдем теперь к моделям ковариационных функций полезных сигналов и шумов ЛДА. Анализируя модели ковариационных функций сигналов, рассмотренные в литературе по ЛДА [124–130, 163, 164, 195, 196], можно сделать вывод, что общий вид выражения для ковариационной функции отфильтрованного полезного доплеровского сигнала практически одинаков для всех типов ЛДА и может быть представлен в виде

произведения периодической компоненты с частотой, равной доплеровской частоте и аппаратной ковариационной функции, зависящей от параметров измерительного тракта и характера движения потока [125]:

$$k(\tau) = \sigma^2 R_w(\tau) [1 + m \cdot \cos(\omega_D \tau + \varphi)], \quad (8.13)$$

где σ^2 – дисперсия доплеровского сигнала, зависящая от среднего числа частиц, пересекающих измерительный объем, размеров, конфигурации и оптических свойств частиц, оптической схемы ЛДА, мощности лазера и эффективности детектирующей системы; ω_D – доплеровская частота; τ – интервал времени; φ – фазовый сдвиг доплеровской частоты; m – коэффициент, определяемый оптической схемой (глубина модуляции);

$$R_w(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t)W(t+\tau)dt \quad (8.14)$$

– ковариационная функция весовой функции $W(t)$.

В зависимости от типа оптической системы функция $R_w(\tau)$ для ламинарных потоков описывается выражениями:

1) для системы с гауссовыми пучками при измерении однородных ламинарных потоков

$$R_w(\tau) = \exp(-\beta\tau^2), \quad (8.15)$$

где β – параметр, характеризующий степень затухания экспоненты (ширину пика) и определяемый величиной угла между зондирующими пучками и радиусом лазерного пучка;

2) для системы с прямоугольной маской при однородном ламинарном потоке

$$R_w(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{(2\beta_2\tau)^2} \cdot \left(1 - \frac{\sin 2\beta_2\tau}{2\beta_2\tau}\right), & \tau > 0. \\ \delta(t), & \tau = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Для турбулентных потоков выражения (8.13)–(8.16) усложняются, т.к. параметры σ^2 , β , β_1 , β_2 сами становятся случайными процессами, ковариационные функции которых зависят от функции корреляции мгновенных смещений (флуктуаций) частицы.

Ковариационные функции, получаемые с помощью фотонных корреляторов, описываются несколько другими выражениями [125, 126, 196]:

а) ламинарный поток и оптическая схема с гауссовыми пучками:

$$k_\Phi(\tau) = \beta_1 \exp(-\beta_2\tau^2) \cdot [1 + \beta_5 \cos \beta_3\tau]; \quad (8.17)$$

б) слаботурбулентный поток и гауссовы пучки:

$$k_{\Phi}(\tau) = \beta_1 \exp(-\beta_2 \tau^2) \cdot [1 + \beta_5 \exp(-\beta_4 \tau^2) \cos_3 \tau]; \quad (8.18)$$

в) ламинарный поток и оптическая схема с прямоугольной маской

$$k_{\Phi}(\tau) = \beta_1 \frac{\left(1 - \frac{\sin 2\beta_2 \tau}{2\beta_2 \tau}\right)}{(2\beta_2 \tau)^2} \cdot [1 + \beta_5 \cos_3 \tau]; \quad (8.19)$$

г) слаботурбулентный поток и схема с прямоугольной маской

$$k_{\Phi}(\tau) = \beta_1 \frac{\left(1 - \frac{\sin 2\beta_2 \tau}{2\beta_2 \tau}\right)}{(2\beta_2 \tau)^2} \cdot [1 + \beta_5 \exp(-\beta_4 \tau^2) \cos_3 \tau]. \quad (8.20)$$

В (8.17)–(8.20) параметры $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ имеют следующий физический смысл: β_1 – дисперсия; β_2 и β_4 – параметры, характеризующие ширину пика, вызванную, соответственно, аппаратными и турбулентными причинами; β_3 – доплеровская частота; β_5 – глубина модуляции.

Приведем теперь примеры ковариационных функций для некоторых шумов ЛДА [125, 126].

Ковариационная функция фазового шума для систем с гауссовыми пучками может быть описана выражением

$$k_{\Phi.N.}(\tau) = \beta_1 \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot \ln\{1 - \exp(-\beta_1 \tau^2)\}, & \tau > 0, \\ \delta(\tau), & \tau = 0, \end{cases} \quad (8.21)$$

где параметр β_1 зависит от ширины полосы доплеровского сигнала. Функция (8.21) может быть интерпретирована как ковариационная функция процесса с бесконечной дисперсией.

Для систем с масками аналитическое решение отсутствует и в качестве модели фазового шума используют белый шум. Функцию (8.21) часто используют также в качестве модели ковариационной функции суммарных гауссовых помех ЛДА.

Градиентный шум при ламинарном потоке имеет ковариационную функцию экспоненциального вида:

$$k_{g.n.}(\tau) = \beta_1 \exp(-\beta_2 |\tau|), \quad (8.22)$$

где β_1 – дисперсия скоростей частиц; β_2 – интенсивность пуассоновского потока (частота попадания частиц в и.о. описывается пуассоновским законом).

Параметры σ^2 , β_1 , ..., входящие в выражения (8.13)–(8.22) зависят от очень большого числа детерминированных и случайных факторов, поэтому аналитическое их вычисление связано с большими трудностями и не всегда возможно. Как известно, одной из трудноформализуемых задач при идентификации объектов и процессов является выявление структуры модели. В данном случае структура модели известна из теоретических исследований и использование методов параметрической идентификации на основе данных эксперимента может оказаться весьма эффективным.

С точки зрения параметрической идентификации модели полезного сигнала (8.3)–(8.6) и ковариационных функций (8.13)–(8.15), (8.17)–(8.20) могут быть описаны одним общим выражением (для моделей ковариационных функций y надо заменить на k и t на τ)

$$y(t) = \beta_1 W_2(\beta_2, t) \left[1 + \beta_5 W_2(\beta_4, t) \cos(\beta_3 t + \beta_6) \right], \quad (8.23)$$

где вид функций $W_1(\beta_2, t)$ и $W_2(\beta_4, t)$ определяется особенностями схемы ЛДА и характером движения исследуемой среды.

В заключение этого раздела надо отметить следующее. Приведенные модели полезного сигнала и ковариационных функций имеют смысл только тогда, когда используется фотон-корреляционная или прямая компьютерная обработка доплеровского сигнала, т.е. обрабатывается сигнал с фотодетектора (после аналого-цифрового преобразования). В случае, когда сигнал предварительно обрабатывается в спецпроцессорах (типа счетчиков или систем слежения за частотой) теряются особенности формы доплеровского сигнала. На выходе указанных спецпроцессоров мы получаем только отсчеты средней частоты цуга, а вся остальная информация о форме и других параметрах доплеровского сигнала теряется. Ковариационные функции и другие статистические характеристики, вычисляемые по сигналам на выходе спецпроцессоров уже будут представлять собой статистические характеристики непосредственно исследуемой среды и характера ее движения. Естественно, при этом они будут зависеть от типа исследуемой среды (пульпа, жидкость, газ, плазма), характера поля скоростей и изучаются в соответствующих отраслях наук (гидродинамике, физике плазмы и т.д.). В целом можно отметить, что методы вторичной обработки доплеровского сигнала после спецпроцессоров мало зависят от рассмотренной статистической структуры сигнала и особенностей построения схемы ЛДА, а определяются непосредственно статистическими характеристиками анализируемого потока.

8.4. Марковская аппроксимация сигналов ЛДА

Функции (8.13)–(8.23), используемые в качестве моделей ковариационных функций полезных сигналов и шумов ЛДА, за исключением функции (8.22), не удовлетворяют условиям (2.12) и (2.19) для простых и m -связных КМ-процессов. Таким образом, случайные процессы, ковариационные функции которых описываются выражениями (8.13)–(8.21), (8.21), не являются КМ-процессами. Ковариационные матрицы наблюдений таких процессов при обращении не приводят к ленточным матрицам, и поэтому все трудности, присущие процедуре вычисления оптимальных ОМНК-оценок (НЛНО), будут иметь место при обработке сигналов ЛДА.

Здесь можно предложить замену НЛНО параметров идентифицируемой модели ОМНК-оценками с весовой матрицей, в качестве которой используется ковариационная матрица наблюдений m -связного КМ-процесса, соответствующего (сопряженного) данному процессу (см. главу 5). В главе 5 были проанализированы результаты большого количества численных экспериментов такой замены для различных линейно-параметризованных моделей математического ожидания и ковариационных функций широко распространенных немарковских процессов (часть из которых совпадает с функциями (8.13)–(8.23)). При этом параметры ковариационных функций варьировались в широких пределах, позволяющих охватить большой диапазон реальных ситуаций, а величина связности m аппроксимирующего КМ-процесса изменялась в пределах от 0 до 5. Результаты этих экспериментов позволяют дать следующие рекомендации по использованию ОМНК-оценок в задачах исследования сигналов ЛДА.

1. Если интервал корреляции мал или интервал съема данных больше интервала корреляции (слабокоррелированные наблюдения), использование оптимальных ОМНК-оценок дает незначительный выигрыш по сравнению с обычными МНК-оценками. В этом случае целесообразно отказаться от оптимальных ОМНК-оценок в пользу более простых в вычислительном отношении МНК-оценок, даже при известных корреляционных свойствах сигнала.

2. При сильнокоррелированных наблюдениях, особенно в случаях, когда ковариационная функция содержит периодическую составляющую, что имеет место для сигналов ЛДА, использование оптимальных ОМНК-оценок дает существенный выигрыш в точности получаемых оценок (в некоторых случаях величина определителя дисперсионной матрицы НЛНО меньше величины определителя дисперсионной матрицы МНК-оценок в десятки и сотни раз).

Таким образом, при обработке сильнокоррелированных измерений ламинарных и слаботурбулентных потоков, оцениваемые характеристики которых описываются полиномиальными моделями, можно рекомендовать использование в качестве оценок неизвестных параметров ОМНК-оценки с ленточной весовой матрицей. В качестве весовой при этом используется матрица, обратная ковариационной матрице наблюдений КМ-процесса, сопряженного с наблюдаемым (немарковским) процессом. Это дает возможность повысить точность оценивания (по сравнению с МНК) при небольшом повышении трудоемкости вычислений.

Кроме экспериментов с теоретическими ковариационными функциями была промоделирована также ситуация с выборочной ковариационной функцией шумов измерительного тракта лазерной доплеровской установки, созданной на кафедре «Физика-1» МЭИ. Выборочная ковариационная функция была получена путем обработки данных, представляющих собой отсчеты (с равномерной дискретизацией) выходного сигнала установки, находящейся в режиме калибровки. В результате обработки была получена выборочная ковариационная функция шумов ЛДА следующего вида (см. ниже рис. 8.4) [203]:

$$k(\tau) = \sum_{i=1}^2 \hat{\alpha}_{3i-2} \exp(-\hat{\alpha}_{3i-1} |\tau|) \cos \hat{\alpha}_{3i} \tau, \quad (8.24)$$

где $\hat{\alpha}_1 = 254,2$; $\hat{\alpha}_2 = 0,0076$;

$$\hat{\alpha}_3 = 0,203; \quad \hat{\alpha}_4 = 224,5; \quad \hat{\alpha}_5 = 0,036; \quad \hat{\alpha}_6 = 0,59.$$

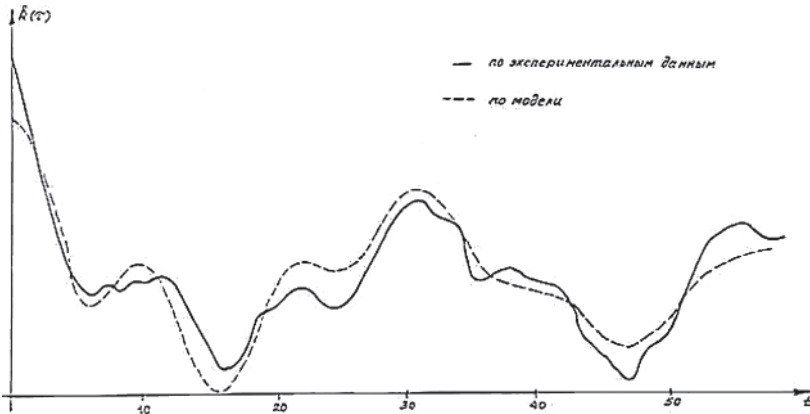


Рис. 8.4. Оценки ковариационной функции шумов ЛДА

Проведенные численные эксперименты с ковариационной функцией (8.24) показали, что аппроксимация (в принятом в гл. 5 смысле) ковариационной матрицы значений (8.24) матрицей вида K_n^m при значениях $m \geq 3$ мало влияет на величину элементов дисперсионной матрицы оценок. Это позволяет использовать матрицу K_n^{-m} в качестве весовой матрицы ОМНК-оценок при решении задач параметрической идентификации и фильтрации сигналов ЛДА. При этом все вышеприведенные рекомендации остаются в силе

8.5. Разработка АСНИ голографических экспериментов

Автоматизированные системы научных исследований (АСНИ) наиболее эффективны в таких областях применений, которые имеют дело с большими объемами информации. К ним относятся, например, физика высоких энергий, астрономия, экологические исследования, биология и медицина, натурные и стендовые испытания сложных технических объектов и т.д. Большие объемы информации приходится перерабатывать также при проведении голографических экспериментов как на физических установках, так и при моделировании на ЭВМ. Объем таких исследований год от года растет в связи с широким использованием голографических методов в различных технических приложениях (см., например, [197, 1981]). Поэтому вопросы создания АСНИ голографических экспериментов (ГЭ) в настоящее время являются весьма актуальными.

Цели создания АСНИ ГЭ состоят в:

- повышении качества, сокращении сроков и трудоемкости работки;
- разработке системы синтеза голограмм и компьютерного моделирования голографических процессов;
- повышении эффективности исследований в области систем обработки изображений путем использования методов анализа и планирования эксперимента на случайных полях.

Рассмотрим голографические эксперименты по выбору оптимальных параметров схемы записи/восстановления (далее просто схемы записи) голограмм на ФТПН-фототермопластический носитель [135].

Упрощенная схема экспериментальной установки по оптимизации параметров схемы записи приведена на рис. 8.5. Основу экспериментальной установки составляет оптическая схема формирования, фокусирования в нужную точку и управления лазерным лучом, в которую входят объективы, зеркала, прерыватели пучков (затворы), светоделители, светофильтры, диафрагмы и т.д. Кроме оптической

схемы, в состав экспериментальной установки входят устройства позиционирования исходного изображения, зарядки и проявления термочувствительного слоя ФТПН, датчики обратной связи и др.

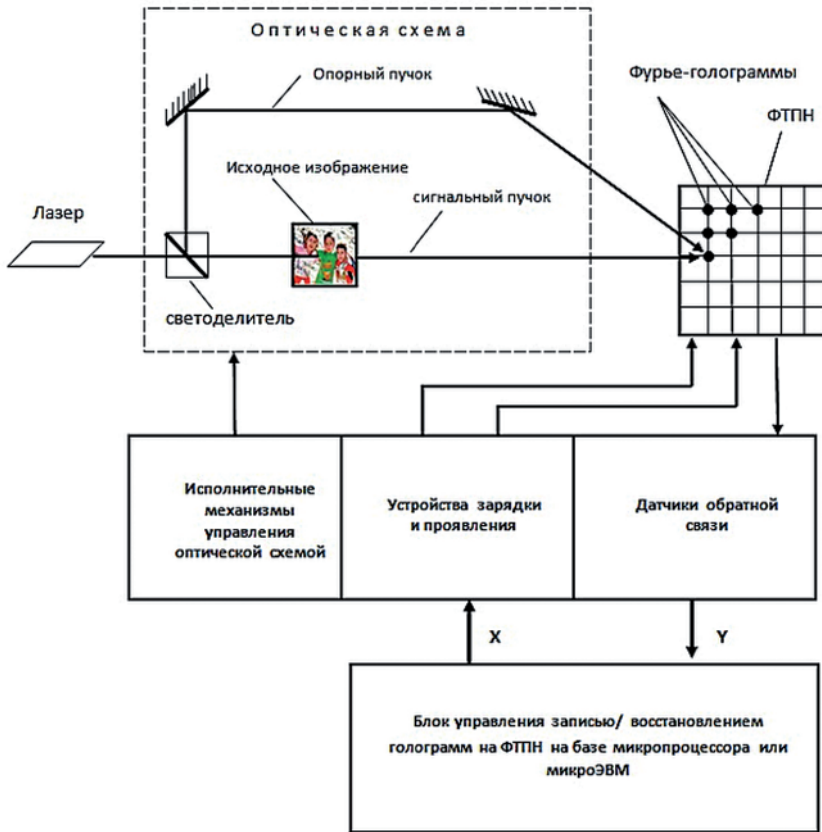


Рис. 8.5. Схема управления процессом записи/восстановления голограмм на ФТПН

В зависимости от поставленной задачи и условий проведения эксперимента оптическая схема установки может быть самой различной [197, 198], но общий принцип записи голограмм на ФТПН при этом сохраняется. Луч лазера с помощью светоделивателя расщепляется на два пучка – объектный (сигнальный) и опорный. Сигнальный пучок, проходя через исходное изображение, модулируется и фокусируется

на ФТПН. На то же место фокусируется и опорный пучок. Интерференционная картина опорного и сигнального пучков фокусируется на ФТПН в виде Фурье-голограммы.

Качество записанной голограммы зависит от многих параметров схемы, основными из которых являются отношение интенсивностей сигнального и опорного пучков, потенциал и длительность зарядки чувствительного слоя ФТПН в поле коронного разряда, длительность и интенсивность экспонирования ФТПН лазерным лучом (энергия экспонирования), длительность и интенсивность нагрева (энергия нагрева). Оценить качество записанной голограммы можно с помощью таких параметров восстановленного изображения как дифракционная эффективность, отношение сигнал/шум, контраст изображения.

Таким образом, задача оптимизации схемы записи сводится к следующему – изменяя параметры схемы, влияющие на качество записи голограммы добиться максимального качества восстановленного с ФТПН изображения. Анализ показывает, что теоретически решить эту задачу очень сложно, так как трудно построить полную математическую модель зависимости выходных параметров схемы от входных. В то же время постановка этой задачи полностью совпадает с классической постановкой задачи планирования экстремальных экспериментов, в которой в качестве управляемых факторов используются параметры схемы X , влияющие на качество записи голограмм, а в качестве параметров оптимизации – параметры Y , характеризующие качество голограммы. При этом оптимальные параметры схемы определяются экспериментальным путем и знание математической модели процесса не требуется. Методы и алгоритмы решения такой задачи подробно рассмотрены в литературе по планированию эксперимента (см., например, [99–102]).

Второй задачей, решаемой АСНИ ГЭ, является повышение эффективности исследований в области систем обработки изображений.

Известно [190], что математически задача обработки зашумленных изображений может быть записана в терминах случайных полей (или «детерминированного» поля со случайными параметрами):

$$Z(x) = H[Y(x, \mathbf{B})] + V(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.25)$$

где $Z(x)$ – наблюдаемое поле (например, интенсивность зашумленного изображения в области Ω); x – вектор координат поля; $Y(x, \mathbf{B})$ – исследуемое поле (т.е. восстанавливаемое изображение); \mathbf{B} – вектор информационных (неизвестных) параметров поля; $H[\cdot]$ – оператор, характеризующий систему регистрации; $V(x)$ – шум (в том числе шум, вызванный естественным фоном и зернистостью фотоматериала); Ω – область изображения.

Требуется по наблюдениям поля $Z(x)$ определить возможно более точные по заданному критерию точности значения поля $Y(x, \mathbf{B})$ и параметров \mathbf{B} . Таким образом, задача восстановления изображения сводится к оцениванию поля $Y(x, \mathbf{B})$. Обычно для решения этой задачи используется двухэтапный подход:

1) цифровое восстановление поля $Y(\cdot)$ по заданному критерию точности;

2) оценивание параметров \mathbf{B} .

Первый этап такой обработки обычно называют коррекцией изображающих систем, а второй этап – измерениями на изображениях.

Если искажения регистрирующей системы отсутствуют или компенсированы, то модель (8.25) принимает вид

$$Z(x) = Y(x, \mathbf{B}) + V(x), \quad x \in \Omega, \quad (8.26)$$

При этом задача оценивания поля $Y(\cdot)$ и параметров \mathbf{B} по наблюдениям поля $Z(x)$ сводится к задаче фильтрации поля $Y(\cdot)$ с одновременным оцениванием параметров \mathbf{B} . К задаче обработки изображений в такой постановке применимы алгоритмы обработки и планирования эксперимента, рассмотренные в [145]. В случае, когда размерность вектора x равна 1, можно использовать и алгоритмы, предложенные в настоящей работе.

Как было отмечено в разделе 8.6.1, получение качественных голограмм требует оптимизации схемы записи/восстановления. Оптимизация схемы, в свою очередь, требует серии дорогостоящих натуральных голографических экспериментов, уникального оборудования и большого мастерства от экспериментатора.

В таких случаях с успехом можно использовать моделирование процессов записи/восстановления голограмм на ЭВМ (т.е. методы цифровой голографии) при котором за счет идеализации одних и разумного абстрагирования от других несущественных факторов удается изучить влияние нужного фактора. Голограммы, получаемые с помощью ЭВМ, называются *синтезированными голограммами* [197, 198].

Получение качественных синтезированных голограмм требует оптимизации параметров дискретизации, квантования и кодирования при существующих на них параметрических и функциональных ограничениях. В [157] предложен следующий алгоритм синтеза оптимальных голограмм.

1. Построение математической модели голографируемого объекта, в результате чего получается матрица чисел, представляющих собой распределение комплексных амплитуд (амплитуды и фазы) света в плоскости регистрации голограммы.

2. Вычисление отсчетов Фурье-образа с помощью быстрого преобразования Фурье.
3. Квантование и кодирование отсчетов.
4. Численное восстановление изображения с помощью обратного преобразования Фурье.
5. Визуализация восстановленного изображения (на экране электронно-лучевой трубки, с помощью графопостроителя и т.д.).
6. Если качество восстановленного изображения удовлетворяет требованиям, то переход к п. 8, если нет, то переход к п. 7.
7. Изменение значений оптимизируемых параметров в соответствии с выбранным методом оптимизации и планом эксперимента и переход к п. 2.
8. Получение голографической картины.
9. Оптическое уменьшение голограммы до нужных размеров.

8.6. Экспериментальное определение параметров хроматографических пиков

Метод хроматографического анализа сложных (смесей) основан на физическом разделении смеси на составляющие компоненты и является одним из наиболее эффективных физико-химических методов разделения и анализа сложных смесей [131–133]. В результате хроматографического анализа мы получаем временную кривую, называемую *хроматограммой* или *спектром*, по которой можно судить о качественном и количественном составе анализируемой смеси.

Хроматограмма представляет собой ряд пиков, каждый из которых принадлежит тому или другому компоненту анализируемой смеси. Пики могут быть различной формы и иметь симметричный или несимметричный вид. Симметричные пики часто описываются гауссовой кривой [131]

$$y(t) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (8.27)$$

где A – параметр, зависящий от количества вещества в пробе и скорости газа-носителя; t_0 – время от момента ввода пробы до появления максимума пика (время удерживания); t – текущее время; σ – среднеквадратичная ширина пика. Заменой переменной $x = (t - t_0)/\sigma$ выражение (8.27) можно привести к виду

$$y(x) = \beta f(x), \quad (8.28)$$

где $f(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot \exp(-x^2/2)$; $\beta = A/\sigma$. Значение β характеризует количество вещества, соответствующего данному пику в анализируемой смеси.

Обработка хроматограммы состоит в измерении и представлении в цифровом виде определенных, так называемых *определяющих*, параметров пиков. При этом весь процесс хроматографического анализа от ввода пробы до получения окончательных результатов можно разбить на три этапа:

- 1) собственно анализ – получение хроматограммы;
- 2) первичная обработка – получение численных значений определяющих параметров пиков;
- 3) вторичная обработка – получение окончательных результатов качественного и количественного анализа смеси.

На протяжении всего канала вход-выход на полезный сигнал хроматографа воздействуют различные случайные факторы. В результате этого выходной сигнал хроматографа представляет собой смесь детерминированного полезного сигнала и некоторого случайного шума, в общем случае имеющего систематическую составляющую. Поэтому, в настоящее время, при анализе хроматограмм все большее применение находят статистические методы.

Если определяющим параметром пика является амплитуда пика β , то полезную составляющую хроматограммы можно описать линейно-параметризованной моделью. Кроме того, предположим, что полезный сигнал и шум образуют аддитивную смесь. При этом выходной сигнал хроматографа можно представить в виде нестационарного случайного процесса вида

$$y(t) = \eta(t) + v(t) = \sum_{i=1}^p \beta_i f_i(t) + v(t), \quad t \in T, \quad (8.29)$$

где $\eta(t)$ – детерминированный сигнал (полезный сигнал хроматографа); $f_i(t)$, ($i = \overline{1, p}$) – заданные функции, конкретный вид которых определяется видом исследуемых хроматографических пиков; t – текущее время; T – время анализа; $v(t)$ – аддитивный шум хроматографа, статистические характеристики которого (в частности, ковариационную функцию) можно определить, исследуя выходной сигнал хроматографа без ввода пробы анализируемого вещества.

Таким образом, задача оценивания высоты пиков β_i , ($i = \overline{1, p}$) по дискретным измерениям $y(t)$ является частным случаем задачи фильтрации, сформулированной в главе 1, при $\xi(t) = 0$. В [145] приведены результаты экспериментов по определению ковариационной функции шума хроматографа. Показано, что в зависимости от типа детекторов (регистрирующих

устройств хроматографа) ковариационные функции шума $v(t)$ описываются функциями вида

$$k(\tau) = \exp(-\alpha_1 |\tau|); \quad (8.30)$$

$$k(\tau) = \exp(-\alpha_1 |\tau|) \cdot \cos \alpha_2 \tau, \quad \tau = s - t, \quad (8.31)$$

где значения параметров α_1, α_2 определяются особенностями схемы.

Функция (8.30) есть ковариационная функция простого КМ-процесса, т.е. сигнал хроматографа в этом случае можно считать КМ-процессом и для его анализа применимы результаты главы 4 работы.

Функция (8.30) является ковариационной функцией первой компоненты двумерного КМ-процесса. В этом случае для обработки сигнала хроматографа с использованием эффективных алгоритмов, найденных в главах 4–6, можно предложить два подхода:

1) если у экспериментатора есть возможность измерять или вычислять производную выходного сигнала, то можно рассматривать выходной сигнал хроматографа и его производную как двумерный КМ-процесс и использовать при его обработке алгоритмы, полученные в главе 6;

2) аппроксимировать ковариационную функцию наблюдений выходного сигнала хроматографа ковариационной матрицей КМ-процесса связностей 1 или 2 и использовать матрицу, обратную к полученной, в качестве весовой матрицы ОМНК. Результаты численных экспериментов, представленные в главе 5, показывают, что для ковариационной функции (8.31) и гауссовых функций $f_i(t)$ уже при связности аппроксимирующего КМ-процесса, равного 2, элементы дисперсионной матрицы

$D[\hat{\beta}_i]_{GLSME}$ ОМНК-оценок параметров β_i практически совпадают с элементами дисперсионной матрицы $D[\hat{\beta}_i]_{BLUE}$ НЛНОценок параметров β_i (GLSME – generalize least-squares method estimate; BLUE – best linear unbiased estimate).

Предлагаемые подходы дают возможность численного синтеза планов с большим числом точек или построения оптимальных плотностей размещения точек измерений в интервале T , что практически невозможно для процессов общего вида (см. [145]). Численные методы планирования эксперимента для процессов (полей) общего вида, когда матрица K_n является полной (неразрезанной), не дают возможности построения планов с большим числом точек, а тем более оптимальных плотностей распределения наблюдений в заданной области.

Рассмотренная здесь задача относится к обработке результатов пассивного хроматографического эксперимента. В настоящее время предложены эффективные алгоритмы применения методов активного эксперимента в хроматографическом анализе, когда подбирается специальная программа (последовательность) ввода анализируемых проб, которая позволяет повысить отношение сигнал/шум и упростить статистическую обработку хроматограмм [109].

Выводы по главе

1. Выработана общая концепция построения персонального автоматизированного рабочего места для лазерной доплеровской диагностики потоков движущихся сред на основе типовых и специализированных технических средств. Составлен набор типовых параметрических моделей полезных сигналов и ковариационных функций полезного сигнала и шумов ЛДА.

2. Показана возможность аппроксимации ковариационной матрицы наблюдений доплеровского сигнала ковариационной матрицей наблюдений КМ-процесса невысокой связности, что позволяет существенно упростить решение задач фильтрации и параметрической идентификации доплеровского сигнала.

3. Разработана структура технического и методически-программного обеспечений АСНИ голографических экспериментов.

4. Показана возможность применения полученных в работе результатов при обработке хроматограмм. При этом шум выходного сигнала хроматографа аппроксимируется КМ-процессом, связность которого зависит от заданной точности получаемых результатов. Применение такой аппроксимации позволяет получить оптимальную плотность размещения измерений в заданном интервале при оценивании высоты хроматографических пиков и тем самым повысить эффективность проведения экспериментальных исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что для марковских процессов, точнее, ковариационно марковских процессов (КМ-процессов), учет особенностей структуры ковариационной матрицы измерений КМ-процесса, позволяет существенно упростить вычисление оценок характеристик процесса, которые встречаются в задачах анализа. Это позволило получить простые формулы ОМНК-оценивания для оптимального решения в рамках корреляционной теории таких важных задач математической статистики случайных процессов, как фильтрация (частным случаем которой являются задачи интерполяции и экстраполяции) и параметрическая идентификация процесса, статистически связанного с наблюдаемым. Особенно простыми получаются рекуррентные алгоритмы ОМНК, что позволяет использовать их в системах, работающих в реальном масштабе времени. Многие теоретические результаты доведены до конкретных алгоритмов и программ.

В книге приведены следующие результаты:

1. Дано определение нового класса случайных процессов — ковариационно марковских процессов (КМ-процессов), в которых условие марковости накладывается на вид ковариационной функции процесса. Класс КМ-процессов в общем случае не совпадает с классом обычных марковских процессов и марковских процессов в широком смысле. Но для нормальных процессов с нулевым средним понятия марковский процесс, марковский процесс в широком смысле и КМ-процесс совпадают. Понятия КМ-процесс и марковский процесс в широком смысле совпадают для процессов с нулевым средним, независимо от вида распределения.

2. Описан и классифицирован ряд одномерных, двумерных и многомерных марковских и ковариационно марковских процессов, широко используемых в практике инженерных исследований в качестве моделей реальных случайных процессов.

3. Найден один из классов квадратных матриц, обращение которых приводит к трехдиагональным матрицам. Получены простые формулы вычисления элементов обратной матрицы через элементы трех центральных диагоналей прямой матрицы. Показано, что подмножество положительно определенных матриц этого класса, представляет собой класс ковариационных матриц измерений (КМИ) одномерных КМ-процессов

для наблюдений, упорядоченных в порядке возрастания (убывания) координат точек измерений.

4. Показано, что ковариационную матрицу неупорядоченных наблюдений одномерного КМ-процесса можно получить путем умножения ковариационной матрицы упорядоченных наблюдений этого же процесса на соответствующую матрицу перестановки. При этом, обратная матрица получается разреженной с числом ненулевых элементов не превышающим $3n - 2$, где n – порядок матрицы (число наблюдений).

Обобщая сказанное в пп. 3 и 4 можно отметить, что КМИ КМ-процесса имеет весьма удобную с точки зрения различных приложений структуру. При этом, если измерения выполняются в точках упорядоченного плана, то матрица, обратная к КМИ, является трехдиагональной, а для неупорядоченных измерений – разреженной.

5. КМИ КМ-процесса полностью определяется небольшим числом $(2n - 1)$ ее элементов. Поэтому для решения многих задач статистики случайных процессов достаточно знания только этих элементов КМИ. Другими словами, задавая классом исследуемых случайных процессов, т.е. априорной информацией качественного характера, мы уменьшаем количество численной информации, необходимой для эффективного решения задачи.

6. Найден класс квадратных матриц, обращение которых приводит к ленточным матрицам с полушириной ленты m и предложен простой рекуррентный алгоритм обращения такого класса матриц, более эффективный по сравнению со стандартными методами обращения матриц. Такие матрицы полностью определяются n диагональными и $2mn - m(m + 1)$ внедиагональными элементами. Показано, что подмножество положительно определенных матриц этого класса можно считать классом ковариационных матриц упорядоченных наблюдений многосвязных КМ-процессов.

7. Предложен новый метод аппроксимации дискретных немарковских процессов m -связными КМ-процессами, который заключается в замене КМИ такого процесса КМИ m -связного КМ-процесса. При связности аппроксимирующего процесса, равного нулю, такая аппроксимация эквивалентна замене наблюдаемого процесса белым шумом с дисперсией, равной дисперсии заменяемого процесса. При связности КМ-процесса равной $n - 1$, КМИ аппроксимирующего процесса совпадает с КМИ наблюдаемого процесса. Таким образом, точность аппроксимации повышается с увеличением связности аппроксимирующего КМ-процесса и при m , равной $n - 1$, становится абсолютно точной. Многочисленные численные эксперименты подтвердили

эффективность применения такой аппроксимации для задач параметрической идентификации случайных процессов с использованием ОМНК-оценок. На практике всегда можно найти такое значение связности аппроксимирующего КМ-процесса, при котором достигается заданный компромисс между точностью получаемых оценок и трудоемкостью их вычисления.

8. Показано, что если ковариационную матрицу векторного КМ-процесса представить в виде блочной матрицы, каждый блок которой есть значение матричной ковариационной функции векторного процесса в заданных точках, то обратная к ней матрица имеет блочно-тредиагональную структуру. Получены формулы вычисления подматриц (блоков) обратной матрицы через подматрицы, нанизанные на три центральные диагонали прямой блочной матрицы. Найден вид матрицы перестановки, с помощью которой ковариационную матрицу наблюдений векторного процесса, разбитую на блоки указанным способом, можно привести к блочной матрице, блоки которой соответствуют ковариационным матрицам наблюдений составляющих векторного процесса.

9. Получены простые рекуррентные формулы вычисления ОМНК-оценок с ленточными весовыми матрицами, применимые для задач фильтрации и идентификации КМ-процессов (для которых они являются оптимальными) и произвольных процессов путем их аппроксимации КМ-процессами соответствующей связности (при этом получаемые оценки будут квазиоптимальными).

10. Проанализированы особенности планирования эксперимента в задачах с КМ-процессами и предложен метод модификации известных численных процедур построения последовательных и точных планов, учитывающий особенности ковариационной матрицы наблюдений КМ-процесса. При этом вычислительная сложность процедур резко снижается относительно процедур общего вида. Это делает возможным синтез планов с большим числом точек и численное построение оптимальных плотностей расположения точек измерений в заданной области. Все сказанное касается и процессов, аппроксимируемых КМ-процессами.

11. Результаты работы могут быть использованы для повышения эффективности решения не только линейных, но и ряда нелинейных задач математической статистики случайных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуб. Дж.Л. Вероятностные процессы. М.: Иност. лит-ра, 1956.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
3. Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.
4. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы (анализ и фильтрация). М.: Наука, 1990.
5. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.
6. Пугачев В.С. Случайные функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Тр. ВВА им. Н.Е.Жуковского, 1944. Т. 118. С. 3-36.
7. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
8. Ламперти Дж. Случайные процессы. Киев: Вища школа, 1983.
9. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1989.
11. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1977.
12. Розанов Ю.А. Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981.
13. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М., 1985.
14. Яглом А.м. Введение в теорию стационарных случайных функций // Успехи матем.наук. 1952. Т. 7. Вып. 5(51). С. 3-168.
15. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л.: Гидрометеоздан, 1981.
16. Казакевич Л.И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. Л.: Гидрометеозда, 1977.
17. Романенко А.Ф., Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М.: Сов. Радио, 1968.
18. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1977.
19. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наук. думка, 1978.
20. Случайные процессы. Справочник. Киев: Наук.думка, 1983.
21. Сарымсаков Т.А. Основы теории процессов Маркова. Ташкент: ФАН, 1988.

-
22. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
 23. Рао С.Р. Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968.
 24. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Иностран. лит-ра, 1948.
 25. Худсон Д. Статистика для физиков. М.: Мир, 1967.
 26. Быков Б.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Сов. радио, 1971.
 27. Хида Т. Броуновское движение. М.: Наука, 1987.
 28. Волгин В.В., Каримов Р.Н. Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления. М.: Энергия, 1979.
 29. Молчан Г.М. Гауссовские случайные поля с марковским свойством. Автореф. дис., канд.ф.-м.наук. М., 1974.
 30. Саванов В.Л. Параметрическая идентификация характеристик случайных полей и процессов // Вопросы кибернетики. Планирование эксперимента и оптимизация в системах управления. М.: Научный совет по проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1981. С. 90-23.
 31. Саванов В.Л. Оптимальное планирование и анализ регрессионных экспериментов по оцениванию параметров нелинейной модели математического ожидания случайного поля // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1980. Вып. 445. С. 25-30.
 32. Молчан Г.М. L-марковские гауссовские поля. ДАН СССР. 1974. Т. 215. № 5. С. 1054-1057.
 33. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио. 1961.
 34. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. 3-издание. М.: Радио и связь. 1989.
 35. Стратонович Р.Л. Применение процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника. 1960. № 11. С. 1751-1763.
 36. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь. 1985.
 37. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио. 1978.
 38. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. радио, 1973.
 39. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио. 1978.
 40. Пугачев В.С., Сеницын И.Н., Шин В.И. Проблемы анализа и условно оптимальной фильтрации в реальном масштабе времени

процессов в нелинейных стохастических системах (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 3-24.

41. Принципы разработки диалоговых пакетов прикладных программ для исследования дискретных стохастических систем / Карпенко А.Н., Маишева Е.Ю., Огнева О.С. и др. Под ред. В.С. Пугачева и И.Н. Сеницына. М.: Институт проблем информатики. АН СССР, 1990.

42. Колмогоров А.Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. сер. мат. 1941. Т. 5. № 1. С. 3-11.

43. Лэннинг Дж. Х., Бэттин Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М.: Иностран. лит-ра, 1958.

44. Виленкин С.Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. М.: Энергия, 1979.

45. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974.

46. Райбман Н.С. Что такое идентификация? М.: Наука, 1970.

47. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. М.: Металлургия, 1968.

48. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976.

49. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

50. Бендат Дж., Пирсол А. Измерений и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974.

51. Бард И. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979.

52. Блейхут Р.Г. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.

53. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.

54. Вучков И., Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1987.

55. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Финансы и статистика, 1986. Кн. 1; 1987. Кн. 2.

56. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз. 1962.

57. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974.

58. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.

-
59. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М.: Физматгиз. 1961.
60. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968.
61. Прикладные математические методы анализа в радиотехнике / Под редакцией Г.В. Обрезкова. М.: Высш. школа, 1985.
62. Поляк И.И. Численные методы анализа наблюдений. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
63. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. М.: Сов. радио, 1971.
64. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.
65. Справочник по прикладной статистике / под ред Э. Ллойда и У. Ледермана. М.: Финансы и статистика, 1989.
66. Сейдж Э., Мэлс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
67. Тихонов А.Н., Уфимцев М.В. Статистическая обработка результатов эксперимента. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
68. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967.
69. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов. М.: Радио и связь. 1989.
70. Крупис Ю.И. Об оценках параметров марковских процессов. Автореф. диссер... канд. ф.-м. наук. М., 1963.
71. Статистические методы для ЭВМ / Под ред. К. Энслейна, Э. Рэстона, Г.С. Уилфа. М.: Наука, 1986.
72. Медведев Г.А., Хацкевич Г.А. О рекуррентных оценках по коррелированным наблюдениям // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 69-75.
73. Медведев Г.А. Рекуррентное оценивание при помощи коррелированных наблюдений // Автоматика и телемеханика. 1974. № 5. С. 110-116.
74. Медведев Г.А. Применение МНК для оценивания параметров случайных процессов и полей по их реализациям // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов. Тез. докл. Всесоюз. конф. М., 1982. Ч. 1. С. 3-5.
75. Хацкевич Г.А. Адаптивный метод наименьших квадратов по реализациям коррелированных случайных полей и процессов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов. Тез. докл. Всесоюз. конф. М., 1982. Ч. 1. С. 6-7.
76. Ярыгина Т.А. Параметрическая идентификация математических ожиданий и корреляционных функций случайных полей // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1982. Вып. 594. С. 53-64.

-
77. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
78. Аведьян Э.Д. Рекуррентный метод наименьших квадратов при коррелированных помехах // Автоматика и телемеханика. 1975. № 5. С. 67-75.
79. Адаптивные фильтры / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта. М.: Мир, 1988.
80. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
81. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. М.: Мир, 1988.
82. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
83. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. М.: Мир, 1977.
84. Сборник научных программ на Фортране. Вып. 1. Руководство для программиста. М.:Статистика, 1974.
85. Сборник научных программ на Фортране. Вып. 2. Матричная алгебра. М.:Статистика, 1974.
86. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.
87. Разреженные матрицы. Библиотека программ / Под ред. Е.С. Николаева. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
88. Круг Г.К., Сосулин Ю.В., Фатуев В.А. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. М.: Наука, 1977.
89. Планирование эксперимента в задачах нелинейного оценивания и распознавания образов / Круг Г.К., Кабанов В.А., Фомин Г.А., Фомина Е.С. М.: Наука. 1981.
90. Круг Г.К., Филаретов Г.Ф. Проблемы автоматизации научных исследований в вузах. М.:НИИВысш. школы, 1983.
91. Круг Г.К., Филаретов Г.Ф. Вузовская система автоматизации научных исследований АСНИ-МЭИ // Тез. докл. VII Всесоюзн. научн. конф. «Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ». Новосибирск, 1981. С. 25-26.
92. Круг Г.К., Голяс Ю.Е., Филаретов Г.Ф. Принципы построения АСНИ МЭИ // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1982. Вып. 539. С. 3-26.
93. Библиотека прикладных программ планирования и анализа экспериментов для исследования случайных полей и процессов / Круг Г.К. и др. // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. II Всесоюзн. конф. М., 1985. С. 96-98.
94. Горский В.Г., Адлер Ю.П. Планирование промышленных экспериментов (модели статики). М.: Металлургия, 1974.
95. Горский В.Г., Адлер Ю.П., Талалай А.М. Планирование промышленных экспериментов (модели динамики). М.: Металлургия, 1978.

-
96. Горский В.Г. Общий метод анализа идентифицируемости моделей случайных процессов // Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». М., 1990. С. 18-19.
97. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971.
98. Математическая теория планирования эксперимента / Под ред. С.М. Ермакова. М.: Наука, 1983.
99. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. Пер. с нем. / Под ред. Э.К. Лецкого. М.: Мир, 1977.
100. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976.
101. Налимов В.В. Теория эксперимента. М.: Наука, 1971.
102. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1966.
103. Успенский А.Б., Федоров В.В. Вычислительные аспекты метода наименьших квадратов при анализе и планировании регрессионных экспериментов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
104. Вошинин А.П. Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во Моск. энерг. ин-та (СССР); Техника (НРБ), 1989.
105. Вошинин А.П. Разработка и внедрение методов оптимизации объектов управления по экспериментально-статистическим моделям: Дис... д-ра техн. наук. М., 1984.
106. Бородюк В.П., Лецкий Э.К. Статистическое описание промышленных объектов. М.: Энергия, 1971.
107. Бородюк В.П. Методология и опыт применения моделей множественной регрессии в задачах идентификации производственных процессов по данным пассивного эксперимента. Дис... д-ра техн. наук. М., 1981.
108. Филаретов Г.Ф. Статистические методы моделирования и анализа стохастических процессов в автоматизированных системах научных исследований. Дис ... д-ра техн. наук. М., 1987.
109. Филаретов Г.Ф., Сайфулин Ж.Т. Корреляционный метод измерения, использующий последовательность с одним совпадением в системах хроматографического анализа // Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях: Тез. докл. IX Всесоюзн. конф. М., 1989. Ч. 1. С. 146-147.
110. Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1987.
111. Козлова Г.А. Численная процедура последовательного планирования при экстраполяции случайных полей // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1980. Вып. 445. С. 21-25.

112. Козлова Г.А., Саванов В.Л. Численные методы построения оптимальных планов эксперимента в задачах экстраполяции и фильтрации случайных полей // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. М., 1985. Ч. 1. С. 179-180.

113. Козлова Г.А., Саванов В.Л. Некоторые вопросы оптимальной интерполяции случайных полей // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1980. Вып. 445. С. 13-20.

114. Левитин А.В., Чемезов О.Н., Чураков Е.П. Об оптимальном планировании наблюдений в задаче обнаружения марковских сигналов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. II Всесоюзн. конф. М., 1985. Ч. 1. С. 28-30.

115. Левитин А.В. Последовательное планирование наблюдений в задаче адаптивной калмановской фильтрации // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. М., 1988. Ч. II. С. 144-145.

116. Чураков Е.П., Фатьянов С.О. О марковском подходе к задаче интерпретации результатов косвенных экспериментов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. М., 1988. Ч. II. С. 38-39.

117. Мелас В.Б. Об итерационном методе поиска оптимальных планов исследования случайных полей // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. II Всесоюзн. конф. М., 1985. С. 39-40.

118. Научно-методическое и математическое обеспечение ПАРМ ЛДА / Бацоро И.Г., Кисенкова Н.А., Круг Г.К. и др. // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. М., 1988. С. 173-174.

119. Саванов В.Л., Ярыгина Т.А. Параметрическое оценивание математических ожиданий и корреляционных функций случайных процессов // Тез. докл. Всесоюзн. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». М., 1981. С. 82-84.

120. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Направления развития математического обеспечения для исследования стохастических систем // Современные средства информатики. М.: Наука, 1986. С. 166-174.

121. Ринкевичюс Б.С., Смирнов В.И. Задачи планирования и метрологии лазерных измерений // Перспективные методы планирования

и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. М., 1988. Ч. 2. С. 190-191.

122. Ринкевичюс Б.С., Смирнов В.И. Потенциальная точность лазерных методов измерения скорости частиц // Измерительная техника. 1989. № 6. С. 23-26.

123. Ринкевичюс Б.С. Лазерная анемометрия. М.: Энергия, 1978.

124. Дубнищев Ю.Н., Ринкевичюс Б.С. Методы лазерной доплеровской анемометрии. М.: Наука, 1982.

125. Дюррани Т.С., Грейтид К.А. Лазерные системы в гидродинамических исследованиях. М.: Энергия, 1980.

126. Коронкевич В.П., Соболев В.С., Дубнищев Ю.Н. Лазерная интерферометрия. Новосибирск: Наука, 1983.

127. Смирнов В.И. Оценки потенциальной точности лазерной доплеровской и время-пролетной анемометрии // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1986. Вып. 106. С. 64-68.

128. Гроздовский Г.Д. Анализ точности измерений ЛДИСА // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1970. С. 5-31.

129. Лазерная анемометрия, дистанционная спектроскопия и интерферометрия / Справочник. Киев: Наук. думка, 1985.

130. Лазерные измерительные системы / Под ред. Д.П. Лукьянова. М.: Радио и связь. 1981.

131. Гуревич А.Л., Русинов А.А., Коломьцев Л.А. Автоматизация обработки хроматографической информации. М.: Энергия. 1973.

132. Кюллик Э.А., Кальюранд М.Р., Коэль М.Н. Применение ЭВМ в газовой хроматографии. М.: Наука. 1978.

133. Семенов В.М. Аппроксимация хроматографических пиков кривой логарифмически нормального распределения // Заводская лаборатория. 1973. № 7. С. 791-792.

134. Бримкулов У.Н. Некоторые численные подходы к рационализации измерительной сети при исследовании случайных полей и процессов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. Всесоюзн. конф. М., 1982. Ч. 1. С. 181-183.

135. Бримкулов У.Н. Вопросы планирования голографического эксперимента по оптимизации схемы записи-восстановления голограмм // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. III Всесоюзн. конф. М., 1988. Ч. II. С. 176-177.

136. Бримкулов У.Н. Особенности применения обобщенного МНК в задачах исследования дифференцируемых стационарных случайных

процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью (ДРСП) // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». М., 1990. Ч. 1. С. 5-6.

137. Бримкулов У.Н. Особенности использования обобщенного МНК для оценивания параметров линейной регрессионной модели одного класса случайных процессов // Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях: Тез. докл. IX Всесоюз. конф. М., 1989. Ч. 1. С. 16-17.

138. Бримкулов У.Н. Планирование эксперимента (ПЭ) в задачах исследования векторных случайных процессов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. II Всесоюз. конф. М., 1985. Ч. 2. С. 8-10.

139. Бримкулов У.Н. Особенности использования обобщенного метода наименьших квадратов в задачах идентификации марковских случайных процессов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 1. С. 69-78.

140. Бримкулов У.Н. К вопросу о планировании эксперимента (ПЭ) в задачах исследования векторных случайных процессов (объектов) // Тез. докл. II Всесоюз. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». М., 1984.

141. Бримкулов У.Н., Аккозов А.Д. Численная процедура построения глобально-оптимальных планов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. Всесоюз. конф. М., 1982. Ч. 1. С. 184-186.

142. Бримкулов У.Н., Круг Г.К., Саванов В.Л. Планирование регрессионных экспериментов при исследовании случайных полей. Препринт. М.: Научный совет по проблеме «Кибернетика» АН СССР, 1978.

143. Бримкулов У.Н., Круг Г.К. Использование методов экспериментальной параметрической идентификации случайных полей при анализе сигналов ЛДА // Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях: Тез. докл. IX Всесоюз. конф. М., 1989. Ч. 1. С. 96-97.

144. Бримкулов У.Н., Круг Г.К. Особенности применения обобщенного МНК в задачах фильтрации, интерполяции и экстраполяции марковских случайных процессов // Заводская лаборатория. 1991.

145. Бримкулов У.Н., Круг Г.К., Саванов В.Л. Планирование экспериментов при исследовании случайных полей и процессов. М.: Наука, 1986.

146. Бримкулов У.Н., Круг Г.К., Саванов В.Л. Применение параметрических методов идентификации случайных полей в задачах анализа сигналов лазерных доплеровских анемометров (ЛДА) // Тез. докл. Всесоюз. научно-технич. конф. «Теория и техника пространственно-временной обработки сигналов». Свердловск. 1989. С. 109-110.

147. Бримкулов У.Н., Круг Г.К., Саванов В.Л. Рационализация измерительной сети по критерию точности математического описания поля норм // Метеорология и гидрология. 1978. № 7. С. 25-34.

148. Бримкулов У.Н., Круг Г.К., Саванов В.Л. Численное построение точных планов эксперимента при коррелированных измерениях // Заводская лаборатория. 1980. № 5. С. 435-439.

149. Оптимальное размещение измерений при экспериментальном определении параметров хроматографических пиков / Бримкулов У.Н., Саванов В.Л., Вавилов В.Ф. и др. // Хроматографические процессы и автоматизация измерений. М.: НИФХИ, 1979. С. 22-23.

150. Принципы построения программного обеспечения ПАРМ ЛДА. Бацуро И.Г., Бримкулов У.Н., Кисенкова Н.А. и др. // Программные и технические средства автоматизации научных исследований / Моск. энерг. ин-т. 1989. № 211. С. 38-43.

151. Круг Г.К., Бримкулов У.Н. К вопросу о выборе весовой матрицы обобщенного МНК в задачах фильтрации и параметрической идентификации случайных процессов // Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. «Перспективы и опыт внедрения статистических методов в АСУ ТП». М., 1990. Ч. 1. С. 43-44.

152. Бримкулов У.Н. Программа планирования последовательных экспериментов при коррелированных измерениях. Рег № П003157 // Алгоритмы и программы. М.: ВНИЦентр, 1978. № 6.С. 17.

153. Круг Г.К., Бримкулов У.Н., Саванов В.Л. Планирование оптимальных экспериментов при исследовании океанографических полей // Тез. докл. II Всесоюзн. конф. «Океанотехника-78», 1978.

154. Некоторые особенности применения методов планирования эксперимента при исследовании пространственно-временной структуры океанографических полей / Круг Г.К., Бримкулов У.Н., Саванов В.Л., Ярыгина Т.А. // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 381. С. 102-106.

155. Бримкулов У.Н., Ярыгина Т.А. Программа построения точных Д-оптимальных планов при коррелированных измерениях // Алгоритмы и программы. М.: ВНИЦентр. 1978. № 3(29). С. 55.

156. Бримкулов У.Н. Влияние коррелированности измерений на вид точных планов // Тез. докл. VI Всесоюзн. конф. «Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях». М., 1980. Ч. 2. С. 73-76.

157. Бримкулов У.Н., Аккозов А.Д. Исследование и оптимизация параметров синтезируемых голограмм с помощью имитационного моделирования и методов планирования эксперимента // Тез. докл. I Республ. научно-техн. конф. «Состояние и перспективы развития технических наук Киргизии». Фрунзе. 1981.

158. Бримкулов У.Н. Особенности планирования регрессионных экспериментов при исследовании случайных полей // Тез. докл. I Республ. научно-техн. конф. «Состояние и перспективы развития технических наук Киргизии». Фрунзе. 1981.

159. Бримкулов У.Н. Применение методов планирования эксперимента в САПР // Оптико-электронные системы и методы хранения и обработки информации. Сб. научн. трудов / Фрунз. политехн. институт. 1987. С. 89-96.

160. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal filtering. New-Jersey, Prentice-Hall, 1979.

161. Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear optimal control. New-Jersey, Prentice-Hall, 1971.

162. Anderson B.D.O. et all. Foundations of system theory. Finitary and infinitary conditions. Berlin etc.,: Springer, 1976.

163. Fingerson L.M., Adrian R.J. An Intensive Course in Laser Velosimetry. TSI LDV Short Course Notes, Minnesota. 1978.

164. George W.K., Lumley J.L. The Laser Velosimeter and Its Application to the Measurement of Turbulence. J.F.M., Vol. 60, № 321.

165. Gilbert N. Estimation from a linear Markov process. Biometrika. 1960, Vol. 47, № 3, p. 482-483.

166. Hajek J., Kimeldorf G. Regression design in autoregressive stochastic process. Ann. Math. Statist., 194, Vol. 2, № 3, p. 520-527.

167. Hoel P. Efficiency problems in polynomial estimation. Ann.Math. Statist., 1958, Vol. 29, p. 1134-1145.

168. Hoel P. Asymptotic efficiency problems in polynomial estimation. Ann. Math. Statist., 1961, Vol. 32, p. 1042-1047.

169. Kiefer J. Optimum designs in regression problems. Ann. Math. Statist., 1961, Vol. 32, p. 298-325.

170. Kohn R., Ansley C.F. On the smoothness properties of the best unbiased estimate of stochastic process observed with noise. Ann. Statist., 1983, Vol. 11, p. 1011-1017.

171. Kohn R., Ansley C.F. Efficient estimation and prediction in time series regression models. Biometrika, 1985, Vol. 72, p. 694-697.

172. Kohn R., Ansley C.F. A fast algorithm for signal extraction, influence and cross-validation in state space models. Biometrika. 1989, Vol. 76, p.65-79.

173. Kohn R., Ansley C.F. Discussion to paper "Linear smoothers and additive models" by Buja A., Hastie T. and Tibshirani R. Ann. Statist., 1989, Vol. 17, p. 535-540.

174. Lange O. Statistical estimation of parameters an Markov processes. Collog. math., Vol. 3, № 2, p. 147-160.

-
175. Laycock P.J. Optimal design: regression models for directions. *Biometrika*, 1975, Vol. 62, p. 305-311.
176. Madansky A. Least squares estimation in finite Markov processes. *Psychometrika*, 1959, Vol. 24, № 2, p.137-144.
177. Parsen E. An approach to time series analysis. *Ann. Math. Statist.*, 1961, v.32, p. 951-989.
178. Parsen E. *Time Series Analysis Papers*. San Francisco, 1967.
179. Rao C.R. Estimation of parameters in linear model. *Ann. Statist.*, 1976, Vol. 4, № 6, p. 1023-1037.
180. Sacks J., Ylvisaker D. Statistical designs and integral approximation. In: *Proc. of the 12th Biennial Seminar of the Canad. Math. Congr.*, 1970, p. 115-136.
181. Sacks J., Ylvisaker D. Designs for regression problems with correlated errors. *Ann. Math. Statist.*, 1966, Vol. 37, p. 66-89; 1968, Vol. 39, p. 49-69; 1970, Vol. 41, p. 2057-2074.
182. Spruill M.C., Studden W.J. Optimum designs when the observations are second order processes. *J. Multivar*, 1978, Anal 8, p. 153-172.
183. Spruill M.C., Studden W.J. A Kiefer-Wolfowitz theorem in a stochastic process setting. *Ann. Statist.*, 1979, Vol. 7, p. 1329-1332.
184. Wahba G. On the regression design problems of Sacks an Ylvisaker. *Ann. Math. Statist.*, Vol. 42, p. 1035-1053.
185. Wahba, G. Implorer priors, spline smoothing and the problem of guarding against model errors in regression. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1978, Ser. B, Vol. 40, p.364-372.
186. Wecher W.E., Ansley, C.F. The signal extraction approach to non-linear regression and spline smoothing. *J. Amer. Statist. Assoc. (JASA)*, 1983, Vol. 78, p. 81-89.
187. Wittwer G. Versuchsplanung imn Sinne von Sacks-Ylvisaker fur Vektorprozesse. *Math. Operationsforsch. und Statist.*, 1976, Bd. 7, № 1, s. 95-105.
188. *Общепроаслелые руководящие методические материалы по созданию автоматизированных систем научных исследований и комплексных испытаний новой техники (АСНИ)*. Редакция 1-80. М., 1980.
189. Велихов Е.П., Выставкин А.Н. Проблемы развития работ по автоматизации научных исследований // *Управляющие системы и машины*. 1984. № 4. С. 3-11.
190. Виттих В.А., Цыбагов В.А. Оптимизация бортовых систем сбора и обработки данных. М.: Наука, 1985.
191. Египко В.Н., Акимов А.П., Горин Ф.Н. Процедуры и методы проектирования систем в научных исследованиях. Киев: Наукова думка, 1982.

-
192. Автоматизация научных исследований на основе применения ЭВМ. Тез. докл. VI Всесоюзн. конф. Новосибирск, 1981.
193. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990.
194. Спида К., Браун Р., Гудвин Дж. Теория управления. М.: Мир, 1973.
195. Лазерные доплеровские измерители скорости / Под ред. Ю.Е. Нестерихина и др. Новосибирск: Наука, 1975.
196. Дука С.И., Смирнов В.И., Тимофеев А.С. Применение фотонного коррелятора в качестве процессора ЛДА для измерения турбулентности // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1987. Вып. 134. С. 84-89.
197. Акаев А.А., Майоров С.А. Когерентные оптические вычислительные машины. Л.: Машиностроение, 1977.
198. Акаев А.А., Майоров С.А. Оптические методы обработки информации. М.: Высш. школа, 1988.
199. Виттих В.А., Сергеев В.В., Соيفер В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований. М.: Наука, 1982.
200. Певчев Ю.Ф., Финогенов К.Г. Автоматизация физического эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1986.
201. Голографическая обновляемая информационно-поисковая система для архивного хранения конструкторской документации. Акаев А.А. и др. // Оптико-электронные методы обработки изображений. Л.: Наука, 1984. С. 23-32.
202. Пратт В. Лазерные системы связи. М.: Связь, 1972.
203. Ярыгина Т.А. Разработка методов планирования и анализа экспериментов при параметрическом оценивании корреляционных функций случайных процессов. Дис ... канд. техн. наук. М., 1988.
204. Алымкулов С.А., Тентиева С.М. Система управления записью голограмм на ФТП-носители информации на базе микроЭВМ // Применение микропроцессоров и микроЭВМ в приборах и машинах. Сб. науч. трудов / Фрунз. политехн. ин-т. 1984. С. 20-27.
205. Нуркамилов А.Н. Структура МП контроллера для управления записью голограмм на фототермопластические носители информации // Применение микропроцессоров и микроЭВМ в приборах и машинах. Сб. научн. трудов / Фрунз. политехн. ин-т. 1984. С. 27-32.
206. Исаев У.Т. Автоматизация анализа изображений, восстановленных с голограмм // Оптико-электронные системы и методы хранения и обработки информации. Сб. научн. трудов / Фрунз. политехн. ин-т, 1987. С. 49-51.
207. Дордоев С.З. Цифровой оптоэлектронный процессор в системе остаточных классов // Оптико-электронные системы и методы хранения

и обработки информации. Сб. научн. трудов / Фрунз. политехн. ин-т, 1987. С. 57-61.

208. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.

209. Круг Г.К., Бримкулов У.Н., Саванов В.Л. Некоторые вопросы применения методов планирования эксперимента для исследования случайных полей // Тез. докл. V Всесоюзн. конф. «Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях (математическая теория эксперимента)». М. 1976. С. 141-143.

210. Круг Г.К., Бримкулов У.Н., Саванов В.Л. Численная процедура построения точных оптимальных планов при исследовании случайных полей // Теория и практика эксперимента: Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 359. С. 24-29.

211. Бримкулов У.Н. Особенности планирования эксперимента в случае коррелированного шума измерений // Тр. Фрунзенск. политехн. ин-та. 1978. Вып. 106. С. 71-80.

212. Бримкулов У.н. Один алгоритм планирования эксперимента при нахождении математического описания случайных полей // Тез. докл. V Всесоюзн. конф. «Планирование и автоматизация эксперимента в научных исследованиях (математическая теория эксперимента)». М., 1976. С. 143-145.

213. Бримкулов У.Н. Численный алгоритм планирования эксперимента при коррелированных измерениях // Тез. докл. Всесоюзн. научн. конф. «Современные проблемы энергетики и электротехники. М., 1977. С. 60.

214. Kiefer J. Optimum Experimental Designs. J. of the Royal Statistical Soc. Ser. B., 1959. Vol. 21, № 2, p. 272-319.

215. Box G.E., Draper N.R. The choice of second order rotatable design. Biometrika. 1963., Vol. 50, № 3, p. 335-352.

216. Fisher R.A. The Designs of Experiments. London. Oliver and Boyad. 1936 (1960).

217 Ylvisaker D. Design on Random fields. In "A Survey of Statistical Designs and Linear Models". Amsterdam, 1975, p. 593-607.

218. Бримкулов У.Н. Ковариационная матрица измерений много-связного марковского процесса и ее применение в задачах оценивания случайных процессов // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. М., 1991. С. 64-65.

219. Бримкулов У.Н. Структура ковариационной матрицы измерений векторного марковского процесса для различных способов ее формирования // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. М., 1991. С. 66-67.

220. Бримкулов У.Н., Войцеховски Д. Численные методы планирования эксперимента в задачах оценивания ковариационно марковских процессов (КМ-процессов) // Перспективные методы планирования и анализа экспериментов при исследовании случайных полей и процессов: Тез. докл. IV Всесоюзн. конф. М., 1991. С. 38-39.

221. A. Asif, and J. M. F. Moura. Block Matrices with L-Block-banded Inverse: Inversion Algorithms, *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 53, № 2, Feb. 2005, pp. 630-642.

222. A. Kavcic and J. M. F. Moura. Matrix with banded inverses: algorithms and factorization of Gauss Markov processes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 46, № 4, pp. 1495–1509, Jul. 2000.

223. A. Asif and J. M. F. Moura. Data assimilation in large time-varying multidimensional fields, *IEEE Trans. Image Process.*, Vol. 8, № 11, pp. 1593–1607, Nov. 1999.

224. A. Asif, and J. M. F. Moura. Fast inversion of L-block-banded matrices and their inverses, in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, Vol. 2, Orlando, FL, May 2002, pp. 1369–1372.

225. A. Asif and J.M.F. Moura. Inversion of Block Matrices with Block Banded Inverses: Application to Kalman-Bucy Filtering, *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 1, Istanbul, Turkey, Jun 2000, pp. 608-611.

226. A. Kavcic and J. M. F. Moura. Information Loss in Markov Approximations, Tech. rep., Department of Electrical Engineering, Carnegie Mellon University, 1998. Manuscript of 30 pages, submitted to publication

227. A. Kavcic' and J.M.F. Moura. "The Viterbi Algorithm and Markov Noise Memory", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 46, № 1, JANUARY 2000, pp. 291-301.

228. U.A. Khan and J.M.F. Moura, Distributing the Kalman Filter for Large-Scale Systems. *IEEE Transactions on signal processing*, arXiv: 0708.0242v2 [cs.IT] 25 Feb 2008. November 23, 2009. 30 p.

229. U.N. Brimkulov. Matrices Whose Inversions are Tridiagonal, Band or Block-Tridiagonal and Their Relationship with the Covariance Matrices of a Markov Random Processes (Fields). – ArXiv.org. Preprint ArXiv: 1507.01763v2, 10.10.2015

230. G. Meurant. A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* Vol. 13, № 3 (1992), pp. 707-728.

231. D. Moskovitz, The numerical solution of Laplace's and Poisson's equations, *Quart. Appl. Math.*, 2 (1944), pp. 14S-63.

232. W. W. BarretT, A theorem on inverses of tridiagonal matrices, *Linear Algebra Appl.*, 27(1979), pp. 211-217

233. H. Lev-Ari and T. Kailath, “Autoregressive models for nonstationary discrete time processes,” in *IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, Cambridge, MA, Aug. 1984.

234. T.T. Georgiou and A. “Lindquist. Kullback–Leibler Approximation of Spectral Density,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. 49, № 11, pp. 2910–2917, Nov. 2003.

235. S.A. Altekar and J.K. Wolf, “Improvements in detectors based upon colored noise,” *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 34, pp. 94–97, Jan. 1998.

236. U. Brimkulov, Ch. Jumabaeva, K. Baryktabasov. Accuracy of Discrete Markov Approximation in the Problems of Estimation of Random Processes Characteristics. *Intelligent Systems Conference (IntelliSys)*, United Kingdom, London, 2017, pp. 824–834. doi: 10.1109/IntelliSys.2017.8324225

237 U.N. Brimkulov “Some features of generalized least squares method for identification of Markov stochastic processes,” *Automation and Remote Control*. 1991. Vol. 52, № 1, pp. 57–64.

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Здесь приводятся краткие сведения из матричной алгебры, которые используются в работе. Более подробные сведения можно найти в работах [80–83, 86,–87].

Определение П1. Прямоугольный массив чисел

$$A = A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}] \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad (\text{П1.1})$$

называется *матрицей*. Если $m = n$, то матрица называется квадратной порядка n (или m). Если $m = 1$ или $n = 1$, то матрица называется соответственно *вектор-строкой* или *вектор-столбцом*.

Определение П2. Подматрицей A_{pq} ($p < m; q < n$) матрицы A_{mn} называется массив чисел, находящийся на пересечении строк и столбцов с заданными номерами. Если подматрица находится на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами, то она будет квадратной и называется *главной подматрицей*.

Определитель любой квадратной подматрицы называется *минором* матрицы A . Если подматрица главная, то и минор называется *главным*.

Определение П3. Угловой или ведущей подматрицей A_i квадратной матрицы A_n называется подматрица, состоящая из элементов первых i строк и столбцов A_n , т.е. $A_i = A_n\{1, \dots, i\}$ ($i = \overline{1, n}$). Определитель угловой подматрицы называется *угловым минором*. Угловые подматрицы являются вложенными друг в друга.

При доказательстве свойств матриц A_n^1, A_n^m (см. главы 4 и 5, приложения 3 и 5) используются понятия угловых подматриц, сформированных в прямом A_i (или A_i^+) и обратном (A_i^-) ($i = \overline{1, n}$) направлениях, т.е. $A_i = A_i^+ = A_n\{\overline{1, i}\}; A_i^- = A_n\{\overline{n-i+1, n}\}$. Здесь $A_n\{\overline{i, j}\}$ обозначает квадратную подматрицу матрицы A_n из элементов, находящихся на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами от i до j .

Ниже приведена графическая иллюстрация формирования угловых подматриц $\{A_i^+, A_i^-, i = \overline{1, n}\}$ (рис. П1).

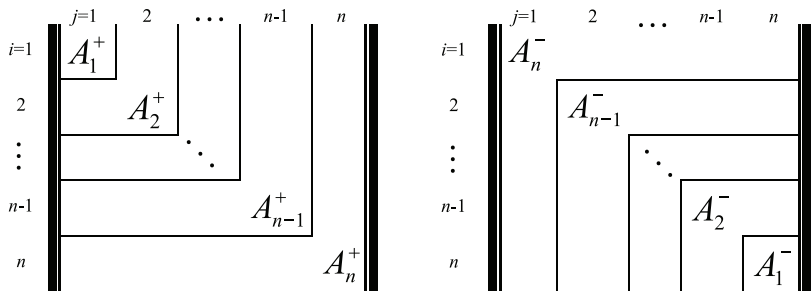


Рис. П1. Формирование угловых подматриц A_i^\pm ($i = \overline{1, n}$) в прямом и обратном направлениях

Определение П4. Матрица A_{mn} разбитая на непересекающиеся прямоугольные подматрицы (блоки)

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_q \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_p \end{matrix} \quad (\text{П1.2})$$

называется *блочной матрицей* ($\sum_{i=1}^p m_i = m$; $\sum_{i=1}^q n_i = n$).

Действия над блочными матрицами выполняются также как если бы вместо блоков (подматриц) находились обычные числовые элементы. Естественно, при этом должны иметь смысл операции

$$A_{m_i n_i} + B_{m_j n_j} \text{ и } A_{m_i n_i} \times B_{m_j n_j}, \quad (i = \overline{1, p}; j = \overline{1, q}).$$

Иногда в литературе (см., например, [80]) блочные матрицы называются также *клеточными матрицами*.

Определение П5. Матрица A_n , имеющая вид

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{mm} \end{bmatrix}, \quad (\text{П1.3})$$

где A_{ii} – подматрица порядка n_i ($\sum_{i=1}^m n_i = n$), называется *блочно-диагональной*. Для такой матрицы часто используется обозначение

$$A_n = A_{11} \oplus A_{22} \oplus \dots \oplus A_{mm} \text{ или } A_n = \bigoplus_{i=1}^m A_{ii},$$

которая называется прямой суммой матриц A_{ii} ($i = \overline{1, m}$). Многие свойства блочно-диагональных матриц, описанные в терминах блочного умножения, обобщают аналогичные свойства диагональных матриц. Например,

$$\det \left(\bigoplus_{i=1}^m A_{ii} \right) = \prod_{i=1}^m \det A_{ii}. \quad (\text{П1.4})$$

Определение П6. Матрицу A называют *ленточной*, если все ее ненулевые элементы заключены внутри ленты, образованной диагоналями, параллельными главной диагонали, т.е. $a_{ij} = 0$, если $|i - j| > t$ и $a_{i, i-m} \neq 0$ (или $a_{i, i+m} \neq 0$) хотя бы для одного значения i . Величина t называется *полушириной*, а число $2t + 1$ – *шириной ленты*. Множество элементов, для которых $|i - j| \leq t$ называется *лентой* матрицы A . Если все элементы ленты не равны нулю, то матрица называется *полной ленточной матрицей*. Для матрицы порядка n и полуширины t число элементов ленты равно $n(2t + 1) - t(m + 1)$. Если матрица симметрична, то достаточно хранить ее полуленту (вместе с диагональю) и число элементов в памяти равно $n(m + 1) - t(m + 1)/2$.

Определение П7. Матрица A_n называется *трехдиагональной*, если для нее $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > 1$. Таким образом, трехдиагональная матрица является частным случаем ленточной при $t = 1$. Определитель трехдиагональной матрицы A_n легко вычисляется по индукции:

$$\det A_i = a_{ii} \det A_{i-1} - a_{i, i-1} a_{i-1, i} \det A_{i-2}, \quad (i = \overline{3, n}), \quad (\text{П1.5})$$

где A_i – угловая подматрица A_n из элементов, на пересечении строк столбцов с номерами от 1 до i .

Определение П8. Матрица A_{mn} называется *разреженной*, если число ее ненулевых элементов во много раз меньше общего числа элементов матрицы (по крайней мере в 3 раза).

Определение П9. Матрица P_n называется *матрицей перестановки* (перестановочной матрицей), если в любой ее строке и в любом столбце только один элемент равен 1, а все остальные равны 0. Умножение

на такую матрицу сводится к перестановке строк либо столбцов в зависимости от того, слева или справа производится умножение. При умножении A_{mn} слева на P_m в матрице A_{mn} переставляются строки, а при умножении A_{mn} справа на P_n в матрице A_{mn} переставляются столбцы.

Определитель матрицы перестановки P_n равен ± 1 (т.е. матрица перестановки невырождена).

Определение П10. Матрица A_n называется *унитарной*, если $A_n^T A_n = I$ (а в случае вещественной A_n , унитарные матрицы называются еще вещественно ортогональными). Матрицы перестановок являются унитарными. Унитарные матрицы невырождены и $A_n^T = A_n^{-1}$.

Определение П11. Симметричная $n \times n$ матрица A_n называется *положительно определенной*, если $x^T A_n x > 0$ для любого ненулевого вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Если $x^T A_n x \geq 0$, то матрица A_n называется *положительно полуопределенной*. Примером положительно полуопределенной матрицы является ковариационная матрица $K_n = [(x - Ex)(x - Ex)^T]$.

Аналогичным образом вводятся понятия *отрицательно определенной* и *отрицательно полуопределенной* матриц.

Приведем также утверждение и теорему о свойствах положительно определенных матриц, важных для доказательства теорем о свойствах матриц A_n^m, A_n^{-m} .

Утверждение П1. След, определитель и все главные миноры положительно определенной матрицы положительны.

Теорема П1. Симметричная матрица A_n , тогда и только тогда будет положительно определенной, когда $\det A_i > 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$. Более обще, положительность любой последовательности из n вложенных главных миноров матрицы A_n (а не только последовательности из ведущих главных миноров) необходима и достаточна для положительной определенности этой матрицы.

ПРИМЕРЫ ОДНО-, ДВУ-, ТРЕХ- И МНОГОМЕРНЫХ КМ-ПРОЦЕССОВ

Ниже приведен ряд ковариационных функций нормальных марковских процессов, удовлетворяющих условию (2.12). Так как ковариационные процессы, в том числе КМ-процессы, полностью определяются заданием ковариационной функции процесса, приведенные функции полностью определяют соответствующие КМ-процессы. Примеры взяты из различных источников [4–7, 20, 22, 27, 22–39, 63, 167]. В приложении они приведены к единообразному виду, с использованием одинаковых обозначений, где это было возможно.

А. Одномерные КМ-процессы

Ниже везде $s, t, t_0 \in R^1$; $\tau = s - t$; $\sigma, \sigma_i, \alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i, \mu, \mu_i$ – положительные вещественные числа (если не оговорено другое).

$$1. k(s, t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \min^{\alpha_i}(s, t).$$

При $m = 1$ $\sigma_1^2 = \alpha_1 = 1$ функция $k(s, t) = \min(s, t)$ представляет собой стандартный винеровский процесс.

2. $k(s, t) = \min(s, t)(t_0 - \max(s, t)) / t_0, t_0 > s, t > 0$ – броуновское движение с закрепленными концами (броуновский мост).

$$3. k(s, t) = \sigma^2 \min^\alpha(s, t) \max^\beta(s, t) = \sigma^2 (st)^\beta \min^{\alpha-\beta}(s, t),$$

где α и β – вещественные числа, причем $\alpha > \beta$. При $\alpha > 0$ и $\beta < 0$ функцию $k(s, t)$ удобнее представлять в виде

$$k(s, t) = \sigma^2 \frac{\min^\alpha(s, t)}{\max^\gamma(s, t)} = \sigma^2 \frac{\min^{\alpha+\gamma}(s, t)}{(st)^\gamma},$$

где $\alpha > 0$ и $\gamma = -\beta > 0$.

При $\alpha = \gamma, k(s, t) = \sigma^2 \min^\alpha(s, t) / \max^\alpha(s, t)$ и $k(t, t) = \sigma^2$.

$$4. k(s, t) = k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|).$$

5. $k(s, t) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \{1 - \beta \cdot \exp(-2 \cdot \min(s, t))\}$ или в другой форме записи

$$k(s, t) = \sigma^2 \{ \exp(-\alpha |\tau|) - \beta \cdot \exp(-\alpha (s + t)) \}.$$

$$6. k(s, t) = \sigma^2 \exp(\alpha(t_2 - t_0)) \{ \exp(\alpha(t_1 - t_0)) - 1 \},$$

где $t_1 = \min(s, t)$; $t_2 = \max(s, t)$, $t_0 < t_1, t_2$.

$$7. k(s, t) = \prod_{i=1}^m \sigma_i^2 \exp(-\alpha_i |s_i^{y_i} - t_i^{y_i}|) \exp(-\beta_i (s_i^{\mu_i} + t_i^{\mu_i}))$$

Б. Двумерные КМ-процессы и их компоненты

Ниже $k_{21}(s, t) = k_{12}(t, s)$; $k_{21}(\tau) = k_{12}(-\tau)$; $\tau = s - t$.

а) Первые компоненты двумерных КМ-процессов, представляющие собой стационарный недифференцируемый процесс

$$1. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (\cos \beta \tau + \gamma \sin \beta |\tau|), \quad \gamma < (\alpha / \beta);$$

$$2. k_{11}(\tau) = k(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos \beta \tau.$$

б) Двумерные КМ-процессы, первая компонента которых есть стационарный дифференцируемый процесс

$$3. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (\cos \beta \tau + (\alpha / \beta) \sin \beta |\tau|);$$

$$k_{12}(\tau) = (\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) / \beta) \exp(-\alpha |\tau|) \sin(\beta \tau); \quad k_{21}(\tau) = -k_{12}(\tau);$$

$$k_{22}(\tau) = (\sigma^2 (\alpha^2 + \beta^2) / \beta) \exp(-\alpha |\tau|) \{ \beta \cos \beta \tau - \alpha \sin(\beta |\tau|) \}.$$

$$4. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|);$$

$$k_{12}(\tau) = (\sigma^2 \alpha^2 \tau) \exp(-\alpha |\tau|);$$

$$k_{22}(\tau) = (\sigma^2 \alpha^2 \tau) \exp(-\alpha |\tau|) (1 - \alpha |\tau|);$$

$$4a. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|); \quad k_{22}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|).$$

$$k_{12}(\tau) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \begin{cases} \exp(-\alpha \tau), & \tau > 0; \\ \exp(\alpha \tau) (1 - 2\alpha \tau), & \tau < 0; \end{cases} \quad k_{21}(\tau) = -k_{12}(\tau).$$

$$5. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \{ \alpha \cdot \exp(-\beta |\tau|) - \beta \cdot \exp(-\alpha |\tau|) \}; \quad (\alpha > \beta); (\alpha > \beta);$$

$$k_{12}(\tau) = (\sigma^2 \alpha \beta) \text{sign}(\tau) \{ \exp(-\beta |\tau|) - \exp(-\alpha |\tau|) \}; \quad k_{21}(\tau) = -k_{12}(\tau);$$

$$k_{22}(\tau) = (\sigma^2 \alpha \beta) \{ \alpha \cdot \exp(-\alpha |\tau|) - \beta \cdot \exp(-\beta |\tau|) \}.$$

$$5a. k_{11}(\tau) = \sigma^2 \{\alpha \cdot \exp(-\beta |\tau|) - \beta \cdot \exp(-\alpha |\tau|)\}; (\alpha > \beta);$$

$$k_{12}(\tau) = \sigma^2 \alpha \begin{cases} (\alpha - \beta) \exp(-\beta \tau), & \tau > 0; \\ (\alpha + \beta) \exp \beta \tau - 2\beta \cdot \exp \alpha \tau, & \tau < 0; \end{cases}$$

$$k_{22}(\tau) = \sigma^2 \alpha (\alpha^2 - \beta^2) \exp(-\beta |\tau|)$$

в) Двумерные КМ-процессы, первая компонента которых есть не-стационарный дифференцируемый процесс

$$6. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2} [\exp(-\alpha |\tau|) - \exp(s+t)] \cos \beta \tau + \right. \\ \left. + \exp(-\alpha(s+t)) \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos(s+t) - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta(s+t) \right] - \right. \\ \left. - \exp(-\alpha |\tau|) \left[\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos \beta \tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right] \right\}.$$

$$7. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \exp(\beta(s+t) - \alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|);$$

$$k_{12}(s, t) = \beta k_{11}(s, t) + \sigma^2 \alpha^2 (s-t) \exp(\beta(s+t) - \alpha |\tau|);$$

$$k_{22}(s, t) = \beta^2 k_{11}(s, t) + \sigma^2 \alpha^2 \exp(\beta(s+t) - \alpha |\tau|) (1 - \alpha |\tau|).$$

$$8. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{(st) \min(s, t) - (1/3) \min^3(s, t)\};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \begin{cases} s^2, & s < t \\ 2st - t^2, & s > t \end{cases}. \quad k_{22}(s, t) = 2\sigma^2 \min(s, t);$$

$$9. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{\alpha \cdot \min(s, t) \cos \alpha \tau - \sin(\alpha \cdot \min(s, t)) \cos(\alpha \cdot \max(s, t))\};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \alpha \{\alpha \cdot \min(s, t) \sin \alpha \tau + \sin(\alpha s) \sin(\alpha t)\};$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \alpha^2 \{\alpha \cdot \min(s, t) \cos \alpha \tau + \sin(\alpha \cdot \min(s, t)) \cos(\alpha \cdot \max(s, t))\}.$$

$$10. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{\exp(-\beta |\tau|) - (\beta / \alpha) \exp(-\alpha |\tau|) + (1 + \beta / \alpha) \times \\ \times \exp(-\alpha(s+t)) - \exp(-\alpha t - \beta s) - \exp(-\alpha s - \beta t)\}, \quad \alpha \neq \beta;$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \{ \text{sign}(\tau) [\beta \exp(-\beta |\tau|) - \beta \exp(-\alpha |\tau|)] - (\alpha + \beta) \exp(-\alpha(s+t)) + \alpha \cdot \exp(-\alpha t - \beta s) + \beta \cdot \exp(\alpha s - \beta t) \};$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{aligned} &(\alpha\beta) \exp(-\alpha |\tau|) - \beta^2 \exp(-\beta |\tau|) + \\ &+ \alpha(\alpha + \beta) \exp(-\alpha(s+t)) - \\ &- \alpha\beta (\exp(-\alpha s - \beta t) + \exp(-\alpha t - \beta s)) \end{aligned} \right\}.$$

$$10a. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{ \exp(-\beta |\tau|) - (\beta / \alpha) \exp(-\alpha |\tau|) + (1 + \beta / \alpha) \times_{\alpha \neq \beta} \times \exp(-\alpha(s+t)) - \exp(-\alpha t - \beta s) - \exp(-\alpha s - \beta t) \},$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \alpha \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - \beta) \exp(-\beta \tau) - (\alpha + \beta) \exp(-\beta(s+t)) + 2\beta \exp(-\alpha t - \beta s), s > t; \\ &(\alpha + \beta) \{ \exp(-\beta \tau) - \exp(-\beta(s+t)) \} - 2\beta \{ \exp \alpha \tau - \exp(\alpha t - \beta s) \}, s < t; \end{aligned} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \alpha \sigma^2 (\alpha^2 - \beta^2) \{ \beta \cdot \exp(-\beta |\tau|) - \exp(-\beta(s+t)) \}.$$

$$11. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{ \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t-2t_0)) (1 - \alpha(s+t-2t_0)) \};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \alpha^2 \{ (s-t) \exp(-\alpha |\tau|) - (s+t-2t_0) \exp(-\alpha(s+t-2t_0)) \};$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \alpha^2 \left\{ \begin{aligned} &\exp(-\alpha |\tau|) (1 - \alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t-2t_0)) \times \\ &\times (1 - \alpha(s+t-2t_0)) \end{aligned} \right\}, s, t \geq t_0.$$

$$12. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{aligned} &2\alpha \cdot \min(s, t) + 2 \exp(-\alpha s) + 2 \exp(-\alpha t) - \\ &- \exp(-\alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t)) - 2 \end{aligned} \right\};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \alpha \left\{ \begin{aligned} &2 - \exp(-\alpha \tau) + \exp(-\alpha(s+t)) - 2 \exp(-\alpha t), s > t; \\ &\exp \alpha \tau + \exp(-\alpha(s+t)) - 2 \exp(-\alpha t), s < t; \end{aligned} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \alpha \sigma^2 \cdot \{ \exp(-\alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t)) \}.$$

$$13. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{ 2 \min(s, t) + (1/\alpha) [\exp(-\alpha s) - \exp(-\alpha t) - \exp(-\alpha |\tau|) - 1] \};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{aligned} &2 - \exp(-\alpha \tau) - \exp(-\alpha t), s > t; \\ &\exp \alpha \tau - \exp(-\alpha t), s < t; \end{aligned} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \alpha \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|).$$

$$14. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha |\tau|) \exp(-\alpha |\tau|) - (1 + \alpha(s+t)) \exp(-\alpha(s+t)) \\ - 2\alpha^2 st \cdot \exp(-\alpha(s+t)) \end{array} \right\};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} \tau \cdot \exp(-\alpha\tau) + (2\alpha st - \tau) \exp(-\alpha(s+t)), \quad s > t; \\ \tau \cdot \exp\alpha\tau + (2\alpha st - \tau) \exp(-\alpha(s+t)), \quad s < t; \end{array} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \alpha^2 \left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha |\tau|) \exp(-\alpha |\tau|) - (1 - \alpha(s+t)) \exp(-\alpha(s+t)) \\ - 2\alpha^2 st \cdot \exp(-\alpha(s+t)) \end{array} \right\}.$$

$$14a. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{array}{l} (1 + \alpha |\tau|) \exp(-\alpha |\tau|) - (1 + \alpha(s+t)) \exp(-\alpha(s+t)) \\ - 2\alpha^2 st \cdot \exp(-\alpha(s+t)) \end{array} \right\};$$

$$k_{12}(s, t) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{array}{l} \exp(-\alpha\tau) - (1 + 2\alpha t) \exp(-\alpha(s+t)), \quad s > t; \\ (1 - 2\alpha\tau) \cdot \exp\alpha\tau - (1 + 2\alpha t) \exp(-\alpha(s+t)), \quad s < t; \end{array} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \{ \exp(-\alpha |\tau|) - \exp(-\alpha(s+t)) \}.$$

$$15. k_{11}(s, t) = \sigma^2 \{ 2 \min(s, t) + (1/\alpha) [\exp(-\alpha |\tau|) - 1] \};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{array}{l} 2 - \exp(-\alpha\tau), \quad s > t; \\ \exp\alpha\tau, \quad s < t; \end{array} \right.$$

$$k_{22}(s, t) = \sigma^2 \alpha \exp(-\alpha |\tau|).$$

Примечания.

1. Ковариационные функции второй компоненты и взаимные ковариационные функции компонент двумерных КМ-процессов 3–5, 7–15, первая компонента которых является дифференцируемой функцией, получены путем вычисления первой и второй частных производных:

$$k_{12}(s, t) = \partial k_{11}(s, t) / \partial t; k_{21}(s, t) = \partial k_{11}(s, t) / \partial s;$$

$$k_{22}(s, t) = \partial^2 k_{11}(s, t) / (\partial s \partial t) = \partial^2 k_{11}(s, t) / \partial t \partial s$$

или
$$k_{22}(s, t) = \partial k_{12}(s, t) / \partial s = \partial k_{21}(s, t) / \partial t.$$

2. Матричные ковариационные функции 4а, 5а, 10а и 14а получены путем решения соответствующих систем дифференциальных уравнений вида (3.27) (см. главу 3).

2. Марковские процессы 4 и 4а, 5 и 5а, 10 и 10а, 14 и 14а имеют одинаковые первые компоненты.

3. Если вторая компонента представляет собой одномерный КМ-процесс, то ее ковариационной функцией может быть, в частности, любая из ковариационных функций, приведенных в разделе А.

4. Производные от ковариационной функции № 6 в виду их громоздкости не приведены.

В. Трехмерные КМ-процессы

а) Трехмерный КМ-процесс, первая компонента которого есть стационарный дважды дифференцируемый процесс:

$$k_{11}(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau| + (1/3)\alpha^2 \tau^2);$$

$$k_{12}(\tau) = -k'_{11}(\tau) = (\alpha^2 \sigma^2 \tau / 3) \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau|); \quad k_{21}(\tau) = -k_{12}(\tau);$$

$$k_{22}(\tau) = -k''_{11}(\tau) = (\alpha^2 \sigma^2 / 3) \exp(-\alpha |\tau|) (1 + \alpha |\tau| - \alpha^2 \tau^2);$$

$$k_{13}(\tau) = -k_{22}(\tau); \quad k_{31}(\tau) = -k_{13}(\tau);$$

$$k_{23}(\tau) = -k'''_{11}(\tau) = -(\alpha^4 \sigma^2 \tau) \exp(-\alpha |\tau|) (1 - (1/3)\alpha |\tau|); \quad k_{32}(\tau) = -k_{23}(\tau);$$

$$k_{33}(\tau) = -k^{iv}_{11}(\tau) = -(\alpha^4 \sigma^2) \exp(-\alpha |\tau|) (1 - \alpha |\tau| + (\alpha^2 / 3)\tau^2).$$

б) Трехмерный КМ-процесс, первая компонента которого есть нестационарный дважды дифференцируемый процесс:

$$k_{11}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \frac{\min^5(s, t)}{10} + (st)^2 \min(s, t) - \frac{st}{2} \min^3(st) \right\};$$

$$k_{12}(s, t) = \sigma^2 \left\{ \begin{array}{l} 2ts^3 - s^4 / 2, \quad s < t; \\ 5t^4 / 10 + 3t^2 s^2 - 4t^3 s / 2, \quad s > t; \end{array} \right.$$

$$k_{21}(s, t) = \sigma^2 \begin{cases} 5s^4/10 + 3s^2t^2 - 4s^3t/2, & s < t; \\ 2t^3s - t^4/2, & s > t; \end{cases}$$

$$k_{22}(s, t) = 6\sigma^2 \{(st) \min(s, t) - (1/3) \min^3(s, t)\}$$

$$k_{32}(s, t) = \frac{\partial k_{22}(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial^3 k_{11}(s, t)}{\partial s^2 \partial t} = 6\sigma^2 \begin{cases} 2st - s^2, & s < t; \\ t^2, & s > t; \end{cases}$$

$$k_{23}(s, t) = \frac{\partial k_{22}(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 k_{11}(s, t)}{\partial s \partial t^2} = 6\sigma^2 \begin{cases} s^2, & s < t; \\ 2st - t^2, & s > t; \end{cases}$$

$$k_{31}(s, t) = \frac{\partial^2 k_{11}(s, t)}{\partial s^2} = 2\sigma^2 \begin{cases} s^3 + 3st^2 - 3s^2t, & s < t; \\ t^3, & s > t; \end{cases}$$

$$k_{13}(s, t) = \frac{\partial^2 k_{11}(s, t)}{\partial t^2} = 2\sigma^2 \begin{cases} s^3, & s < t; \\ t^3 + 3ts^2 - 3t^2s, & s > t; \end{cases}$$

$$k_{33}(s, t) = \frac{\partial^2 k_{22}(s, t)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^4 k_{22}(s, t)}{\partial s^2 \partial t^2} = 12\sigma^2 \min(s, t).$$

Примечания.

1. Ковариационные функции второй и третьей компонент и взаимные ковариационные функции компонент рассмотренных трехмерных КМ-процессов (первая и вторая компоненты которых являются дифференцируемыми функциями) получены путем вычисления частных производных по соответствующим переменным от ковариационной функции первой компоненты.

2. Ковариационные функции второй и третьей компонент, в частности, могут представлять собой функции, приведенные в разделах А и Б.

Г. Многомерные КМ-процессы

1. m -мерный винеровский КМ-процесс:

$$K(s, t) = \left[r_{ij} \sigma_i \sigma_j \min(s, t) \right]_{i,j=1}^m,$$

где r_{ij} – символ Кронекера.

2. Нестационарный m -мерный КМ-процесс:

$$k_{ij}(s, t) = r_{ij} \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha_i + \alpha_j} \begin{cases} \exp(-\alpha_i(t-s)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s), & s < t \\ \exp(-\alpha_j(s-t)) - \exp(-\alpha_i t - \alpha_j s), & s > t \end{cases}$$

$$(i \geq j; \quad i, j = \overline{1, m}).$$

Элементы $K(s, t)$ при $i \leq j$ можно найти из соотношения $k_{ji}(s, t) = k_{ij}(t, s)$. При этом надо учесть, что $s < t$ заменяется на $s > t$ и наоборот.

3. Стационарный m -мерный КМ-процесс:

$$k_{ij}(s, t) = \frac{\gamma_i \gamma_j}{\alpha_i + \alpha_j} \begin{cases} \exp(-\alpha_i(t-s)), & s < t, \\ \exp(-\alpha_j(s-t)), & s > t, \end{cases} (i \geq j), \quad (i, j = \overline{1, m})$$

$$k_{ji}(s, t) = k_{ij}(t, s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ И УТВЕРЖДЕНИЙ

П3.1. Доказательство теоремы 2.3

Используя основные свойства условных математических ожиданий, получаем $Z(t_i) \in \mathfrak{F}_{-\tau}$ и $Z(t_j) \in \mathfrak{F}_{\tau+}$:

$$r(t_i, t_j) = E\{Z(t_i)Z(t_j)\} = E\{EZ(t_i)Z(t_j) | \mathfrak{F}_{-\tau}\} = E\{Z(t_i)E[Z(t_j) | \mathfrak{F}_{-\tau}]\}.$$

В силу определения m -связного марковского процесса при $\tau = t_{j-1}$

$$E\{Z_j | \mathfrak{F}_{-\tau}\} = E\{Z_j | Z_{j-1}, Z_{j-2}, \dots, Z_{j-m}\},$$

где $Z_j = Z(t_j)$. Для марковских процессов в широком смысле оператор $E\{Y | X\}$ можно заменить на оператор $\hat{E}\{Y | X\}$. Но

$$\hat{E}\{Z_j | Z_{j-1}, Z_{j-2}, \dots, Z_{j-m}\} = \sum_{l,v=j-m}^{j-1} r_{jv} r_{vl}^{-1} Z_l = \mathbf{Z}_{[j-1]}^T R_m^{-1} [j-1] \mathbf{r}_{j,[j-1]},$$

где $r^{-1}(v, l = j - m, j - m + 1, \dots, j - 1)$ – элементы матрицы $R_m^{-1} [j - 1]$. Подставляя значение $\hat{E}\{Z_j | Z_{j-1}, Z_{j-2}, \dots, Z_{j-m}\}$ вместо $\hat{E}\{Z_j | \mathfrak{F}_{-\tau}\}$, получаем

$$\begin{aligned} r(t_i, t_j) &= E\{Z_i \mathbf{Z}_{[j-1]}^T R_m^{-1} [j-1] \mathbf{r}_{j,[j-1]}\} = \\ &= E\{Z_i \mathbf{Z}_{[j-1]}\}^T R_m^{-1} [j-1] \mathbf{r}_{j,[j-1]} = \mathbf{r}_{i,[j-1]}^T R_m^{-1} \mathbf{r}_{[j-1],j}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, можно доказать обратное утверждение: если моментная функция процесса, удовлетворяет (2.19), то процесс является m -связным марковским процессом в широком смысле.

2. Доказательство второго пункта теоремы полностью повторяет приведенное доказательство п. 1 с заменой величин, векторов и матриц, связанных с $Z(t)$ на $Z^0(t)$ и $r(s, t)$ на $k(s, t)$.

ПЗ.2. Доказательство теоремы 2.5

Согласно [4], ковариационная функция случайного процесса $Z(t)$ связанного с белым шумом уравнением (2.26) при $a_0(t) = z(t_0) = 0$ определяется формулой

$$k(s, t) = \begin{cases} q_1(s)q_2(t), & t < s, \\ q_1(t)q_2(s), & t > s, \end{cases} \quad (\text{ПЗ.1})$$

где функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$ могут быть вычислены через $a_1(t)$ и $b(t)$ с помощью выражений

$$q_1(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right\}; \quad q_2(t) = q_1(t) \int_{t_0}^t \frac{b^2(\tau)}{q_1^2(\tau)} d\tau. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Легко видеть, что функция $k(s, t)$, удовлетворяющая (ПЗ.1), удовлетворяет также условию (2.12), определяющему одномерный КМ-процесс. Действительно, если $s < \tau < t$, то мы имеем

$$\frac{k(s, \tau)k(\tau, t)}{k(\tau, \tau)} = \frac{q_1(\tau)q_2(s)q_1(t)q_2(\tau)}{q_1(\tau)q_2(\tau)} = q_1(t)q_2(s) = k(s, t), \quad t > \tau > s;$$

$$\frac{k(s, \tau)k(\tau, t)}{k(\tau, \tau)} = \frac{q_1(s)q_2(\tau)q_1(\tau)q_2(t)}{q_1(\tau)q_2(\tau)} = q_1(s)q_2(t) = k(s, t), \quad s < \tau < t.$$

То есть $k(s, t) = k(s, \tau)k(\tau, t)/k(\tau, \tau)$, что завершает доказательство.

ПЗ.3. Доказательство теоремы 4.1

Справедливость первого пункта теоремы покажем методом индукции, используя рекуррентную процедуру обращения матриц с помощью последовательного окаймления (см., например, [80]).

Рассмотрим вначале i -й шаг рекуррентной процедуры обращения матриц. Согласно [80], если

$$A_{i+1} = \left\| \begin{array}{c|c} A_i & \mathbf{a}_{i+1} \\ \hline \mathbf{a}_{i+1}^T & a_{i+1, i+1} \end{array} \right\|, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $\mathbf{a}_{i+1}^T = (a_{i+1,1}, \dots, a_{i+1,i})$; $\mathbf{a}_{i+1} = (a_{1,i+1}, \dots, a_{i,i+1})^T$ – окаймляющие, соответственно, вектор-строка и вектор-столбец длиной i -элементов, то

$$A_{i+1}^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c} A_i^{-1} + \frac{\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}}{\alpha_{i+1}} & -\frac{\mathbf{u}_{i+1}}{\alpha_{i+1}} \\ \hline -\frac{\mathbf{v}_{i+1}}{\alpha_{i+1}} & \frac{1}{\alpha_{i+1}} \end{array} \right\|, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{П3.3})$$

где $\alpha_{i+1} = a_{i+1,i+1} - \mathbf{a}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = a_{i+1,i+1} - \mathbf{v}_{i+1} \mathbf{a}_{i+1}$; $\mathbf{u}_{i+1} = A_i^{-1} \mathbf{a}_{i+1}$; $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1}^T A_i^{-1}$.

Пусть матрица A_i^{-1} (размера $i \times i$), найденная на предыдущем ($i - 1$)-шаге рекуррентной процедуры ($1 \leq i \leq n - 1$), имеет трехдиагональный вид, соответствующий (4.11), а i -мерные векторы \mathbf{a}_{i+1} и \mathbf{a}_{i+1}^T

$$\mathbf{a}_{i+1}^T = (\mathbf{a}_{i+1}^*)^T = \left[\prod_{l=1}^i \gamma_l a_{11}, \prod_{l=2}^i \gamma_l a_{22}, \dots, \gamma_i a_{ii} \right];$$

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1}^* = \left[\prod_{l=1}^i \lambda_l a_{11}, \prod_{l=2}^i \lambda_l a_{22}, \dots, \lambda_i a_{ii} \right]. \quad (\text{П3.4})$$

Выполняя необходимые вычисления, получаем формулы (П3.5) ниже:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}_{i+1} = A_i^{-1} \mathbf{a}_{i+1} = A_i^{-1} \mathbf{a}_{i+1}^* = [0, 0, \dots, 0, \lambda_i] = \mathbf{u}_{i+1}^* \\ \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1}^T A_i^{-1} = (\mathbf{a}_{i+1}^*)^T A_i^{-1} = [0, 0, \dots, 0, \gamma_i]^T = \mathbf{v}_{i+1}^* \end{array} \right\}. \quad (\text{П3.5})$$

Подставляя значения \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} из (П3.5) в (П3.3) и выполнив все необходимые операции, видим, что матрица A_{i+1}^{-1} также будет трехдиагональной, причем элементы A_{i+1}^{-1} будут соответствовать (4.11). Таким образом, если начальная матрица A_i^{-1} , с которой начинается процесс рекуррентного обращения, имеет трехдиагональный вид и окаймляющие векторы $\{\mathbf{a}_l, \mathbf{a}_l^T, l = \overline{i+1, n}\}$ выбираются из соответствующих строк и столбцов матрицы (4.9), то все последующие матрицы $\{A_l^{-1}, l = \overline{i+1, n}\}$, включая последнюю A_n^{-1} , будут трехдиагональными.

Последовательное вычисление $A_1^{-1}, A_2^{-1}, A_3^{-1}$ для матриц A_i^{-1} ($i = \overline{1, 3}$) показывает, что матрица A_3^{-1} является трехдиагональной, т.е. начальная часть процедуры (П3.3) для матриц вида (4.11) также приводит

к трехдиагональным матрицам. Это завершает доказательство первой части теоремы.

2. Формулы (4.11) получаются в процессе доказательства первой части теоремы.

3. Формулу (4.12) можно получить путем непосредственного вычисления определителя матрицы (4.9).

П3.4. Доказательство утверждения 4.1

Обозначим матрицу перестановок, содержащую m внедиагональных единиц и позволяющую соответственно переставить (перепорядочить) m строк или m столбцов, через $P(m)$ ($2 \leq m \leq n$). Тогда матрицу W_n можно представить в виде $W_n = P(l)Q_n P(k)$.

Отсюда

$$W_n^{-1} = (P(l)Q_n P(k))^{-1} = P^{-1}(k)Q_n^{-1}P^{-1}(l). \quad (\text{П3.6})$$

Матрицы перестановок являются унитарными, т.е. удовлетворяют условию $P^{-1} = P^T$ или $PP^T = I$. Учитывая это, для (П3.6) получаем $W_n^{-1} = P^T(k)Q_n^{-1}P^T(l)$, что завершает доказательство.

П3.5. Доказательство утверждения 4.2

Для данного случая можно записать $W_n = PQ_n P^T$, где $P = P(m)$ — матрица перестановки. Отсюда

$$W_n^{-1} = (PQ_n P^T)^{-1} = (P^T)^{-1} Q_n^{-1} P^{-1} = PQ_n^{-1} P^T.$$

То есть матрицы W_n и W_n^{-1} получаются из матриц Q_n и Q_n^{-1} соответственно путем умножения слева и справа на одни и те же матрицы перестановок или, другими словами, в обратной матрице надо переставить те же строки и столбцы, что и в исходной матрице.

П3.6. Доказательство теоремы 4.2

1. Для случая дискретных измерений (4.15) можно переписать в виде

$$k_{ij} = k_{im} k_{mj} / k_{mm}, \quad (\text{П3.7})$$

где $k_{ij} = k(t_i, t_j)$; $t_i, t_m, t_j \in \mathcal{E}_n^>$; $j > m > i$.

Недиагональные элементы k_{ij} ковариационной матрицы общего вида при $j > i$ можно представить следующим образом

$$k_{ij} = \prod_{l=i}^{j-1} \gamma_{il} k_{ii} = \Gamma_{i,j-1}^i k_{ii}, \quad (i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n}). \quad (\text{П3.8})$$

В (П3.8) нижние индексы i и $j - 1$ указывают на то, что произведение берется от i до $j - 1$, а верхний индекс i показывает, что коэффициенты γ_{ii} относятся к i -й строке матрицы.

Действительно, для любых вещественных чисел $k_{i,i+1}$ и k_{ii} (для которых $k_{i,i+1} = 0$, если $k_{ii} = 0$) всегда можно найти такое вещественное γ_{ii} , что $k_{i,i+1} = \gamma_{ii} k_{ii}$. Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$k_{i,i+2} = \gamma_{i,i+1} k_{i,i+1} = \gamma_{ii} \gamma_{i,i+1} k_{ii};$$

$$k_{ij} = \gamma_{i,j-1} k_{i,j-1} = \gamma_{ii} \gamma_{i,i+1} \dots \gamma_{i,j-1} k_{ii} = \prod_{l=i}^{j-1} \gamma_{il} = \Gamma_{i,j-1}^i k_{ii}.$$

При этом матрица K_n с учетом ее симметричности будет зависеть от $n(n+1)/2$ независимых элементов γ_{ij} ($i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i, n-1}$) и k_{ii} ($i = \overline{1, n}$).

Покажем, что если ковариационная функция процесса удовлетворяет (4.15), то величины γ_{ij} ($j > i$) не зависят от индекса i . Действительно, с учетом (П3.7) можно записать $k_{i,j+1} = k_{ij} k_{j,j+1} / k_{jj}$, но тогда

$$\gamma_{ij} = \frac{k_{i,j+1}}{k_{ij}} = \frac{k_{ij} k_{j,j+1}}{k_{ij} k_{jj}} = \frac{k_{j,j+1}}{k_{jj}} = \gamma_j, \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Таким образом, ковариационная матрица измерений КМ-процесса K_n^1 зависит только от $2n - 1$ величин γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) и k_{ii} ($i = \overline{1, n}$). При этом недиагональные элементы матрицы K_n^1 определяются выражением ($j > i$):

$$k_{ij} = \Gamma_{i,j-1}^i k_{ii} = \Gamma_{i,j-1} k_{ii}, \quad (i = \overline{1, n-1}; j = \overline{i+1, n}). \quad (\text{П3.9})$$

Сравнивая (П3.9) и (4.17) приходим к выводу о справедливости первого утверждения теоремы.

2. Как известно, ковариационная матрица в общем случае является положительно полуопределенной, т.е. может быть вырожденной. Покажем, что ковариационная матрица вида (4.17) является строго положительно определенной, исключая случай $K_n^1 = [0]$.

Из результатов, приведенных далее в приложении 5, вытекает необходимое условие существования матриц вида A_n^1 , а именно, все угловые миноры $(\det A_n^1(i = \overline{1, n}))$ матрицы A_n^1 должны быть отличны от нуля. Так как ковариационная матрица вида K_n^1 есть частный случай A_n^1 , то следовательно, и для нее все $\det K_i^1 \neq 0$ ($i = \overline{1, n}$). С другой стороны, как

и любая ковариационная матрица, матрица K_n^1 положительно полуопределена, т.е. все $\det K_i^1 \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$). Из этих двух условий вытекает, что для матрицы K_n^1 все $\det K_i^1 > 0$ ($i = \overline{1, n}$), т.е. (см. теорему П1) матрица K_n^1 строго положительно определена.

П3.7. Доказательство теоремы 4.3

Пусть задана произвольная положительно определенная матрица вида (4.17). Недиagonальные элементы (4.17) удовлетворяют условию

$$k_{ij} = \prod_{l=i}^{j-1} \gamma_l k_{ii}, \quad j > i, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (\text{П3.10})$$

(т.к. матрица (4.17) симметрична, то далее рассматривается только ее верхняя треугольная часть).

Аналогично (П3.10) можно записать, что

$$k_{im} = \prod_{l=i}^{m-1} \gamma_l k_{ii}, \quad (m > i); \quad k_{mj} = \prod_{l=m}^{j-1} \gamma_l k_{mm}, \quad j > m.$$

Умножение k_{im} на k_{mj} дает

$$k_{im} k_{mj} = \prod_{l=i}^{m-1} \gamma_l k_{ii} \prod_{l=m}^{j-1} \gamma_l k_{mm} = \prod_{l=i}^{j-1} \gamma_l k_{ii} k_{mm}.$$

Учитывая (П3.10), последнее выражение можно переписать в виде $k_{im} k_{mj} = k_{ij} k_{mm}$. Так как для положительно определенных матриц $k_{mm} \neq 0$, точнее $k_{mm} > 0$ при любом $m = \overline{1, n}$, то можно записать $k_{ij} = k_{im} k_{mj} / k_{mm}$. Последнее выражение есть дискретная форма записи условия (4.15), т.е. элементы матрицы (4.17) есть коэффициенты ковариаций измерений КМ-процесса. Так как мы не накладывали никаких дополнительных условий на (4.17), кроме положительной определенности, то из этого следует, что сказанное верно для любой положительно определенной матрицы вида (4.17).

П3.8. Доказательство теоремы 4.4

1. Пусть K_n есть ковариационная матрица измерений в точках плана $\varepsilon_n^>$, тогда матрица \tilde{K}_n для плана ε_n , полученного из $\varepsilon_n^>$ путем перестановки (перепорядочивания) l ($l \leq n$) точек, может быть записана в виде

$$\tilde{K}_n = P(l) K_n P^T(l), \quad (\text{П3.11})$$

где $P(l)$ матрица перестановки с l внедиагональными единицами, находящимися на пересечении строк и столбцов с номерами, соответствующими

переставленным точкам плана. Из (П3.11) вытекает справедливость первого пункта теоремы.

2. Согласно утверждению 4.2, матрица $(\tilde{K}_n)^{-1}$ будет определяться выражением $(\tilde{K}_n)^{-1} = P(l)K_n^{-1}P^T(l)$, откуда вытекает справедливость пункта 2 теоремы.

3. Матрицу \tilde{K}_n можно рассматривать как произведение вида (П3.11), где матрица $K_n = K_n^1$ – положительно определена. Отсюда следует положительная определенность \tilde{K}_n .

П3.9. Доказательство теоремы 5.1

Справедливость первого утверждения теоремы можно показать методом индукции, совершенно аналогично тому, как это было сделано при доказательстве первого пункта теоремы 4.1 (см. выше). Напомним, что при этом рассматривались первые три и i -й шаги процедуры обращения матриц методом последовательного окаймления [80]. На основе анализа этих шагов был сделан вывод о справедливости п. 1 теоремы 3.1. В связи со сказанным, доказательство теоремы 5.1 полностью повторяет доказательство теоремы 3.1, за исключением, несколько большей сложности выкладок.

Остановимся на получении условий, которым должны удовлетворять строки и столбцы квадратной матрицы A_n , чтобы обратная к ней матрица A_n^{-1} была ленточной с полушириной ленты равной m .

Из (П3.3) можно записать:

$$\mathbf{a}_{i+1} = A \mathbf{u}_{i+1}; \quad \mathbf{a}_{i+1}^T = \mathbf{v}_{i+1} A_i; \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (\text{П3.12})$$

Анализ (П3.3) показывает, что если векторы \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} при $m \leq i \leq n-1$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \dots & i-m & i-m+1 & i-m+2 & \dots & i-1 & i \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_{1i} & \lambda_{2i} & \dots & \lambda_{m-1,i} & \lambda_{mi} \end{array} \right\|^T = \mathbf{u}_{i+1}^* \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{i1} & \gamma_{i2} & \dots & \gamma_{i,m-1} & \gamma_{im} \end{array} \right\| = \mathbf{v}_{i+1}^* \end{aligned} \quad (\text{П3.13})$$

а при $i < m$ будут совпадать с векторами λ_{mi} и γ_{im} , соответственно, то матрица A_n^{-1} будет ленточной с полушириной ленты равной m (т.е. $A_n^{-1} = A_n^{-m}$).

С учетом (ПЗ.13) и обозначений (5.1)–(5.6) из (ПЗ.12) получаем условия ленточности квадратной матрицы A_n или, другими словами, соотношения, связывающие между собой строки с столбцы матрицы вида A_n^m :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{i+1} &= \mathbf{a}_{i+1}^* = A_i \mathbf{u}_{i+1}^* = A_{im} \lambda_{mi} \\ \mathbf{a}_{i+1}^T &= (\mathbf{a}_{i+1}^*)^T = \mathbf{v}_{i+1}^* A_i = \gamma_{im}^T A_{im} \end{aligned} \right\}, \quad (i = \overline{1, n-1}). \quad (\text{ПЗ.14})$$

2. Формулы (5.9)–(5.10) для вычисления ненулевых элементов матрицы A_n^m получаются непосредственно в процессе доказательства первого утверждения теоремы.

3. Формулу (5.11) можно получить путем непосредственного вычисления определителя матрицы A_n^m . При этом, все миноры матрицы A_n^m , за исключением $(2m+1)n - m(m+1)$ миноров $M_{ij} (|i-j| \leq m; \quad i, j = \overline{1, n})$, входящих в ленту с полушириной m , будут равны 0. С учетом этого факта формула вычисления определителя A_n^m принимает вид (5.11).

ПЗ.10. Доказательства теорем 5.2 и 5.3

Доказательства теорем 5.2 и 5.3 повторяют доказательства соответствующих теорем главы 4. При этом, естественно, многие скалярные величины заменяются на вектора и матрицы, в частности скалярные величины $\gamma_i (i = \overline{1, n-1})$ и $k_{ii} (i = \overline{1, n})$ заменяются на векторы γ_i и (под)матрицы $K_m[i]$, а вместо условия (2.12) рассматривается более общее условие (2.20).

ПЗ.11. Доказательство теоремы 6.1

1. Недиagonальные элементы (подматрицы) K_{ij} произвольной (т.е. не обязательно марковской) ковариационной матрицы вида (6.38) при $j > i$ можно представить в виде $K_{ij} = K_{ii} \Gamma_{ii} \Gamma_{i,i+1} \dots \Gamma_{i,j-1}$, где Γ_{ij} – квадратные подматрицы порядка m .

Действительно, пусть заданы вещественные квадратные матрицы $K_{i,i+1}$ и K_{ii} , такие, что если $K_{ii} = 0$, то $K_{i,i+1} = 0$ и $\det K_{ii} = 0$ только при $K_{ii} = 0$. Тогда всегда можно найти такую вещественную матрицу Γ_{ij} , что $K_{i,i+1} = K_{ii} \Gamma_{ii}$. Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\begin{aligned} K_{i,i+2} &= K_{i,i+1} \Gamma_{i,i+1} = K_{ii} \Gamma_{ii} \Gamma_{i,i+1} \\ &\quad \vdots \\ K_{ij} &= K_{i,j-1} \Gamma_{i,j-1} = K_{ii} \Gamma_{ii} \Gamma_{i,i+1} \dots \Gamma_{i,j-1} \end{aligned},$$

т.е.

$$\Gamma_{ij} = K_{ij}^{-1} K_{i,j+1}.$$

При этом, матрица (6.38) с учетом ее симметричности будет зависеть от $n(n + 1)/2$ независимых элементов (подматриц)

$$\Gamma_{ij} \left(\overline{i = 1, n-1}; \quad j = \overline{i, n-1} \right).$$

Покажем, что если ковариационная функция $K(s, t)$ векторного процесса удовлетворяет условию (6.50), то элементы Γ_{ij} ($j > i$) не зависят от индекса i , а при ($j < i$) Γ_{ij} не зависят от индекса j . Действительно, с учетом (6.50) можно записать, что $k_{i, j+1} = K_{ij} K_{jj}^{-1} K_{j, j+1}$, но тогда

$$\Gamma_{ij} = K_{ij}^{-1} K_{i, j+1} = K_{ij}^{-1} K_{ij} K_{jj}^{-1} K_{j, j+1} = K_{jj}^{-1} K_{j, j+1} = \Gamma_j, \quad (j = \overline{1, n-1}).$$

Последнее равенство показывает, что ковариационная матрица измерений векторного КМ-процесса зависит только от $2n - 1$ подматриц Γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) и K_{ii} ($i = \overline{1, n}$). Отметим, что это утверждение верно и для ковариационной матрицы измерений векторного марковского процесса \mathbf{K}_N , сформированной для схемы обработки 2.

Таким образом, внедиагональные элементы ковариационной матрицы измерений векторного КМ-процесса при $j > i$ можно представить в виде

$$K_{ij} = K_{ii} \Phi_{i, j-1} \left(i = \overline{1, n-1}; \quad j = \overline{i+1, n} \right). \quad (\text{П3.15})$$

Сравнивая (П3.15) и выражение (6.54) делаем вывод о справедливости п. 1 теоремы.

2. Справедливость п. 2 теоремы можно показать с помощью рекуррентной процедуры обращения матриц методом окаймления, точно также, как это было сделано при доказательстве теоремы 4.2 (см. выше). Необходимо только учесть, что при этом матрицы \mathbf{K}_N и $\mathbf{C}_N^m = \mathbf{K}_N^{-m}$ надо рассматривать как блочные с блоками, представляющими собой квадратные подматрицы K_{ij} и C_{ij} порядка m . И, естественно, необходимо учитывать правила обращения с матричными и векторными величинами.

3. Справедливость формулы (6.58) можно проверить прямым вычислением определителя угловых подматриц \mathbf{K}_i^m ($i = \overline{1, n}$).

П3.12. Доказательство теоремы 6.2

Для доказательства первого пункта теоремы достаточно раскрыть подматрицы Γ_i , Φ_{ij} , K_{ij} и записать выражение для ν -го элемента ij -го элемента матрицы \mathbf{K}_N .

С учетом (6.61) имеем:

$$k_{\nu\mu}(t_i, t_j) = k_{ij}^{\nu\mu} = \begin{cases} (k_{ii}^{\nu})^T \phi_{i,j-1}^{\mu}, & (j > i). \\ k_{ii}^{\nu\mu}, & (j = i); \\ (i, j = \overline{1, n}; \nu, \mu = \overline{1, m}). \\ (\phi_{i-1, j}^{\nu})^T k_{jj}^{\mu}, & (j < i). \end{cases} \quad (\text{ПЗ.16})$$

С помощью преобразования (6.59) из (6.54) имеем (6.62) с элементами (ПЗ.16).

2. Для доказательства пункта 2 теоремы 6.2 раскроем подматрицы A_i^{-1} , M_i , Γ_i и запишем выражения для $\nu\mu$ -го элемента ненулевых подматриц C_{ii}^m и $C_{i,i+1}^m$ матрицы \mathbf{K}_N . Можно видеть, что они будут иметь вид (6.15).

С помощью преобразования (6.59) приведем матрицу (6.54) к виду (6.62). При этом трехдиагональная по отношению к подматрицам K_{ij} матрица \mathbf{K}_N^{-m} переходит в блочно трехдиагональную матрицу \mathfrak{K}_N^{-m} вида (6.63) с ненулевыми скалярными элементами, определяемыми выражениями (6.64).

3) Вычисляется новый диагональный элемент матрицы A_{i+1}^1 :

$$c_{i+1,i+1} = \frac{1}{\alpha_{i+1}}. \quad (\text{П4.3})$$

Таким образом, получаем предельно простую процедуру рекуррентного обращения матрицы A_n^1 , а следовательно, и матрицы K_n^1 .

2. Обращение неупорядоченной матрицы \tilde{A}_n^1 и КМИ КМ-процесса в точках плана общего вида ε_n

Ковариационная матрица \tilde{K}_n^1 измерений КМ-процесса в точках плана ε_n является частным случаем матрицы \tilde{A}_n^1 , получаемой из A_n^1 путем перестановки (переупорядочивания) части ее одноименных строк и столбцов. Поэтому, в первой половине данного раздела, для большей общности получаемых результатов, рассмотрим построение рекуррентной процедуры обращения матриц вида \tilde{A}_n^1 . Особенности обращения матриц вида \tilde{K}_n^1 рассматриваются во второй части раздела. Ниже при обозначении матриц \tilde{A}_n^1 и \tilde{K}_n^1 будем опускать надстрочный индекс «1», т.е. использовать более простые обозначения \tilde{A}_n и \tilde{K}_n .

2.1. *Рекуррентное обращение матриц \tilde{A}_n* . Будем считать, что строки и столбцы матрицы \tilde{A}_n , а также все ее элементы сохраняют нумерацию, соответствующую нумерации строк и столбцов (элементов) матрицы A_n^1 (см. ниже, пример). То есть под номером $n(j)$, j -й строки или j -го столбца ($j = \overline{1, n}$) матрицы \tilde{A}_n , понимается порядковый номер этой строки (столбца) в A_n^1 . Так как номера одноименных строк и столбцов матрицы \tilde{A}_n при этом будут совпадать, ниже будем вычислять и оперировать только с номерами строк.

Пусть известна матрица A_i^{-1} , обратная к \tilde{A}_i , и имеющая (см. следствии 4.1) не более $(3i - 2)$ ненулевых элементов. Тогда матрицу A_{i+1}^{-1} , обратную к \tilde{A}_{i+1} , можно найти следующим образом.

1. Пусть номер $n(i + 1)$ очередной $(i + 1) - 1$ строки матрицы \tilde{A}_n больше номеров всех предыдущих ее строк, вошедших в (под)матрицу \tilde{A}_i (см. рис. П4.2). Математически это можно записать так:

$$n(i + 1) > n(r) = \max_{1 \leq j \leq i} \{n(j)\}.$$

В этом случае, вектор-столбец \mathbf{u}_{i+1} и вектор-строка \mathbf{v}_{i+1} в рекуррентном выражении (П3.5) будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= A_i^{-1} \mathbf{a}_{i+1} = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & r-1 & r & & r+1 & \dots & i \end{array} \right)^T \\ & \left(\begin{array}{cccccccc} 0, & \dots, & 0, & u_{r,i+1}, & 0, & \dots, & 0 \end{array} \right) \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{a}_{i+1}^T A_i^{-1} = \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & \dots & r-1 & r & & r+1 & \dots & i \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{cccccccc} 0, & \dots, & 0, & v_{i+1,r}, & 0, & \dots, & 0 \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.4})$$

где $u_{r,i+1} = \lambda_{n(r),n(i+1)}$ и $v_{i+1,r} = \gamma_{n(i+1),n(r)}$.

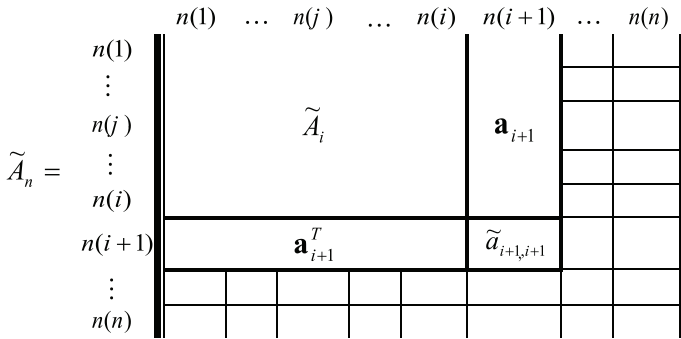


Рис. П4.2. Выбор подматриц \tilde{A}_i и векторов \mathbf{a}_{i+1} , \mathbf{a}_{i+1}^T из матрицы \tilde{A}_n

Примечание. $(i = \overline{1, n-1})$, $\tilde{a}_{i+1,i+1} = a_{n(i+1),n(i+1)}$.

Величины λ_{ij} и γ_{ij} в (П4.4) связаны с величинами λ_i ($i = \overline{1, n-1}$) и γ_i ($i = \overline{1, n-1}$) в (4.9) следующим образом:

$$\lambda_{ij} = \prod_{l=i}^{j-1} \lambda_l \quad (j > i), \quad \gamma_{ij} = \prod_{l=j}^{i-1} \gamma_l \quad (j < i), \quad (i, j = \overline{1, n}) \quad (\text{П4.5})$$

(Величинам Λ_{ij} и Γ_{ij} в (4.9) будут соответствовать $\lambda_{i,j+1}$ и $\gamma_{i+1,j}$ в (П4.5).

Введение вместо Λ_{ij} и Γ_{ij} новых обозначений $\lambda_{i,j+1}$ и $\gamma_{i+1,j}$ для матрицы \tilde{A}_n дает возможность более краткой записи индексов в последующем изложении.)

Из (П4.4) следует, что матрица $[\mathbf{u}_{i+1} \ \mathbf{v}_{i+1}]$ будет иметь единственный ненулевой элемент, находящийся на пересечении r -й строки и r -го столбца (см. рис. П4.3), т.е. все элементы A_i^{-1} войдут в матрицу A_{i+1}^{-1} неизменными, за исключением элемента c_{rr} (c_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$) — элементы матрицы \tilde{A}_n).

Таким образом, процедура вычисления A_{i+1}^{-1} при $n(i+1) > n(r)$, будет состоять в следующем.

а) Корректировка элемента c_{rr} матрицы A_i^{-1} :

$$c_{rr}^* = c_{rr} + u_{r,i+1}v_{i+1,r}/\alpha_{i+1}, \quad (\text{П4.6})$$

где c_{rr}^* — скорректированное значение c_{rr} .

В (П4.6) величины $u_{r,i+1}$, $v_{i+1,r}$ определены в (П4.4), а

$$\alpha_{i+1} = \tilde{a}_{i+1,i+1} - \mathbf{a}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = a_{n(i+1),n(i+1)} - \lambda_{n(r),n(i+1)} \gamma_{n(i+1),n(r)} a_{n(r),n(r)} = \alpha_{n(r),n(i+1)} \quad (\text{П4.7})$$

где
$$\alpha_{ml} = a_{ll} - \lambda_{ml} \gamma_{lm} a_{mm} \quad (l > m). \quad (\text{П4.8})$$

б) ненулевые элементы новой строки и столбца матрицы A_{i+1}^{-1} вычисляются по формулам:

$$c_{r,i+1} = -u_{r,i+1}/\alpha_{i+1}, \quad c_{i+1,r} = -v_{i+1,r}/\alpha_{i+1}. \quad (\text{П4.9})$$

в) вычисляется новый диагональный элемент матрицы A_{i+1}^{-1} :

$$c_{i+1,i+1} = 1/\alpha_{i+1}. \quad (\text{П4.10})$$

$$[\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}] = \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & \dots & r & \dots & i & & \mathbf{u}_{i+1} \\ \hline 1 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ r & 0 & & u_{r,i+1}v_{i+1,r} & & 0 & & u_{r,i+1} \\ \vdots & & & & & & & \\ i & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \end{array} \\ \\ \mathbf{v}_{i+1} & & & 0 & & v_{i+1,r} & & 0 \end{array}$$

Рис. П4.3. Вид векторов \mathbf{u}_{i+1} , \mathbf{v}_{i+1} и матрицы $[\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}]$ при $n(i+1) > n(r)$

Примечание. $u_{r,i+1}$, $v_{i+1,r}$ — ненулевой элемент матрицы $[\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}]$.

2. Пусть номер $n(i+1)$ очередной $(i+1)$ -й строки \tilde{A}_n меньше номеров всех предыдущих строк \tilde{A}_n , вошедших в \tilde{A}_i , т.е.

$$n(i+1) < n(l) = \min_{1 \leq j \leq i} \{n(j)\}.$$

В этом случае, векторы \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \left(\begin{matrix} 1 & \dots & l-1 & l & & l+1 & \dots & i \\ 0, \dots, 0, & u_{l,i+1}, & 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)^T \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \left(\begin{matrix} 1 & \dots & l-1 & l & & l+1 & \dots & i \\ 0, \dots, 0, & v_{l+1,l}, & 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)^T \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.11})$$

где $u_{l,i+1} = \gamma_{n(l),n(i+1)}$ и $v_{l+1,l} = \lambda_{n(i+1),n(l)}$.

Из (П4.10) следует, что матрица $[\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}]$, как и в первом случае ($n(i+1) > n(r)$), будет иметь только один ненулевой элемент, но на пересечении строки и столбца с номерами l . Величина этого элемента будет равна $u_{l,i+1} \cdot v_{l+1,l}$. Вид матрицы $[\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+1}]$ и векторов \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} при этом будет соответствовать рис. П4.3 с заменой индекса r на l .

Таким образом, процедура вычисления A_{i+1}^{-1} при $(n(i+1) > n(l))$ будет полностью аналогична процедуре нахождения A_{i+1}^{-1} при $(n(i+1) > n(r))$ с заменой в формулах (П4.6), (П4.9) и (П4.10) величин $u_{r,i+1}$ и $v_{i+1,r}$ на $u_{l,i+1}$ и $v_{l+1,l}$ соответственно. При этом величина α_{i+1} в (П4.6), (П4.9) и (П4.10) должна вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= a_{n(i+1),n(i+1)} - \mathbf{a}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = \alpha_{n(i+1),n(l)} \frac{a_{n(i+1),n(i+1)}}{a_{n(l),n(l)}} = \\ &= \tilde{a}_{i+1,i+1} - \mathbf{a}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = \tilde{\alpha}_{i+1,l} \frac{\tilde{a}_{i+1,i+1}}{\tilde{a}_{ll}}. \end{aligned} \quad (\text{П4.12})$$

3. Пусть номер $n(i+1)$ очередной $(i+1)$ -й строки \tilde{A}_n лежит между номерами предыдущих строк \tilde{A}_n , вошедших в \tilde{A}_i , т.е.

$$n(l) > n(i+1) > n(r),$$

где $n(l) = \min_{1 \leq j \leq i} \{n(j) \mid n(j) > n(i+1)\}$ и $n(r) = \max_{1 \leq j \leq i} \{n(j) \mid n(j) < n(i+1)\}$.

В этом случае векторы \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{i+1} &= \left(\begin{matrix} 1 & \dots & l-1 & l & & l+1 & \dots & r-1 & r & & r+1 & & i \\ 0, \dots, 0, & u_{l,i+1}, & 0, \dots, 0, & u_{r,i+1}, & 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)^T \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \left(\begin{matrix} 1 & \dots & l-1 & l & & l+1 & \dots & r-1 & & & r+1 & & i \\ 0, \dots, 0, & v_{l+1,l}, & 0, \dots, 0, & v_{i+1,r}, & 0, \dots, 0 \end{matrix} \right)^T \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.13})$$

где

$$u_{l,i+1} = \gamma_{n(l),n(i+1)} \frac{\alpha_{n(r),n(i+1)}}{\alpha_{n(r),n(l)}}; \quad u_{r,i+1} = \lambda_{n(r),n(i+1)} \frac{\alpha_{n(i+1),n(l)}}{\alpha_{n(r),n(l)}};$$

$$v_{i+1,l} = \lambda_{n(i+1),n(l)} \frac{\alpha_{n(r),n(i+1)}}{\alpha_{n(r),n(l)}}; \quad v_{i+1,r} = \gamma_{n(i+1),n(r)} \frac{\alpha_{n(i+1),n(l)}}{\alpha_{n(r),n(l)}}.$$

Из (П4.13) следует, что матрица $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$ будет иметь четыре ненулевых элемента, находящихся на пересечении строк и столбцов номерами r и l , как это показано на рис. П4.4. Таким образом, перед включением матрицы A_i^{-1} в матрицу A_{i+1}^{-1} в A_i^{-1} достаточно скорректировать четыре элемента: c_{ll} , c_{lr} , c_{rl} и c_{rr} и процедура вычисления A_{i+1}^{-1} в данном случае будет состоять в следующем.

а) Корректируются четыре элемента матрицы A_i^{-1} по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_{rr}^* &= c_{rr} + u_{r,i+1}v_{i+1,r}/\alpha_{i+1}, & c_{lr}^* &= c_{lr} + u_{l,i+1}v_{i+1,r}/\alpha_{i+1}, \\ c_{rl}^* &= c_{rl} + u_{r,i+1}v_{i+1,l}/\alpha_{i+1}, & c_{ll}^* &= c_{ll} + u_{l,i+1}v_{i+1,l}/\alpha_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.14})$$

где c_{ll}^* , c_{lr}^* , c_{rl}^* и c_{rr}^* — скорректированные значения элементов c_{ll} , c_{lr} , c_{rl} и c_{rr} .

В (П4.14) величины $u_{r,i+1}$, $u_{l,i+1}$, $v_{i+1,r}$, $v_{i+1,l}$ определяются выражениями (П4.13), а

$$\alpha_{i+1} = \frac{\alpha_{n(r),n(i+1)}\alpha_{n(i+1),n(l)}}{\alpha_{n(r),n(l)}}, \quad (\text{П4.15})$$

где α_{ml} определено в (П4.8).

$$\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ l \\ \vdots \\ r \\ \vdots \\ i \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & u_{l,i+1}v_{i+1,l} & 0 & u_{l,i+1}v_{i+1,r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & u_{r,i+1}v_{i+1,l} & 0 & u_{r,i+1}v_{i+1,r} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \mathbf{u}_{i+1} \\ 0 \\ u_{l,i+1} \\ 0 \\ u_{r,i+1} \\ 0 \end{array} \\ \mathbf{v}_{i+1} \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & v_{i+1,l} & 0 & v_{i+1,r} & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. П4.4. Вид векторов \mathbf{u}_{i+1} и \mathbf{v}_{i+1} и матрицы $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$ при $n(l) > n(i+1) > n(r)$

б) Вычисляются ненулевые элементы новых строки и столбца матрицы A_{i+1}^{-1} по формулам

$$\left. \begin{aligned} c_{l,i+1} &= -u_{l,i+1}/\alpha_{i+1}, & c_{r,i+1} &= -u_{r,i+1}/\alpha_{i+1}, \\ c_{i+1,l} &= -v_{i+1,l}/\alpha_{i+1}, & c_{i+1,r} &= -v_{i+1,r}/\alpha_{i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.16})$$

в) Вычисляется новый диагональный элемент матрицы A_{i+1}^{-1} по формуле (П4.10), где α_{i+1} определяется формулой (П4.15).

2.2. Рекуррентное обращение матрицы \tilde{K}_n . При построении процедуры рекуррентного обращения матрицы \tilde{A}_n мы исходили из того, что известно соответствие строк и столбцов \tilde{A}_n (а, следовательно, всех ее элементов) строкам и столбцам (элементам) упорядоченной матрицы A_n^1 и использовали нумерацию (индексацию) величин λ_{ij} , γ_{ij} и α_{ij} , соответствующую A_n^1 .

Здесь мы будем предполагать, что упорядоченная матрица K_n^1 , соответствующая \tilde{K}_n , неизвестна. Это больше соответствует реальной ситуации, когда измерения поступают в произвольной последовательности и матрица \tilde{K}_n формируется в порядке поступления измерений, т.е. в каждый момент времени известна только ее левая верхняя подматрица \tilde{K}_i .

В этом случае, в основу построения алгоритма рекуррентного обращения \tilde{K}_n можно положить сравнение координаты точки (под координатой точки здесь и ниже понимается расстояние от точки до 0), в которой выполнено текущее измерение, с координатами точек предыдущих измерений. Это позволяет без знания, собственно, матрицы K_n^1 , работать с матрицей \tilde{K}_n , как с упорядоченной матрицей K_n^1 .

Основными отличиями процедуры обращения \tilde{K}_n от процедуры обращения \tilde{A}_n являются:

1) учет равенств $\lambda_{ji} = \gamma_{ij}$ (см. (П4.5)) и $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{u}_{i+1}^T$, имеющих место вследствие симметричности \tilde{K}_n (ниже будут использоваться обозначения γ_{ij} ($j > i$) и \mathbf{u}_{i+1});

2) нумерация (индексация) величин γ_{ij} и α_{ij} согласно порядку расположения элементов (строк и столбцов) в неупорядоченной матрице \tilde{K}_n , т.е. в порядке поступления измерений.

Пусть известны:

– матрица K_i^{-1} , обратная ковариационной матрице \tilde{K}_i измерений КМ-процесса в точках плана ϵ_i ;

– i -мерный вектор \mathbf{k}_{i+1} , элементы которого есть ковариации измерения $Z(t)$ в точке t_{i+1} с измерениями $Z(t)$ в точках ε_i (или известен i -мерный фрагмент вектора коэффициентов $\{\gamma_{ij}, i, j = \overline{1, i}; j > i\}$);

– величина $k_{i+1, i+1}$, представляющая собой дисперсию наблюдаемого процесса $Z(t)$ в точке t_{i+1} .

Необходимо найти матрицу K_{i+1}^{-1} , обратную ковариационной матрице \tilde{K}_{i+1} измерений КМ-процесса в точках плана $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + t_{i+1}$.

Здесь, в зависимости от расположения точки t_{i+1} относительно точек плана $\varepsilon_i = \{t_1, t_2, \dots, t_i\}$, возможны три различные ситуации.

1. Координата новой точки плана t_{i+1} больше координат точек, входящих в ε_i , т.е. $t_{i+1} > t_r = \max_{1 \leq j \leq i} \{t_j\}$. При этом вектор

$$\mathbf{u}_{i+1} = K_i^{-1} \mathbf{k}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r-1 & r & & r+1 & \dots & i \\ 0, & \dots, & 0, & u_{r, i+1}, & 0, & \dots, & 0 \end{pmatrix}^T, \quad (\text{П4.17})$$

где $u_{r, i+1} = \gamma_{r, i+1}$ и

$$\gamma_{ml} = k_{ml}/k_{mm}; \quad k_{ml} = k(t_m, t_l); \quad t_l \geq t_m. \quad (\text{П4.18})$$

Из (П4.17) следует, что

$$\alpha_{i+1} = k_{i+1, i+1} - \mathbf{k}_{i+1}^T \mathbf{u}_{i+1} = \alpha_{r, i+1}, \quad (\text{П4.19})$$

где
$$\alpha_{ml} = k_{ll} - \gamma_{ml}^2 k_{mm} = k_{ll} - k_{ml}^2 / k_{mm}, \quad (t_m < t_l). \quad (\text{П6.20})$$

При $m = i$ и $l = i + 1$ величина

$$\alpha_{ml} = \alpha_{i, i+1} = k_{i+1, i+1} - \gamma_{i, i+1}^2 k_{ii} = k_{i+1, i+1} - \gamma_i^2 k_{ii} = \alpha_{i+1},$$

т.е. совпадает с величиной α_{i+1} в (4.18).

В данном случае, симметричная матрица $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}^T]$ имеет вид, аналогичный виду матрицы $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$ при $n(i + 1) > n(r)$, изображенной на рис. П4.3.

Формулы (П4.6) и (П4.9) для матрицы \tilde{K}_n принимают вид:

$$c_{rr}^* = c_{rr} + u_{r, i+1}^2 / \alpha_{i+1}, \quad c_{r, i+1} = c_{i+1, r} = -u_{r, i+1} / \alpha_{i+1}. \quad (\text{П4.21})$$

Формула (П4.10) остается неизменной, но α_{i+1} вычисляется с помощью (П4.19).

2. Координата новой точки плана t_{i+1} меньше координат точек ε_r , т.е. $t_{i+1} < t_l = \min_{1 \leq j \leq i} \{t_j\}$. При этом

$$\mathbf{u}_{i+1} = \left(0, \dots, 0, u_{l,i+1}, 0, \dots, 0 \right)^T; \alpha_{i+1} = \alpha_{i+1,l} \cdot \frac{k_{i+1,i+1}}{k_{ll}}, \quad (\text{П4.22})$$

где $u_{l,i+1} = \gamma_{i+1,l} k_{i+1,i+1} / k_{ll} = k_{i+1,l} / k_{ll}$ и величина α_{ml} ($t_l > t_m$) определена ранее в (П4.20).

Матрица $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}^T]$ в данном случае будет иметь вид, подобный виду матрицы $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$, изображенной на рис. П4.3, с заменой индексов r на l и вычисление матрицы K_{i+1}^{-1} будет заключаться в корректировке элемента c_{ll} матрицы K_i^{-1} и вычислении ненулевых элементов окаймляющих векторов по формулам (П4.21) с заменой c_{rr} на c_{ll} и $u_{r,i+1}$ на $u_{l,i+1}$, соответственно.

3. Новая точка плана t_{i+1} лежит между точками плана ε_i , т.е. $t_l > t_{i+1} > t_r$, где $t_l = \min_{1 \leq j \leq i} \{t_j \mid t_j > t_{i+1}\}$ и $t_r = \max_{1 \leq j \leq i} \{t_j \mid t_j > t_{i+1}\}$. При этом вектор

$$\mathbf{u}_{i+1} = \left(0, \dots, 0, u_{l,i+1}, 0, \dots, 0, u_{r,i+1}, 0, \dots, 0 \right)^T, \quad (\text{П4.23})$$

где

$$u_{l,i+1} = \gamma_{i+1,l} \alpha_{r,i+1} / \alpha_{rl} = k_{i+1,l} \alpha_{r,i+1} / (k_{i+1,i+1} \alpha_{rl});$$

$$u_{r,i+1} = \gamma_{r,i+1} \alpha_{i+1,l} / \alpha_{rl} = k_{r,i+1} \alpha_{i+1,l} / (k_{rr} \alpha_{rl}).$$

С учетом (П4.23) формула вычисления α_{i+1} принимает вид:

$$\alpha_{i+1} = \alpha_{r,i+1} \alpha_{i+1,l} / \alpha_{rl} = \frac{(k_{i+1,i+1} - \gamma_{r,i+1}^2 k_{rr})(k_{ll} - \gamma_{i+1,l}^2 k_{i+1,i+1})}{k_{ll} - \gamma_{r,i+1}^2 \gamma_{i+1,l}^2 k_{rr}} =$$

$$= \frac{(k_{i+1,i+1} - k_{r,i+1}^2 / k_{rr})(k_{ll} - k_{i+1,l}^2 / k_{i+1,i+1})}{k_{ll} - \gamma_{r,i+1}^2 \gamma_{i+1,l}^2 k_{rr}}. \quad (\text{П4.24})$$

Матрица $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{u}_{i+1}^T]$ в данном случае будет иметь вид, подобный виду матрицы $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$ при $n(l) > n(i+1) > n(r)$, изображенной на рис. П4.4.

Таким образом, здесь, как и в случае с матрицей \tilde{A}_n , перед включением матрицы K_i^{-1} в K_{i+1}^{-1} достаточно скорректировать в K_i^{-1} четыре элемента, а точнее, с учетом симметричности K_i^{-1} , только три элемента.

Формулы (П4.14) и (П4.16) для матрицы \tilde{K}_n принимают вид:

$$c_{rr}^* = c_{rr} + \frac{u_{r,i+1}^2}{\alpha_{i+1}}; \quad c_{rl}^* = c_{lr}^* = c_{lr} + \frac{u_{l,i+1}^2}{\alpha_{i+1}}; \quad c_{ll}^* = c_{ll} + \frac{u_{l,i+1}^2}{\alpha_{i+1}}; \quad (\text{П4.25})$$

$$c_{l,i+1} = c_{i+1,l} = -u_{l,i+1}/\alpha_{i+1}; \quad c_{r,i+1} = c_{i+1,r} = -u_{r,i+1}/\alpha_{i+1}. \quad (\text{П4.26})$$

Элемент $c_{i+1,i+1}$ матрицы K_{i+1}^{-1} вычисляется по формуле (П4.10), где α_{i+1} находится по формуле (П4.24).

В заключение рассмотрим пример, подтверждающий справедливость полученных результатов.

3. Пример П4.1

Пусть матрица A_n^1 имеет вид:

$$A_5^1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{11}\Lambda_{11} & a_{11}\Lambda_{12} & a_{11}\Lambda_{13} & a_{11}\Lambda_{14} \\ \Gamma_{11}a_{11} & a_{22} & a_{22}\Lambda_{22} & a_{22}\Lambda_{23} & a_{22}\Lambda_{24} \\ \Gamma_{21}a_{11} & \Gamma_{22}a_{22} & a_{33} & a_{33}\Lambda_{33} & a_{33}\Lambda_{34} \\ \Gamma_{31}a_{11} & \Gamma_{32}a_{22} & \Gamma_{33}a_{33} & a_{44} & a_{44}\Lambda_{44} \\ \Gamma_{41}a_{11} & \Gamma_{42}a_{22} & \Gamma_{43}a_{33} & \Gamma_{44}a_{44} & a_{55} \end{array} \right\| \end{matrix}. \quad (\text{П4.27})$$

Для удобства записи индексов в дальнейшем изложении, заменим величины Λ_{ij} ($j \geq i$) и Γ_{ij} ($j \leq i$) в A_5^1 на $\lambda_{i,j+1}$ и $\gamma_{i+1,j}$, соответственно (определение величин $\lambda_{i,j}$ и $\gamma_{i,j}$ дано в (П4.5)). Получим матрицу \tilde{A}_5 из A_5^1 путем следующей перестановки строк и столбцов :

$$\tilde{A}_5 = \begin{matrix} & \begin{matrix} n(1)=3 & n(2)=2 & n(3)=5 & n(4)=4 & n(5)=1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n(1)=3 \\ n(2)=2 \\ n(3)=5 \\ n(4)=4 \\ n(5)=1 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccccc} a_{33} & \gamma_{32}a_{22} & a_{33}\lambda_{35} & a_{33}\lambda_{34} & \gamma_{31}a_{11} \\ a_{22}\lambda_{23} & a_{22} & a_{22}\lambda_{25} & a_{22}\lambda_{24} & \gamma_{21}a_{11} \\ \gamma_{53}a_{33} & \gamma_{52}a_{22} & a_{55} & \gamma_{54}a_{44} & \gamma_{51}a_{11} \\ \gamma_{43}a_{33} & \gamma_{42}a_{22} & a_{44}\lambda_{45} & a_{44} & \gamma_{41}a_{11} \\ a_{11}\lambda_{13} & a_{11}\lambda_{12} & a_{11}\lambda_{15} & a_{11}\lambda_{14} & a_{11} \end{array} \right\| \end{matrix}. \quad (\text{П4.28})$$

Предположим, что к началу применения рекуррентной процедуры обращения матриц вида \tilde{A}_n нам известны: $\tilde{A}_1 = a_{33}$ и $(\tilde{A}_n)^{-1} = A_n^{-1} = a_{33}^{-1}$. Тогда вычисление матрицы A_5^{-1} сводится к следующим шагам:

1 шаг

1) Вычисление векторов \mathbf{u}_2 и \mathbf{v}_2 :

$$\mathbf{u}_2 = A_1^{-1} \mathbf{a}_2 = \gamma_{32} \frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{32}}{a_{33}}; \quad \mathbf{v}_2 = a_2^T A_1^{-1} = \lambda_{23} \frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

2) Вычисление величины α_2 :

$$\alpha_2 = a_{22} - \lambda_{23} \gamma_{32} \frac{a_{22}^2}{a_{33}} = \alpha_{23} \frac{a_{22}}{a_{33}},$$

где $\alpha_{23} = a_{33} - \lambda_{23} \gamma_{32} a_{22}$.

3) Вычисление матрицы $[\mathbf{u}_{i+1} \mathbf{v}_{i+1}]$: $\mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 = \lambda_{23} \gamma_{32} a_{22}^2 / a_{33}^2$.

4) Вычисление

$$A_2^{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c} 1/\alpha_{23} & -\gamma_{32}/\alpha_{23} \\ \hline -\lambda_{23}/\alpha_{23} & a_{33}/(\alpha_{23} a_{22}) \end{array} \right\|.$$

2 шаг

1) $\mathbf{u}_3 = A_2^{-1} \mathbf{a}_3 = A_2^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_{35} a_{33} \\ \lambda_{25} a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{35} \\ 0 \end{bmatrix}$ (здесь учтено, что $\lambda_{25} = \lambda_{23} \lambda_{35}$);

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3^T A_2^{-1} = [\gamma_{53} a_{33} \mid \gamma_{52} a_{22}] A_2^{-1} = [\gamma_{53} \mid 0]$ (здесь учтено, что $\gamma_{52} = \gamma_{53} \gamma_{32}$).

2) $\alpha_3 = a_{55} - \lambda_{35} \gamma_{53} a_{33} = \alpha_{35}$, где $\alpha_{35} = a_{55} - \lambda_{35} \gamma_{53} a_{33}$.

3) $\mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c} \lambda_{35} \gamma_{53} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|.$

$$4) A_3^{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 5 \\ \hline \frac{\mu_{25}}{\alpha_{23}\alpha_{35}} & -\frac{\gamma_{32}}{\alpha_{23}} & -\frac{\lambda_{35}}{\alpha_{35}} \\ \hline -\frac{\lambda_{23}}{\alpha_{23}} & \frac{a_{33}}{\alpha_{23}a_{22}} & 0 \\ \hline -\frac{\gamma_{53}}{\alpha_{35}} & 0 & \frac{1}{\alpha_{35}} \end{array} \right\|$$

$$(\mu_{25} = a_{55} - \gamma_{32}\lambda_{23}\gamma_{53}\lambda_{35}a_{22}).$$

3 шаг

$$1) \mathbf{u}_4 = A_3^{-1} \mathbf{a}_4 = A_3^{-1} \cdot \begin{array}{c} \lambda_{34}a_{33} \\ \lambda_{24}a_{22} \\ \gamma_{54}a_{44} \end{array} = \begin{array}{c} \lambda_{34}\alpha_{45}/\alpha_{35} \\ 0 \\ \gamma_{54}\alpha_{34}/\alpha_{35} \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

(учтено, что $\lambda_{24} = \lambda_{23}\lambda_{34}$);

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{a}_4^T A_3^{-1} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \gamma_{43}a_{33} & \gamma_{42}a_{22} & \lambda_{45}a_{44} \end{array} \right\| \cdot A_3^{-1} = 4 \left\| \begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 5 \\ \hline \gamma_{43} \frac{\alpha_{45}}{\alpha_{35}} & 0 & \lambda_{45} \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{35}} \end{array} \right\|$$

(здесь учтено, что $\gamma_{42} = \gamma_{43}\gamma_{32}$).

$$2) \alpha_4 = a_{44} - \mathbf{a}_4^T \mathbf{u}_4 = a_{44} - \mathbf{v}_4 \mathbf{a}_4 = \frac{\alpha_{34}\alpha_{45}}{\alpha_{35}}, \text{ где } \begin{cases} \alpha_{34} = a_{44} - \lambda_{34}\gamma_{43}a_{33} \\ \alpha_{45} = a_{55} - \lambda_{45}\gamma_{54}a_{44} \end{cases}$$

$$3) \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 5 \\ \hline \gamma_{43}\lambda_{34} \frac{\alpha_{45}^2}{\alpha_{35}^2} & 0 & \lambda_{35} \frac{\alpha_{34}\alpha_{45}}{\alpha_{35}^2} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \gamma_{53} \frac{\alpha_{34}\alpha_{45}}{\alpha_{35}^2} & 0 & \gamma_{54}\lambda_{45} \frac{\alpha_{34}^2}{\alpha_{35}^2} \end{array} \right\|.$$

$$4) A_4^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 3 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 3 & \frac{\mu_{24}}{\alpha_{23}\alpha_{34}} & -\frac{\gamma_{32}}{\alpha_{23}} & 0 & -\frac{\lambda_{34}}{\alpha_{34}} \\ \hline 2 & -\frac{\lambda_{23}}{\alpha_{23}} & \frac{a_{33}}{\alpha_{23}a_{22}} & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{45}} & -\frac{\gamma_{54}}{\alpha_{45}} \\ \hline 4 & -\frac{\gamma_{45}}{\alpha_{34}} & 0 & -\frac{\lambda_{45}}{\alpha_{45}} & \frac{\mu_{35}}{\alpha_{34}\alpha_{45}} \\ \hline \end{array} \end{array}.$$

В приведенной записи матрицы A_4^{-1} учтено, что $\mu_{35} = \alpha_{35}$; $\lambda_{35} = \lambda_{34}\lambda_{45}$; $\gamma_{53} = \gamma_{54}\gamma_{43}$; $\mu_{24} = a_{44} - \gamma_{32}\lambda_{23}\gamma_{43}\lambda_{34}a_{22}$.

4 шаг

$$1) \mathbf{u}_5 = A_4^{-1}a_5 = A_4^{-1} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \gamma_{31}a_{11} \\ \hline \gamma_{21}a_{11} \\ \hline \gamma_{51}a_{11} \\ \hline \gamma_{41}a_{11} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline \gamma_{21}a_{11}/a_{22} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{array}$$

(здесь учтено, что $\gamma_{31} = \gamma_{32}\gamma_{21}$; $\gamma_{51} = \gamma_{54}\gamma_{43}\gamma_{32}\gamma_{21}$; $\gamma_{41} = \gamma_{43}\gamma_{32}\gamma_{21}$).

$$\mathbf{v}_5 = a_5^T A_4^{-1} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \lambda_{13}a_{11} & \lambda_{12}a_{11} & \lambda_{15}a_{11} & \lambda_{14}a_{11} \\ \hline \end{array} \cdot A_4^{-1} = 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 5 & 4 \\ \hline 0 & \lambda_{12} \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}} & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

(здесь учтено, что $\lambda_{13} = \lambda_{12}\lambda_{23}$; $\lambda_{15} = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}\lambda_{45}$; $\lambda_{14} = \lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}$).

$$2) \alpha_5 = a_{11} - \mathbf{a}_5^T \mathbf{u}_5 = a_{11} - \mathbf{v}_5 \mathbf{a}_5 = \frac{\alpha_{12}a_{11}}{a_{22}}, \text{ где } \alpha_{12} = a_{22} - \lambda_{12}\gamma_{21}a_{11}.$$

$$3) \mathbf{u}_3 \mathbf{v}_3 = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 3 & & 2 & 5 & 4 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \gamma_{21}\lambda_{12} \frac{a_{11}^2}{a_{22}^2} & & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

$$4) A_5^{-1} = \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \\ 1 \end{array} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \\ \hline \frac{\mu_{24}}{\alpha_{23}a_{34}} & -\frac{\gamma_{32}}{\alpha_{23}} & 0 & -\frac{\lambda_{34}}{\alpha_{34}} & 0 \\ \hline -\frac{\lambda_{23}}{\alpha_{23}} & \frac{\mu_{13}}{\alpha_{12}a_{23}} & 0 & 0 & -\frac{\gamma_{21}}{\alpha_{12}} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{45}} & -\frac{\gamma_{54}}{\alpha_{45}} & 0 \\ \hline -\frac{\gamma_{43}}{\alpha_{34}} & 0 & -\frac{\lambda_{45}}{\alpha_{45}} & \frac{\mu_{35}}{\alpha_{34}a_{45}} & 0 \\ \hline 0 & -\frac{\lambda_{12}}{\alpha_{12}} & 0 & 0 & \frac{a_{22}}{a_{11}\alpha_{12}} \end{array} \right\|.$$

где $\mu_{13} = \alpha_{13} = a_{33} - \gamma_{21}\lambda_{12}\gamma_{32}\lambda_{23}a_{11}$, так как $\gamma_{31} = \gamma_{32}\gamma_{21}$; $\lambda_{13} = \lambda_{12}\lambda_{23}$.

Если найти матрицу, обратную к упорядоченной матрице A_n^1 , и переставить в ней строки и столбцы, аналогично выполненной в начале формулирования данного примера, перестановке строк и столбцов A_n^1 , то полученная таким образом матрица полностью совпадет с матрицей A_5^{-1} , полученной здесь.

Научное издание

Бримкулов Улан Нургазиевич

**КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА ИЗМЕРЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАНИЯ МАРКОВСКИХ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Монография



Технический редактор Кулакова Г.А.

Подписано в печать 06.08.2018

Бумага офсетная.

Гарнитура NewtonС

Формат 60×84 1/16

Печать трафаретная. Печ. л. 18,13.

Тираж 500 экз. Заказ № 024-18.

Отпечатано в типографии ИД «Академия Естествознания»,
440026, г. Пенза, ул. Лермонтова, 3