УДК 514.74

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ИСТОКАМ. ТРИГОНОМЕТРИЯ. Ч. 2

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Показано практическое использование тригонометрии на примере измерения высоты горы. Доказывается необходимость обучения школьников приемам использования тригонометрических формул. Приведено доказательство теоремы синусов, а также прямое доказательство формул для синуса суммы и разности углов. Показано, как, используя формулу для площади треугольников с синусом угла, можно получить все основные тригонометрические формулы.

Ключевые слова: теорема синусов; площадь треугольника; синус суммы углов; синус разности углов.

БАШТАЛГЫЧ БУЛАКТАРГА КАЙРЫЛУУ. ТРИГОНОМЕТРИЯ. 2-БӨЛҮК

С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова

Бул макалада тоонун бийиктигин ченөөнүн мисалында тригонометрияны практикалык пайдаланyу көрсөтүлдү. Мектеп окуучуларын тригонометриялык формулаларды колдонуу ыкмаларына үйрөтүүнүн зарылдыгы далилденди. Синустар теоремасынын далилдениши, ошондой эле синус үчүн сумманын жана бурчтардын ар түрдүүлүгү формуласын түздөн-түз далилдөө көрсөтүлдү. Үч бурчтуктардын аянтын чыгаруу үчүн бурчтардын синусу формуласын пайдаланып, бардык негизги тригонометриялык формулаларды алууга боло тургандыгы көрсөтүлдү.

Түйүндүү сөздөр: синустар теоремасы; үч бурчтуктун аянты; бурчтардын суммасынын синусу; бурчтардын айырмасынын синусу.

BACK TO THE ROOTS. TRIGONOMETRY. P. 2

S.K. Kydyraliev, A.B. Urdaletova, E.S. Burova

The practical use of trigonometry is shown on the example of measuring the height of a mountain. It is proved necessary to teach schoolchildren how to use trigonometric formulas. A proof of the sine theorem is provided, as well as a direct proof of formulas for the sum sine and angle difference. It is shown how using the formula for the area of triangles with the sine angle, it is possible to obtain all basic trigonometric formulas.

Keywords: Sine theorem; triangle area; sine of the sum of angles; sine of the difference of angles.

Математики древности сделали великое открытие: они доказали, что у треугольников с одинаковыми углами – подобных треугольников – отношение длин соответствующих сторон одно и то же. Из этого факта непосредственно следует утверждение о том, что у прямоугольных треугольников, имеющих один и тот же острый угол отношение длин сторон постоянно.

Таких отношений шесть:

- отношение противолежащего катета к гипотенузе называется синусом: $a / c = \sin\alpha$ (в обозначениях на рисунке 1);
- отношение прилежащего катета к гипотенузе называется косинусом: $b / c = \cos\alpha$;

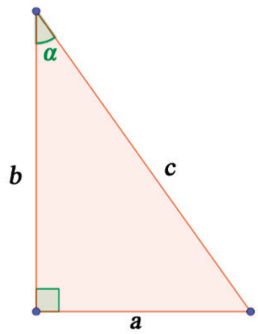

Рисунок 1 – Стороны прямоугольного треугольника

- отношение противолежащего катета к прилежащему катету называется тангенсом: $a / b = \mathrm{tg}\,\alpha$;
- отношение прилежащего катета к противолежащему катету называется котангенсом: $b / a = \mathrm{ctg}\,\alpha$;
- отношение гипотенузы к противолежащему катету называется косекансом: $c / a = \mathrm{cosec}\,\alpha$;
- отношение гипотенузы к прилежащему катету называется секансом: $c / b = \sec\alpha$.

Использование тригонометрических величин позволяет отвечать на многие вопросы, связанные с окружающей нас действительностью. Так, если отрезки, соединяющие точку, на которой находится наблюдатель, с основанием и вершиной дерева составляют угол в 60°, то расстояние до вершины дерева будет в два раза больше расстояния до основания. Этот факт является следствием того, что косинус угла равен 0,5.

Огромный недостаток современной школьной математики – очень редко приводятся примеры, показывающие, как изучаемый материал можно использовать в жизни. А таких примеров очень много. Приведем один из них.

Представьте себе, что нужно определить высоту горы. Вы можете заметить, что эта задача похожа на задачу определения высоты пирамиды. Но следует отметить, что в той задаче, для определения длины тени от пирамиды Фалесу потребовались определенные знания математики [1, 2]. В данном случае определение длины тени, практически, невыполнимая задача. Что же делать? Ответ показан на рисунке 2.

Из двух точек, расстояние между которыми равно l, с помощью прибора для измерения углов, например теодолита, измеряют угол между горизонтальным направлением и вершиной горы. Для того чтобы результат оказался достаточно точным, желательно, чтобы l было довольно большим.

Нарисуем два прямоугольных треугольника *ABC* и *ABH,* где угол *A* равен α, угол *C* равен β, точка соответствует вершине горы, точка основанию высоты, опущенной из вершины горы (рисунок 3).

Обозначим длину отрезка *CH* через *x*. Тогда высоту *BH* можно выразить двумя способами: $h = (l + x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$; $h = x\cdot\mathrm{tg}\,\beta$. Отсюда, $(l + x)\,\mathrm{tg}\,\alpha = x\cdot\mathrm{tg}\,\beta \Rightarrow x = l\cdot\mathrm{tg}\,\alpha / (\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$. Следовательно, высота горы над уровнем горизонта равна $l\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta / (\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$.

Например, если $\alpha = 33°; \beta = 45°; l = 1000\,м$, то высота горы над уровнем горизонта равна:

$1000\cdot\mathrm{tg}\,33°\cdot\mathrm{tg}\,45° / (\mathrm{tg}\,45° - \mathrm{tg}\,33°) \approx 1000\cdot 0,6494\cdot 1 / (1 - 0,6494) \approx 1852$ метра.

Одной из самых простых и полезных формул является формула, утверждающая, что площадь треугольника равна половине произведения длин двух сторон треугольника на синус угла между ними [3]. Для доказательства этой формулы достаточно вспомнить, что площадь треугольника равна половине произведения длины стороны треугольника на длину высоты, опущенной на эту сторону, а также выражение для высоты треугольника через синус угла и длину стороны (рисунок 4):

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h;\; h = b\cdot\sin\gamma \Rightarrow S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma.$$

Формула $S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$ может использоваться как по прямому назначению – для вычисления площади треугольника, так и для получения других результатов.

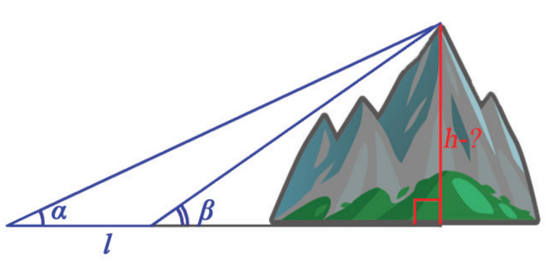

Рисунок 2 – Высота горы

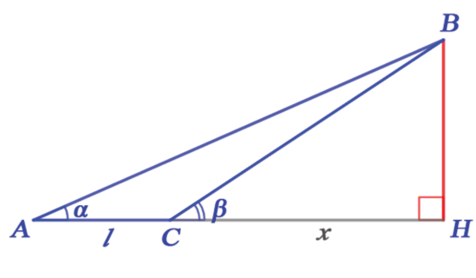

Рисунок 3 – Измерение высоты горы

Рисунок 4 – Площадь треугольника

Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, получаем, что площадь равна произведению длин двух его смежных сторон: $S = a \cdot b \cdot \sin\gamma$. Более того, возьмем другую диагональ и получим хорошо известную формулу (рисунок 5):

$$S = a \cdot b \cdot \sin\gamma \quad S = a \cdot b \cdot \sin(180° - \gamma) \Rightarrow \sin\gamma = \sin(180° - \gamma).$$

Рисунок 5 – Площадь параллелограмма

Другое красивое приложение формулы $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$ – это Теорема синусов.

Пусть даны углы треугольника α, β, γ и длины a, b, c сторон, лежащих против них (рисунок 6).

Тогда, имеют место равенства: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$.

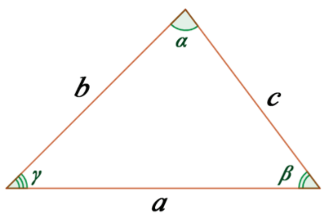

Рисунок 6 – Теорема синусов

Доказательство

Выразив площадь треугольника тремя разными способами, получим:

$$0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma = 0{,}5 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha = 0{,}5 \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta.$$

Теперь, разделив эту цепочку равенств на $0{,}5 \cdot a \cdot b \cdot c$, получим требуемое.

Продолжим использовать формулу для площади треугольника.

Пусть угол *B* делится лучом *p* на части величиной *x* и *y*. Через точку *H* луча *p* проведем перпендикулярную прямую, которая пересечет стороны угла в точках *A* и *C*. В результате получим треугольник *ABC* с высотой *BH* где $|AB| = a, |BC| = b, |BH| = h$, угол *A* равен $90° - x$, угол *C* равен $90° - y$ (рисунок 7).

Площадь треугольника *ABC* равна $0{,}5a \cdot b \cdot \sin(x + y)$.

Высота *BH* делит треугольник *ABC* на прямоугольные треугольники *ABH* и *BCH* Площадь треугольника *ABH* равна

$$0{,}5|AH||BH| = 0{,}5 \cdot a \cdot \sin x \cdot b \cdot \sin(90° - y) = 0{,}5 \cdot a \cdot \sin x \cdot b \cdot \cos y.$$

В данном случае мы вычислили $B|H|$ как длину катета треугольника *BCH*.

Площадь треугольника *BCH* равна:

$$0{,}5|HC||BH| = 0{,}5 \cdot b \cdot \sin y \cdot a \cdot \sin(90° - x) = 0{,}5 \cdot b \cdot \sin y \cdot a \cdot \cos x.$$

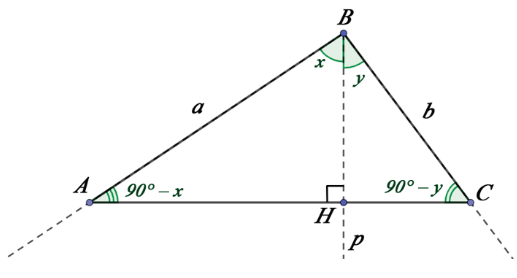

Рисунок 7 – Синус суммы

В этом случае *BH* рассматривается как катет треугольника *ABH*.

Итак, с одной стороны, площадь треугольника *ABC* равна $0{,}5ab\sin(x + y)$, с другой –

$$0{,}5 \cdot a\sin x \cdot b\cos y + 0{,}5 \cdot b\sin y \cdot a\cos x = 0{,}5ab(\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x).$$

Таким образом, $0,5ab\sin(x+y) = 0,5ab(\sin x\cdot cosy+\sin y\cdot cosx)$. Разделив обе части равенства на $0,5ab$, получим формулу для синуса суммы:

$$\sin(x+y) = \sin x\cdot cosy+\sin y\cdot cosx\ .$$

В частности, $\sin 2x = 2\sin x\cdot cosx.$

Задача

Углы треугольника *ABC* находятся в отношении 1:5:6 друг к другу. Большая сторона этого треугольника *AC* равна 20 см. Чему равна высота *BH*, проведенная к этой стороне?

Решение

Из условия получаем, что углы можно считать равными x, $5x$ и $6x$. Тогда, так как сумма углов треугольника равна 180°, имеет место уравнение Отсюда следует, что углы этого треугольника равны $15°,75°,90°$.

Итак, исходный треугольник *ABC* является прямоугольным с гипотенузой *AC*, равной 20 см и острым углом *CAB* равным *15°*. Поэтому, катеты треугольника *ABC*, согласно определению основных тригонометрических функций, равны: $AB = AC\cos 15° = 20\cos 15°$, $BC = ACsin15° = 20sin15°$. Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, площадь прямоугольного треугольника *ABC* равна $0,5\cdot 20\sin 15°\cdot 20\cos 15°$. В то же время, площадь прямоугольного треугольника *ABC* равна $0,5\cdot AC\cdot BH$ – половине произведения длин основания *AC* и высоты *BH*.

Следовательно, $0,5\cdot 20\sin 15°\cdot 20\cos 15° = 0,5\cdot 20\cdot BH \Rightarrow 20\sin 15°\cos 15° = AH.$ Осталось воспользоваться формулой синуса двойного угла:

$2\sin x\cos x = \sin 2x,$ и тем, что $\sin 30° = 0,5$ и получить ответ.

Итак, $BH = 20\sin 15°\cos 15° = 20(\sin 30°)/2 = 20\cdot 0,5/2 = 5$ см.

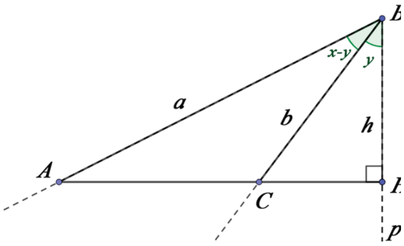

Рисунок 8 – Синус разности

Пусть острый угол *B* величиной $x - y$ достроен до угла x лучом *p*, начинающимся в вершине *B* Нарисуем перпендикулярную к лучу *p* прямую, которая пересечет стороны угла в точках *A* и *C* В результате получим треугольник *ABC* с высотой *BH*, где $|AB| = a, |BC| = b, |BH| = h,$ угол *A* равен $90° - x,$ угол *BCH* равен $90° - y$ (рисунок 8).

Площадь треугольника *ABC* равна $0,5ab\sin(x-y)$. Высота *BH* дополняет треугольник *ABC* до прямоугольного треугольника *ABH* путем добавления прямоугольного треугольника *BCH*. Площадь треугольника *ABH* равна $0,5|AH||BH| = 0,5\cdot a\sin[(x-y)+y]\cdot b\sin(90°-y) =$
$= 0,5\cdot a\sin x\cdot b\cos y.$ Мы вычислили $B|H|$ как длину катета треугольника *BCH*.

Площадь треугольника *BCH* равна:

$$0,5|HC||BH| = 0,5\cdot b\sin y\cdot a\sin(90°-x) = 0,5\cdot b\sin y\cdot a\cos x.$$

В этом случае *BH* рассматривается как катет треугольника *ABH*

Итак, с одной стороны, площадь треугольника *ABC* равна $0,5ab\sin(x-y)$,
с другой – $0,5\cdot a\sin x\cdot b\cos y - 0,5\cdot b\sin y\cdot a\cos x = 0,5ab(\sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x).$

Таким образом, $0,5ab\sin(x-y) = 0,5ab(\sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x)$. Разделив обе части равенства на $0,5ab$, получим формулу для синуса разности:

$$\sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y-\sin y\cdot\cos x.$$

Заключение

Мы можем с удовлетворением отметить, что полученные формулы позволяют легко вывести другие основные тригонометрические формулы. Так, в силу того, что $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, получаем:

$$\mathbf{cos}(x\text{–s } y) = \text{ in}[90°-(x-y)] = \sin[(90°-x)+y] = \sin(90°-x)\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos(90°-x) = \mathbf{cos}x\cdot\mathbf{cos}y+\mathbf{sin}y\cdot\mathbf{sin}x;$$

$$\mathbf{cos}(x+y) = \sin[90°-(x+y)] = \sin[(90°-x)-y] = \sin(90°-x)\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos(90°-x) = \mathbf{cos}x\cdot\mathbf{cos}y-\mathbf{sin}y\cdot\mathbf{sin}x.$$

Рассмотрев отношения синусов и косинусов, можно получить формулы для тангенсов и котангенсов сумм и разностей углов.

Решив систему из двух линейных уравнений $\mathbf{cos}x\cdot\mathbf{cos}y+\mathbf{sin}y\cdot\mathbf{sin}x = \mathbf{cos}(x-y),$

$\mathbf{cos}x \cdot \mathbf{cos}y - \mathbf{sin}y \cdot \mathbf{sin}x = \mathbf{cos}(x + y)$, относительно неизвестных $\mathbf{cos}x \cdot \mathbf{cos}y$ и $\mathbf{sin}y \cdot \mathbf{sin}x$**,** можно получить формулы для произведений синусов и произведений косинусов и так далее.

В завершение статьи отметим, что в небесной механике важнейшими фигурами являются окружность, эллипс, гипербола и парабола. В частности, известно, что если придать телу первую космическую скорость, то оно будет двигаться по окружности вокруг Земли, при увеличении этой скорости – по эллипсу, при достижении второй космической скорости – по параболе, а при скорости, большей второй космической – по гиперболе. Эти фигуры описываются уравнениями второй степени. Оказывается, что для выяснения, какой из перечисленных геометрических фигур соответствует то или иное уравнение, используются формулы суммы и разности тригонометрических функций [4].

Литература

1. Фалес_Милетский. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 29.07.2019).
2. *Кыдыралиев С.К.* Вокруг теоремы Фалеса / С.К. Кыдыралиев, А.Б. Урдалетова, Е.С. Бурова // Вестник КРСУ. 2019. Т. 19. № 8. С. 10–14.
3. *Погорелов А.В.* Геометрия. 7–9 / А.В. Погорелов. М.: Просвещение, 2014. 240 с.
4. *Прасолов В.В.* Геометрия / В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. М.: МНЦМО, 2014. 328 с.